

TRAVAUX DIRIGES DE MATHÉMATIQUES SUR LES PROBABILITÉS EN CLASSE DE TERMINALE C, ANNÉE SCOLAIRE : 2024/2025

Question de cours :

1. Définis chacun des concepts suivants : **évènement, univers des possibles, éventualité, variable aléatoire, schéma de Bernoulli d'ordre n** .
2. Quand dit-on que deux évènements A et D sont indépendants ? Qu'est-ce que cela implique ?
3. C'est quoi la variance, l'écart type et l'espérance d'une variable aléatoire X ?
4. Quand parle-t-on d'équiprobabilité entre deux évènements ?
5. Donne l'évènement contraire de chacun des évènements suivants :
 A : « obtenir au moins une boule rouge », B : « le responsable est une fille », C : « Obtenir au plus un jeton numérotés 5 », D : « obtenir un chiffre supérieur ou égal à 4 ».
6. Soit A un évènement et \bar{A} son contraire. Soit B un autre évènement et p une probabilité définie sur un univers Ω . Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :
 - (a) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A) \times p(B)$.
 - (b) on a : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.
 - (c) $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$
 - (d) $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$
7. Donne des exemples de situation traduisant une épreuve de Bernoulli.

Exercice 1 :

Une urne U_1 contient deux boules vertes et trois rouges, indiscernables au toucher. Une urne U_2 contient cinq boules rouges et trois jaunes, indiscernables au toucher. U_1 et U_2 ont même apparence. On tire au hasard deux boules de l'une de ces deux urnes.

1. Calcule les probabilités des évènements suivants :

E_1 : « On tire deux boules de U_1 » ;

E_2 : « On tire deux boules de U_2 » ;

A : « Les boules tirées sont rouges » ;

B : « Les boules tirées sont jaunes » ;

C : « Les boules tirées sont de couleurs différentes »

2. Montre que la probabilité de l'évènement « Les boules tirées sont de U_1 » sachant qu'elles sont rouges est de $\frac{21}{46}$.

Exercice 2 :

Au nom de la loi...

Sir Newton veut étudier la chute des corps.

1. Pour cela, tel Saint Louis, le voilà assis sous un pommier, huit pommes au-dessus de sa tête. Chaque pomme lui tombe sur la tête dans l'heure qui suit, avec une probabilité de 0,2 soit $\frac{1}{5}$. La chute de l'une d'elles n'a aucune influence sur la chute d'une autre. Soit X la variable aléatoire : nombre de pommes lui tombant sur la tête dans l'heure qui suit. Définie la loi de probabilité de X en donnant l'expression de $p(X = k)$, $k \in X(\Omega)$, Ω étant l'univers des possibles.

On calculera $p(X = 3)$ puis l'espérance mathématique de X .

2. Le père Mathurin, propriétaire du pommier, observe ce manège très agacé et décide de faire payer le prof Sir Newton cinq euros la pomme abimée par sa grosse tête.

Soit Y la variable aléatoire : gain en euros du vilain Mathurin.

Détermine l'espérance mathématique de Y .

3. Plus tard et très courageusement, Sir Newton reste quinze minutes sous un autre pommier à l'abri du regard de Super Mathurin.

Suite à une grande rafale de vent rendant équiprobables toutes les chutes d'une pomme, il tombe deux pommes sur sa tête alors qu'il ne restait plus dans l'arbre que huit pommes dont trois pourries.

A est l'évènement : « les pommes tombées sont pourries »

B est l'évènement : « les deux pommes tombées ne sont pas pourries »

C est l'évènement : « une seule des pommes tombées est pourrie »

Calcule les probabilités de ces trois évènements puis, traduis littéralement \overline{B} .

4. Sir Newton en a plein les yeux et en conclut très astucieusement que l'une d'entre elles, au moins, était pourrie. Calcule alors la probabilité qu'elles l'étaient toutes deux.

Exercice 3 :

Une urne contient trois boules noires, quatre rouges et deux blanches toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules dans cette urne.

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. A : « Les trois boules ont la même couleur ».
2. B : « Les trois boules sont de couleurs différentes ».
3. C : « Une boule au moins est noire ».
4. D : « Une boule au plus est blanche ».

