

Exercice 1 (2 points)

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées. Une seule est juste. Ecris le numéro de l'affirmation et la lettre correspondant à la bonne réponse. Exemple : 5 – C

N°	AFFIRMATIONS	A	B	C
1	X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$; alors la variance $V(X)$ est égale à :	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{3}{16}$
2	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé; on donne E $(-2 + i)$ et F (-4) . L'ensemble des points M(Z) tels que : $ z + 2 - i = z + 4 $ est :	Le cercle de centre E et de rayon 4	Le cercle de diamètre [EF]	La médiatrice du segment [EF]
3	Le plus petit entier naturel n tel que : $1 - (0,68)^n \geq 0,9$ est :	5	6	10
4	La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ a pour primitive sur $]0; +\infty[$	$\ln x^2$	$2\ln x$	$\frac{1}{2}\ln^2 x$

Exercice 2 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAIE (V) si l'affirmation est vraie ou de FAUSSE (F) si l'affirmation est fausse. Exemple : 5 – V

N°	Affirmations
1	Pour tout nombre réel, $\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = 0$
2	$\int_0^1 \frac{e^x}{2 + e^x} dx = \ln\left(\frac{2 + e}{3}\right)$
3	Si r est le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables. La corrélation entre les deux variables est fortement linéaire lorsque : $r \geq 1$
4	Soit (v_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$ et $q \neq 1$.) $v_p + v_{p+1} + \dots + v_{n-1} + v_n = v_p \times \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$.

Exercice 3 (3 points)

1) a – Trouve les nombres réels a et b tel que pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$; on ait: $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$.

b) Calcule l'intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}$.

2) A l'aide d'une intégration par parties et de ce qui précède, calcule chacune des intégrales suivantes :

$$J = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \text{ et } K = \int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt.$$

Exercice 4 (3 points)

On considère les suites U_n et V_n définies par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$$

- 1) Calcule V_0
- 2) Démontre que V est une suite géométrique de raison 2.
- 3) Exprime V_n en fonction de n .
- 4) Calcule la limite de la suite V .
- 5) Exprime U_n en fonction de V_n puis en déduis la limite de la suite U .
- 6) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$.
 - a – Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = (1 - 2^n)\ln 2$.
 - b – Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$
 - c – Exprime T_n en fonction de n .

Exercice 5 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique le centimètre.

Tu considères la fonction numérique définie par : $f(x) = (x - 1)\ln|x - 3|$.

La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Notes (C) la courbe représentative de f dans le plan de repère (O, I, J) .

1) a – Justifie que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

b – Interprète graphiquement les résultats de la question 1a).

2) Calcule la limite de f en $-\infty$ et en 3.

Admets que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).

3) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \ln|x - 3| + \frac{x - 1}{x - 3}$.

On admet qu'il existe un nombre réel α élément de $[1,54; 1,55]$ tel que $g(\alpha) = 0$ et que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]3; +\infty[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; 3[, g(x) < 0. \end{cases}$$

a – Vérifie $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha - 3}$.

b – Justifie que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, f'(x) = g(x)$.

c – Etudie le sens de variation de f .

d – Dresse le tableau de variation de f .

4) a – Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, \ln|x - 3| > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 4$.

b – Etudie la position relative de (C) par rapport à la droite (OI).

5) Construis (C), (prends $\alpha = 1,55$ et $f(\alpha) = 0,21$).

Exercice 6 (5 points)

Une usine fabrique et commercialise des jeux électroniques assez fragiles. Sa capacité journalière de production est comprise entre 10 000 et 20 000 jeux. On suppose que toute la production est testée pour repérer les jeux défectueux. Le contrôle de qualité sur plusieurs jours révèle que pour la production de x jeux, exprimé en dizaine de milliers, le nombre de jeux défectueux est modélisé sur l'intervalle $[1; 2]$ par la fonction définie comme suit :

$$d(x) = 2e^{x-2} - x + \frac{2}{5}.$$

Le directeur de l'usine veut réduire le nombre de produits défectueux. Il cherche donc à savoir le nombre de jeux à fabriquer qui engendrerait le minimum de perte en terme de jeux défectueux.

N'ayant pas les compétences requises pour effectuer les calculs, il te demande de l'aide.

Détermine la production journalière à l'unité près qui engendre le minimum possible de jeux défectueux.