SERIE CDE

INSTITUT GIOVANNI BIFFI

PREPA MATHS

BAC 2026

sujets : 2020 à 2025

By TEHUA

BACCALAURÉAT
SESSION 2025

Durée : 4 h
Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de VRAI si l'énoncé est vrai ou de FAUX si l'énoncé est faux.

1. u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K. r est un élément de $\mathbb{Q}^*\backslash\{1\}$.
Une primitive sur K de la fonction $\frac{u'}{u^r}$ est la fonction $\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$.

2. Quel que soit le nombre réel a strictement positif, $\ln\left(\sqrt[3]{a}\right) = 3lna$.

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = P(X > x)$ est la fonction de répartition de X.

4. Pour tous p élément de $\mathbb{Z}^*$, q élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations a, b, c et d permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

1. z est un nombre complexe de module 4. Le conjugué de z est égal à…

a) $\frac{1}{4z}$; *b)* $\frac{4}{z}$; *c)* $\frac{1}{16z}$; *d)* $\frac{16}{z}$.

2. La forme trigonométrique du nombre complexe $-\sqrt{3} + i$ est…

a) $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$; *b)* $2(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})$; *c)* $2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$; *d)* $2(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6})$.

3. L'intégrale $\int_1^e (lnx + 1)dx$ est égal à …

a) $2e$; *b)* $e + 1$; *c)* e ; *d)* $e - 1$.

4. L'image de 4 par le prolongement par continuité g de la fonction f définie sur $[0\,; 4[$ par :
$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ est …

a) 0 ; *b)* $\frac{1}{8}$; *c)* $\frac{1}{16}$; *d)* $\frac{1}{32}$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$, par : $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i$.

1. Calcule $P(i)$.

2. Vérifie que : $\forall\ z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-i)[z^2 - (3+i)z + 2 + i]$.

3. Vérifie que $1+i$ est une racine carrée de $2i$.

4. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.

EXERCICE 4 **(3 points)**

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$.

On admet que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1$.

1. *a*) Démontre que la suite (u_n) est croissante.
b) Déduis-en que la suite (u_n) est convergente.

2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.
a) Démontre que : $\forall\ x \in [\,0\,;\,1],\quad |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.
b) En utilisant l'inégalité des accroissement finis, démontre que :
$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$.
c) Démontre par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ |u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
d) Déduis-en la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 5 **(5 points)**

Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x-1}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
(D) est la droite d'équation : $y = 2x - 1$.

1. *a*) Calcule la limite de f en 0.
b) Calcule la limite de f en $+\infty$.

2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
a) Démontre que : $\forall\ x \in\ ]0\,;\ +\infty[, f'(x) = \frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$.
b) Déduis-en que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,ln2[$ et strictement croissante sur $]\,ln2\,;+\infty[$.
c) Dresse le tableau de variation de f.

3. *a*) Justifie que $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (D) sur $]0\,;+\infty[$.

b) Vérifie que : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = 2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1}$.

c) k désigne un nombre réel supérieur ou égal à 2.
On désigne par $A(k)$ l'aire en cm² du domaine limité par $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = ln2$ et $x = lnk$.
Démontre que : $A(k) = 4[ln2 + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)]$ cm².

d) Calcule : $\lim\limits_{k \to +\infty} A(k)$.

EXERCICE 6 (5 points)

A l'occasion d'une journée récréative, un groupe d'élèves de Terminale D, organise une loterie dans laquelle une mise en francs CFA est demandée avant de jouer.
Le jeu consiste à tirer simultanément deux boules dans une urne qui en contient six, toutes indiscernables au toucher, dont 2 blanches, 3 noires et une verte.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il ne reçoit rien.
Si le joueur obtient deux boules noires, il reçoit 500 francs CFA.
Si le joueur obtient deux boules blanches, il reçoit le double de sa mise.

Les organisateurs voudraient connaitre le montant minimal à fixer comme mise pour espérer ne pas perdre dans ce jeu.
Ne sachant comment s'y prendre, ils te sollicitent.

A l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, apporte une réponse à la préoccupation des organisateurs de cette loterie.

BACCALAURÉAT **Durée : 4 h**
SESSION 2024 **Coefficient : 4**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de VRAI si l'énoncé est vrai ou de FAUX si l'énoncé est faux.

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et F une primitive de f sur K.
   Les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur K.

2. Le coefficient de corrélation linéaire r d'une série statistique double (X, Y) est tel que : $-1 < r < -0,87$. La corrélation linéaire entre les variables X et Y est forte.

