Fomesoutra.com ça soutra!

MATHEMATIQUES

Niveau : Tle D
Prof : M. TEHUA
Date :

Cette fiche comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2

PREPA BAC BLANC MARS 2026 : ETUDE DE FONCTION

FONCTION 1

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x}\ln(x)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un orthonormé $(O\,;I\,;J)$ $(unité\ 1cm)$

1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.
   a. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   b. Etudie le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.
   c. Vérifie que $g(1) = 0$.
   d. Justifie que : pour $x \in]0\,;1[: g(x) < 0$ et pour $x \in]1\,;+\infty[: g(x) > 0$.
2. a. Justifie que (C) admet une asymptote horizontale d'équation $x = 0$.
   b. Détermine la limite de f en $+\infty$.
3. Démontre que : pour tout $x \in]0\,;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
4. Déduis de la question 1.d) le signe de $f'(x)$ et dresse le tableau de variation de f.
5. Démontre que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OI).
6. Construis la courbe (C).

FONCTION 2

Partie A

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x + 2e^{-x}$ et $g(x) = \ln(x + 2e^{-x})$

1. justifie que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. a) Justifie que f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2[$ et strictement croissante sur $]\ln 2; +\infty[$.
   b) Dresse le tableau de variation de f et déduis-en le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. a) Justifie que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la question $2b$) partie A.
   b) Justifie que : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
   c) Justifie que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$. Interprète graphiquement ces résultats.
2. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -x + \ln(xe^x + 2)$.
   b) Justifie que la droite $(D) : y = -x + \ln 2$ est une asymptote oblique à (C_g) $en -\infty$.
   c) Etudie la position relative de (C_g) par rapport à la droite (D).
3. on admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1-2e^{-x}}{x+2e^{-x}}$.
   b) Déduis-en le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
4. a) $Calcule$ $g(-1)$.
   b) Démontre que g réalise une bijection de $]-\infty; \ln 2[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
   c) On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
   Démontre que g^{-1} est dérivable en $\ln(-1+2e)$ et déduis que : $(g^{-1})'(\ln(-1+2e) = -1$.
5. Construis la droites (D) et la courbe (C_g) dans le repère orthonormé (O, I, J).

FONCTION 3

Soit la fonction h strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et définie par $h(x) = -2 + 2x^2 + 2\ln x$.
On donne $h(1) = 0$.

1) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]0\,;1[, h(x) < 0 \\ \forall\, x \in]1\,;\,+\infty[\; h(x) > 0 \end{cases}$

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{x}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et (C) est la courbe représentative de f

2) a- Justifie que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$ puis donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

b- Détermine la limite de f en $+\infty$

3) On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

Justifie que : $\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[\,,\; f'(x) = -\frac{h(x)}{2x^2}$

4) a- Justifie que f est strictement croissante sur $]0\,;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

b- Dresse le tableau de variation de f sur $]0\;;+\infty[$.

c- Déduis-en que la fonction f est négative sur $]0\;;+\infty[$.

5) Justifie que la droite (Δ) d'équation $y = 1 - x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

Justifie que g réalise une bijection de $]1\,;\,+\infty[$ vers un intervalle K que tu préciseras.

7) Construis (C) et (Δ) dans le même repère.

FONCTION 4

PARTIE A

Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = -1 + x\ln x$

1-Démontre que h est décroissante sur $\left]0;\frac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$

2-On admet que $\lim\limits_{x\to 0\,>} h(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Dresse le tableau de variation de h

3-a) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$

b) Justifie que : $\forall x \in]0;\alpha[, h(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, h(x) > 0$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 1 - e^{1-x}\ln x$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé direct (O,I,J) d'unité 2cm

1-a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\; f(x) = 1 - e \times \frac{\ln x}{e^x}$

b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$

2-a) Démontre que : $\forall x \in]0;+\infty[\;,\; f'(x) = \frac{e^{1-x}}{x}h(x)$

b) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variation (On admet que $\lim\limits_{x\to 0\,>} f(x) = +\infty$).

3-Démontre que $f(\alpha) = 1 - \frac{e}{\alpha e^{\alpha}}$

4-Trace (C). On prendra $\alpha = 1{,}7$