

WhatsApp :
+225 0546234613

Tehua.unasfa@gmail.com



PROF : M. TEHUA

Date de séance :

Niveau : Tle D

Séance N°...

PREPA MATHS 2025

DERNIER VIRAGE 3 ETUDES DE FONCTIONS

FONCTION 1

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -4 \ln x + x^2 + 6$ et on donne ci-dessous son tableau de variation.

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(\sqrt{2})$	$+\infty$

1. Calcule $g(\sqrt{2})$.
2. Montre que pour tout x de $]0; +\infty[$; $g(x) > 0$.

Partie B :

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Déduis-en l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

2. a) Montre que pour tout x de $]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$.
b) Déduis le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ et dresse son tableau de variation.
3. a) Démontre que (Δ) la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
b) Etudie la position relative de (C) et (Δ) sur $]0; +\infty[$.
4. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
5. a) Démontre qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $[1; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
b) Tracer (C), (T) et les asymptotes à la courbe (C).
6. a) Soit k la fonction définie par : $k(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. Calcule $k'(x)$.
b) Déduis-en une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

FONCTION 2

PARTIE A

Soit la fonction h dérivable sur \mathbb{R} et définie par : $h(x) = 3 + (x - 1)e^{-x}$. On admet que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$
- Pour tout nombre réel x , $h'(x) = (2 - x)e^{-x}$

1. Etudie les variations de h et dresse son tableau de variation.
2. a) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.
b) Justifie que : $-1 < \alpha < 0$.
3. Démontre que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $h(x) < 0$ et que : $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $h(x) > 0$.

PARTIE B

Soit la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$.

(C) désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité graphique : 2 cm.

1. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontre que pour tout nombre réel, $f'(x) = h(x)$.
3. a) Etudie les variations de f .
b) Dresse le tableau de variations de f .

4. Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
5. Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
6. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

FONCTION 3

On considère la fonction f sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x - 1)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . **Unité graphique : 4 cm.**

On définit la fonction g sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1. a) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
b) Étudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
2. a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.
b) Montre que α appartient à l'intervalle $]0,2 ; 0,3[$.
c) Déduis – en que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.
3. Étudie la continuité de f en 0.
4. Étudie la dérivabilité de f en 0. Donne une interprétation graphique de cette étude.
5. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
6. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète le résultat obtenu.
7. Étudie le sens de variation de f sur \mathbb{R} . (on montrera que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$).
8. Montre que $f(\alpha) = -\alpha$ et détermine les coordonnées du point d'intersection de (C_f) avec l'axe (Ox) .
9. Dresse le tableau de variation de f .
10. Construis la courbe (C_f) .