3. La fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, est la fonction : $x \longmapsto a^x$.

4. Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ et ℓ un nombre réel tel que :
   $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ |f(x) - \ell| < \frac{1}{x}$. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations a, b, c et d permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

1. z est un nombre complexe tel que $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le module de z est égal à…
   a) $a^2 + b^2$; *b)* $\sqrt{a^2 + b^2}$; *c)* $a^2 - b^2$; *d)* $|a + b|$.

2. Une primitive sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ est la fonction F définie par :…
   a) $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$; *b)* $F(x) = -\ln(\sin x)$; *c)* $F(x) = \ln(\sin x)$; *d)* $F(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x)^2}$.

3. Soit Ω un point du plan. L'homothétie de centre Ω et de rapport -3 est une similitude directe de centre Ω, de …
   a) rapport -3 *et* d'angle 0 ; *b)* rapport -3 *et* d'angle π ;
   c) rapport 3 *et* d'angle π ; *d)* rapport 3 *et* d'angle 0.

4. Si A, B et C sont des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i\sqrt{3}$, alors…
   a) ABC est un triangle rectangle en A ; *b)* ABC est un triangle isocèle en A
   c) ABC est un triangle rectangle isocèle en A ; *d)* les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Dans le cadre du programme jeunesse d'un gouvernement, une enquête a été menée en 2023 sur l'ensemble des élèves issus d'un centre de formation professionnelle.
Cette enquête a révélé que 40% de ces élèves sont des bacheliers. Parmi ces bacheliers, 90% ont obtenu un emploi et parmi les non bacheliers, 70% ont obtenu un emploi.

1. On choisit au hasard un élève issu de ce centre.
Démontre que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est 0,78.

2. On admet que le centre a formé suffisamment d'élèves.
On choisit au hasard 5 élèves issus du centre et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves ayant obtenu un emploi.
a) On admet que X suit une loi binomiale de paramètres *5* et 0,78.
Calcule l'espérance mathématique E(X) de X et interprète le résultat.
b) Calcule la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi.

EXERCICE 4 **(3 points)**

On se propose de chercher la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = -4x - 4$ telle que $f(0) = 1$, puis de déterminer une valeur approchée de l'équation $x \in [0\,;+\infty[,\ f(x) = -1$.

1. Démontre que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x + 3$ est une solution de (E).

2. Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
Détermine les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E').

3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Démontre que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est une solution de (E').
b) Déduis des questions précédentes les solutions de (E).
c) Justifie que la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$.

4. *a*) Justifie que f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
b) Démontrer que l'équation $x \in [0\,;+\infty[, f(x) = -1$, admet une solution unique α telle que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

EXERCICE 5 **(5 points)**

Le but de cet exercice est de démontrer qu'une fonction est bijective et d'effectuer un calcul d'aire.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction numérique h, continue sur $]1\,;+\infty[$ et définie par : $h(x) = \frac{x+1}{x\ln x}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

1. Démontre que : $\forall x \in]1\,;+\infty[,\ 1 + x + \ln x > 0$.

2. *a*) Calcule la limite de h à droite en 1, puis interprète graphiquement le résultat.
b) Démontre que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de h en $+\infty$.

3. *a*) Démontre que : $\forall x \in]1\,;+\infty[, h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$.
b) Justifie que : $\forall x \in]1\,;+\infty[, h'(x) < 0$.

4. Démontre que h est une bijection de $]1;+\infty[$ dans un intervalle K à préciser.

5. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{lnx}$.
Démontre que ($\mathscr{C}$) est au-dessus de (Γ) sur $]1\,;+\infty[$.

6. *a*) Justifie que : $\int_e^{e^2} \frac{1}{xlnx}\,dx = ln2$.
b) Détermine l'aire $\mathscr{A}$ en cm² de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$), (Γ) et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

EXERCICE 6 **(5 points)**

Monsieur Zahui, un entrepreneur, vient d'acquérir avec la mairie de sa ville natale un terrain qu'il doit mettre en valeur. Il souhaite construire sur ce terrain un marché de produits vivriers pour aider les femmes à écouler facilement leurs marchandises. Il dispose de 20 000 000 F CFA et voudrait doubler cette somme avant de commencer à réaliser son projet. Il sollicite une institution financière qui lui propose d'épargner cette somme à un taux d'intérêt annuel de 6,9%.

Monsieur Zahui voudrait savoir le nombre minimum d'années qu'il lui faut pour commencer le projet. Ne sachant pas comment s'y prendre, il te sollicite.

À l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Zahui.

