

Cette fiche comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2

PREPA BAC BLANC MARS 2026 : PRIMITIVE ET ETUDE DE FONCT.

EXERCICE 1

Soit f la fonction continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$ telle que : $f(x) = \frac{x}{(x-1)^4} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

On note F une primitive de f sur $]1; +\infty[$

1. On admet que : $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{x}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$

Détermine une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = \frac{x}{(x-1)^4}$

2. a) Soit k la fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et définie par : $k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Justifie que pour tout x élément de $]1; +\infty[, k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b) Déduis-en une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. Déduis des questions 1. et 2. b) une primitive de la fonction f sur $]1; +\infty[$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x + e^{-x} - 2}{(e^x - 1)^2}$

1) Détermine l'ensemble de définition de f .

2) On admet que f est continue sur $]0; +\infty[$.

a- Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} + e^{-x}$

b- Déduis-en les primitives de f sur $]0; +\infty[$.

3) On admet que la fonction $x \mapsto \ln(e^x - 1) - \frac{1}{e^x - 1} - e^{-x} + 2$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de f .

Détermine la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en $\ln 2$.

ETUDE DE FONCTION

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$
 (C_f) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1. a) Calcule la limite à droite en 0 de f .
b) Interprète graphiquement le résultat obtenu.
2. Calcule la limite de f en $+\infty$.
3. a) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.
b) Justifie que (C_f) est au-dessus de (D) sur $]0; +\infty[$.
4. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$.
b) Détermine le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0; 1]$.
Démontre que h est une bijection de $]0; 1]$ sur un intervalle K que tu détermineras.
6. On désigne par h^{-1} la bijection réciproque de h .
a) Calcule $h\left(\frac{1}{2}\right)$.
b) Justifie que h^{-1} est dérivable en $\frac{e^2}{2}$ et calcule $(h^{-1})'\left(\frac{e^2}{2}\right)$.

SITUATION COMPLEXE

Une société spécialisée dans la commercialisation des bouteilles d'huile de palme, dans la région du Sud Comoré, achète des tickets pour la prochaine édition de la coupe du monde de Football.

Afin de faire participer le plus grand nombre de sa clientèle à cette compétition, elle organise un jeu de la façon suivante :

- Dans un premier lot constitué du tiers des bouteilles mises en vente, 60% donne droit à un ticket ;
- Dans le second lot constitué du reste des bouteilles mises en vente, 25% donne droit à un ticket.

M. Koffi, client de cette société, n'ayant pas pu acheter officiellement un ticket décide de se saisir de cette ultime occasion. Pour cela, il voudrait savoir combien de bouteilles au minimum devrait-il acheter pour avoir au moins 9 chances sur 10 de participer à cette prochaine édition.

En utilisant tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de celui-ci.