Exercice 4 :

Une urne contient trois boules noires, quatre rouges et deux blanches toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules dans cette urne (l'une après l'autre).

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. A : « Les trois boules ont la même couleur ».
2. B : « Les trois boules sont de couleurs différentes ».
3. C : « Une boule au moins est noire ».
4. D : « Une boule au plus est blanche ».

Exercice 5 :

Une urne contient trois boules noires, quatre boules rouges et deux boules blanches toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise trois boules dans cette urne.

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. A : « Les trois boules ont la même couleur ».
2. B : « Les trois boules sont de couleurs différentes ».
3. C : « Une boule au moins est noire ».
4. D : « Une boule au plus est blanche ».

Exercice 6 :

On lance deux fois de suite un dé équilibré numéroté de 1 à 6.

1. A l'aide d'un tableau à double entrée, détermine tous les résultats possibles.
2. Calcule la probabilité pour que les deux numéros soient les mêmes.
3. Calcule la probabilité pour que les deux numéros aient la même parité.

Exercice 7 :

On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le numéro apparu sur sa face supérieure. La probabilité d'apparition du N°6 est le triple de celle du N°1 et les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 ont même probabilité d'apparition.

1. Calcule la probabilité d'apparition de chaque numéro lorsqu'on lance le dé une seule fois.
2. (a) Calcule la probabilité de l'évènement A : « obtenir un numéro pair »
(b) Déduis-en que la probabilité de l'évènement B : « obtenir un numéro impair » est 0,375.
3. On lance le dé deux fois de suite, montre que la probabilité pour que les deux numéros soient identiques est $p = 0,21875$.

Exercice 8 : « les jeux de cartes »

On tire au hasard et simultanément quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. A : « Les quatre cartes ont la même couleur ».
2. B : « Les quatre cartes sont de couleurs différentes ».
3. C : « On obtient au moins un roi ».
4. D : « On obtient au plus un as ».

N.B :

- Un jeu de carte a quatre catégories (couleurs) de carte :
 - **Trèfle** (arachide)
 - **Carreaux** (biscuit carré)
 - **Piques** (macabo noire)
 - **Cœurs** (macabo rouge)
- **Composition d'une couleur (On a : 8 cartes par couleur) :**
 - **L'as** (c'est le **A** dans le jeu de carte)
 - **Le roi** (c'est le **K** dans le jeu de carte)
 - **La dame** (c'est le **J** dans le jeu de carte)
 - **Le valet** (c'est le **O** dans le jeu de carte)
 - **Le 7**
 - **Le 8**
 - **Le 9**
 - **Le 10**
- Un jeu de 32 cartes est constitué de :
 - quatre **as**
 - quatre **rois**
 - quatre **dames**
 - quatre **valets**
 - quatre **7**

- quatre **8**
- quatre **9**
- quatre **10**

Exercice 9 :

Une urne contient 2 boules vertes, 3 boules rouges et 4 boules blanches toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules de cette urne.

1. Détermine le nombre de cas possibles.
2. Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
 - A : « Les deux boules sont de même couleur ».
 - B : « Une boule au moins est rouge ».
3. Lorsqu'on tire une boule verte on marque 2 points, lorsqu'on tire une boule rouge on marque 0 point. Par contre, lorsqu'on tire une boule blanche, on perd 2 points. On désigne par λ le nombre de points marqués.
 - (a) Détermine la loi de probabilité de λ .
 - (b) Calcule l'espérance mathématique de λ .
 - (c) Calcule l'écart type de λ .
 - (d) Ce jeu est-il avantageux, désavantageux ou équilibré ? Justifie ta réponse.

Exercice 10 :

Le tableau suivant représente la loi de probabilité de la variable aléatoire T associée à une expérience.

$T = t_i$	m	100	200
$p(T = t_i)$	$2k$	$4k$	k

Sachant que l'espérance mathématique de T est $E(T) = \frac{600}{7}$:

1. Détermine la valeur exacte de k et de m .
2. Calcule la variance de T ainsi que son écart type.
3. Définie et construis dans un repère orthogonal la fonction de répartition de cette variable aléatoire T .

Exercice 11 :

Remarque : On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A que l'on note $P(B/A)$ ou $P_A(B)$ (A étant un évènement non nul), la probabilité que l'évènement B est réalisé sachant que l'évènement A est réalisé.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes puis, sans la remettre, on tire une seconde. Notons les évènements :

A : « La première carte tirée est un cœur »

B : « La deuxième carte tirée est un cœur »

1. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?
2. Montre que la probabilité $P(B/A)$ de tirer un cœur au second tirage sachant que la première carte tirée est un cœur vaut $\frac{7}{30}$.
3. Compare $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B/A)$.

Exercice 12 :

Soit A et B deux évènements indépendants tels que : $P(A \cup B) = 0,65$ et $P(B) = 0,5$. Soit C et D deux évènements incompatibles tels que : $P(C \cup D) = 0,8$ et $P(C) = 0,438$.

1. Exprime $P(A \cap B)$ en fonction de $P(A)$ et $P(B)$ puis $P(D \cap C)$ en fonction de $P(C)$ et $P(D)$.

1. Calcule $P(A)$, $P(A/B)$ et $P(B/A)$.

2. Calcule $P(C)$, $P(D/C)$ et $P(C/D)$.

3. Montre que $P(B/\bar{A}) = \frac{1}{2}$.

4. Détermine $P(\bar{C}/\bar{D})$.

Exercice 13 :

On lance une pièce de monnaie lorsqu'elle est immobile. On désigne par X le résultat obtenu.

On suppose que **1** désigne le résultat pile et **0** désigne face.

1. Définie la loi de probabilité de X .

2. Calculer la probabilité $P(X = 1)$ pour que $X = 1$.

Exercice 14 :

Un dé truqué est lancé 10 fois de suite. Sachant que la probabilité d'une face paire est le double de la probabilité d'une face impaire.

1. Calcule la probabilité d'une face paire, puis celle d'une face impaire en supposant qu'on lance le dé une seule fois.

2. On désigne par le succès le résultat $N^{\circ}6$.

(a) Calcule la probabilité pour que l'on obtient 5 fois le $N^{\circ}6$.

(b) Calcule la probabilité pour que l'on obtient le $N^{\circ}6$ une seule fois.

(c) De quelle loi s'agit-elle ? déduis-en son espérance mathématique et son écart type.

Exercice 15 :

Un dé a ses faces numérotées de 1 à 6. On note p_k la probabilité d'apparition de la face k lorsque le dé est lancé. Le dé est pipé de telle sorte que la probabilité p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 constituent dans cet ordre une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. X est la variable aléatoire donnant le résultat obtenu.

1. Montre que $p_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} p_1$.

2. Etablie la loi de probabilité de X .

3. Ce dé est utilisé pour jouer un jeu donc les conditions sont les suivantes : l'apparition d'une face de numéro pair fait gagner 200f tandis que le numéro impair fait perdre 300f. Un joueur effectue trois lancers consécutifs. Soit Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur après les trois lancers.

(a) Etablie la loi de probabilité de Y .

(b) Calcule $E(Y)$ et conclure.

Exercice 16 :

Un test de recrutement dans une entreprise est constitué de 5 questions. Pour chaque candidat on attribue +2 points pour une réponse juste et -2 points pour une réponse fausse ou non donnée.

On note n le nombre de réponses justes données par un candidat.

1. (a) Montre que la note N d'un candidat à la fin du test est $N = 4n - 10$.

(b) Déduis-en l'ensemble des notes possibles qu'un candidat peut avoir.

2. Le candidat Keli trouve les réponses exactes des deux premières questions. Il répond au hasard aux trois dernières questions. On admet que sa réponse est juste avec la probabilité de $\frac{1}{3}$. Et pour tout autre candidat la probabilité de donner une réponse juste à une des cinq questions est de $\frac{1}{2}$.

(a) Détermine l'ensemble des notes que Keli peut avoir à la fin du test.

(b) Pour être admis à l'école, un candidat doit obtenir à l'issue du test une note supérieure ou égale à 6. Quelle est la probabilité pour que :

A : « Keli réussisse au test »

B : « Un candidat autre que Keli réussisse au test »

Exercice 17 :

Une urne contient 5 jetons discernables au toucher dont deux portent le numéro -1 , deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 0 . On tire successivement sans remise deux jetons de l'urne. On désigne par Z la variable aléatoire égale à $|a + b|$ où a désigne le numéro de la première boule tirée et b celui de la deuxième boule tirée.

1. Calcule la probabilité que :

(a) La conique $H_{a,b}$ d'équations $2ax^2 + (-1)^b y^2 = 1$ soit une hyperbole.

(b) Les plans $(P) : x + ay + bz + 3 = 0$ et $(Q) : ax + by + z + 3 = 0$ soient parallèles.

2. Détermine la loi de probabilité de Z , puis montre que le joueur de ce jeu a plus de chance de gagner que de perdre.

3. Calcule la variance $V(Z)$ de Z .

Exercice 18 :

On considère un dé cubique dont deux de ces faces porte le numéro 0 , une face porte le numéro 1 , une face porte le numéro 2 , une face porte le numéro -1 et la dernière face porte le numéro -2 . Dans cet exercice, on suppose que m est un entier relatif ne pouvant prendre que des valeurs portées sur ce dé. On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation $(E_m) : 9x - (m + 2)y = 2$; on considère aussi la sphère (S) d'équation $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 3$ et enfin le plan $(p_m) : x + y + z + 2m = 0$.

1. Soit T la variable aléatoire qui à chaque lancé du dé associe le résultat obtenu.

(a) Détermine la loi de probabilité de T .

(b) Calcule l'écart type de T .

2. Etude de l'équation (E_m)

(a) Calcule la probabilité pour que (E_m) ne soit pas soluble dans \mathbb{Z}^2 .

(b) Déduis alors la probabilité pour que (E_m) soit soluble dans \mathbb{Z}^2 en utilisant deux méthodes différentes.

(c) L'équation (E_2) est-elle soluble dans \mathbb{Z}^2 ? si oui quelles sont ces solutions ? si non pourquoi ?

3. Etude de (S) et (p_m)

(a) Calcule la probabilité pour que (p_m) passe par le centre de (S) .

(b) Calcule la probabilité pour que (p_m) et (S) soient tangents.

Exercice 19 :

Une urne contient 5 boules portant les réels $-\sqrt{2}$; -1 ; 0 ; 1 et $\sqrt{2}$. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. On appelle x le numéro de la première boule et y celui de la deuxième boule et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1. Combien de nombre complexe peut-on ainsi construire ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir :

(a) Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$?

(b) Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$?

3. On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 boules de l'urne et on désigne par C la variable qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombre complexe de module $\sqrt{2}$.

(a) Montre que la loi de probabilité de C est la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $P = \frac{8}{25}$.

(b) Déduis-en que la variance V de C est $V = \frac{408}{625}$.

Exercice 20 :

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera \bar{A} son événement contraire et $P(\bar{A})$ sa probabilité.

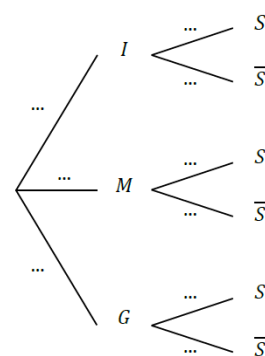
1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0,8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise.



On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

Exercice 21 :

On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, la famille des endomorphismes f_λ de \mathbb{R}^2 dont la matrice M_λ relativement à la base canonique (\vec{i}, \vec{j}) de \mathbb{R}^2 est de la forme $\begin{pmatrix} -1 + \lambda & \lambda + 1 \\ \lambda - \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ où λ est un réel.

1. A quelle conditions sur λ , f_λ est-il un automorphisme ?

2. Une boîte Ω contient 5 boules numérotées $-2, -1, 0, 1$ et 2 , toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de Ω et on note (p, q) le couple de numéros obtenus.

On désigne par G l'aléa numérique qui à tout couple (p, q) associe la valeur :

- -2 si aucun des f_p et f_q n'est un automorphisme ;
- 1 si un seul parmi f_p et f_q est un automorphisme ;
- 3 si les deux f_p et f_q sont des automorphismes.

Et par X la variable aléatoire qui associe aux deux boules tirées, la somme de leurs numéros.

(a) Détermine les lois de probabilité de G et de X .

(b) Calcule l'espérance et l'écart type de G d'une part et de X d'autre part.

(c) Calcule la probabilité pour que $f_\lambda(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 22 :

1. Un point est choisi au hasard sur une parabole de sommet $(0; 0)$ et de directrice $y = -10$.

Quelle est la probabilité que le point se trouve à l'intérieur d'une bande de largeur 12, centrée sur l'axe des abscisses ?

2. Un point est choisi au hasard à l'intérieur d'une ellipse de demi-axes 8 et 10. Quelle est la probabilité que le point se trouve à l'intérieur d'un triangle équilatéral de côté 10, inscrit dans l'ellipse ?

3. Un graphe aléatoire avec 25 sommets et une probabilité de 0,5 d'avoir une arête entre deux sommets quelconques est générée. Quelle est la probabilité que le graphe ait exactement 3 sommets isolés ?

4. On considère un graphe avec 7 sommets et 9 arêtes. Chaque arête a une probabilité de 0,9 d'être présente. Montre que la probabilité que le graphe ait un cycle vaut environ 0,917.

5. Un graphe aléatoire avec 10 sommets et une probabilité de 0,4 d'avoir une arête entre deux sommets quelconques est générée. Montre que la probabilité que le graphe ait exactement 3 composantes connexes vaut environ 0,034.

Exercice 23 :

Urne contient cinq jetons portant respectivement les nombres $1, e^2, e^{-2}, e$ et $\frac{1}{e}$, tous

indiscernables au toucher. On tire successivement au hasard et avec remise deux jetons de l'urne et on note par a et b les nombres lus respectivement sur le premier jeton, puis sur le deuxième jeton tiré. A cette expérience aléatoire, on associe le point M d'affixe $z = \ln a + i \ln b$ et la transformation f du plan qui pour tout point B d'affixe k on associe le point A d'affixe k' tels que $k' = aik + b$.

Le plan complexe est rapportée au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Détermine la probabilité de l'évènement A : « M appartient à l'axe des réels ».

2. Montre que le point M a 20% de chance d'appartenir à l'axe des imaginaires purs.

3. Calcule la probabilité de l'évènement B : « f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ rad »

4. On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par X la variable qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{4}$ rad.

(a) Détermine la loi de probabilité de X .

(b) Détermine puis construit la fonction de répartition F de X .

Exercice 24 :

Soit la fonction de répartition F d'une variable aléatoire T , définie par le tableau ci-après :

T	$] -\infty; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 6[$	$[6; +\infty[$
$F(T)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	1

1. Donne les valeurs exactes prises par T .
2. Etablie la loi de probabilité de T .
3. Calcule l'espérance mathématiques $E(T)$ de T .

Exercice 25 :

Une caisse contient cinq jetons numérotés de 1 à 5, tous indiscernables au toucher. On tire successivement au hasard et avec remise deux jetons de la caisse et on note par a et b les nombres lus respectivement sur le premier jeton, puis sur le deuxième jeton tiré. A cette expérience aléatoire, on associe la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ d'une application linéaire g dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ d'un plan vectoriel de E dans E .

1. Détermine la probabilité de l'évènement A : « $g \circ g$ est égale à l'identité de E ».
2. Détermine la probabilité de l'évènement A : « g est un isomorphisme ».
3. Démontre qu'il y'a exactement 12% de chance que le déterminant de M soit nul.

Exercice 25 :

On admet que dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir une fille est la même que celle d'avoir un garçon et est égale à $\frac{1}{2}$. Lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants et qu'il n'y a pas de naissance double ou multiple pour une famille de 5 enfants (les naissances étant toujours séparées). On désigne par π la variable aléatoire représentant le nombre de filles.

1. Définie la loi de probabilité de π .
2. Calcule la probabilité de $\pi = 3$.
3. Calcule l'espérance mathématique et l'écart type de π .
4. Construis la fonction de répartition associée à π .

Exercice 26 :

Une machine fabrique 2% de pièces défectueuses dont 97 % sont éliminées après un test. Hélas le test, qui n'est pas parfait, élimine aussi 1% des pièces non défectueuses. Vérifie que la probabilité pour qu'une pièce soit éliminée vaut 2,92%.

Examineur : MANGADOU WILFRIED