BACCALAURÉAT **Durée : 4 h**
SESSION 2023 **Coefficient : 4**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 (2 points)

Soit f une fonction numérique définie et deux (2) fois dérivable sur un intervalle contenant un nombre réel x_0. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). a et b sont deux nombres réels tels que : $a < b$.
On note f' et f'' les dérivées première et seconde respectives de f.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1.	Si $f''(x_0) \neq 0$, alors (C) admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0.
2.	Si f est négative sur l'intervalle $[a ; b]$, alors l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $-\int_a^b f(t)dt$.
3.	Si $\forall x \in [a ; b]$, $\lvert f'(x)\rvert \leq m$, alors $\lvert f(a) - f(b)\rvert \leq m(a - b)$, ($m \in \mathbb{R}$)
4.	Les solutions de l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ($A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$).

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Énoncés	Informations	
1.	Soient $(X ; Y)$ une série statistique double et $\mathrm{Cov}(X ; Y)$ sa covariance. On note respectivement $V(X)$ et $V(Y)$ les variances de X et Y. On admet que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$. On appelle coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double $(X ; Y)$, le nombre réel noté r tel que …	A	$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.
		B	$r = -\frac{Cov(X,Y)}{V(X)V(Y)}$.
		C	$r = -\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.
		D	$r = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)V(Y)}$.

2.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto cosx - xsinx$ est la fonction …	A	$x \longmapsto cosx - sinx.$
		B	$x \longmapsto xcosx.$
		C	$x \longmapsto sinx - cosx.$
		D	$x \longmapsto -xcosx.$
3.	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 2, alors la somme des n premiers termes consécutifs de cette suite est égale à …	A	$(n+1)(n+3)$.
		B	$n(n+2)$.
		C	$\frac{(n+1)(n+3)}{2}$.
		D	$\frac{(n+2)(n+3)}{2}$.
4.	L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R},\ \ln(1-x) < 2$ est …	A	$]1\,;e^2-1[$.
		B	$]-\infty\,;1-e^2[$.
		C	$]1-e^2\,;1[$.
		D	$]e^2-1\,;+\infty[$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Un sondage effectué auprès d'anciens élèves d'un lycée révèle que :

- 55% d'entre eux poursuivent uniquement leurs études dans une université ;
- 10% poursuivent uniquement leurs études dans une grande école ;
- les autres sont sur le marché du travail.

Ce sondage révèle aussi que certains de ces anciens élèves ont fait le choix de vivre en colocation. Il s'agit de :

- 45% des anciens élèves qui poursuivent leurs études dans une université ;
- 30% des anciens élèves qui poursuivent leurs études dans une grande école ;
- 15% des anciens élèves qui sont sur le marché du travail.

On interroge au hasard un ancien élève du lycée.
On considère les évènements suivants :
U : « L'ancien élève poursuit ses études dans une université » ;
G : « L'ancien élève poursuit ses études dans une grande école » ;
T : « L'ancien élève est sur le marché du travail » ;
C : « L'ancien élève vit en colocation ».

1. Construis un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calcule la probabilité pour que l'ancien élève poursuive ses études dans une université et ait choisi de vivre en colocation.
3. Justifie que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,33.
4. Un ancien élève vit en colocation.
Calcule la probabilité qu'il poursuive ses études dans une université.

EXERCICE 4 **(3 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On désigne par Ω, A et B les points d'affixes respectives z_Ω, z_A et z_B telles que : $z_\Omega = 1 + i$, $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

1. On note S la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.

a) Justifie que : $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Déduis de 1.*a*) que S a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.

c) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$.

2. *a*) Justifie que l'affixe du point K, image du point J par la similitude directe S est : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) Démontre que les points O, K et Ω sont alignés.

EXERCICE 5 **(5 points)**

Soit f la fonction numérique définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est : 2 cm.

1. *a*) Détermine la limite de f en $+\infty$.

b) On admet que f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Justifie que : $\forall x \in [0 ; +\infty[, f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

c) Démontre que f est strictement croissante sur $]0 ; 1[$ et strictement décroissante sur $]1 ; +\infty[$.

d) Dresse le tableau de variation de f.

e) Construis (C) dans le repère (O, I, J).

2. Démontre que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution α dans $]0 ; 1[$.

3. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$.

a) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

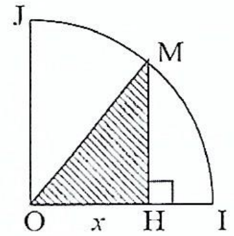
b) Démontre que la suite (u_n) est décroissante.

c) Justifie que la suite (u_n) est convergente.

d) Détermine la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 6 **(5 points)**

Une coopérative agricole possède un terrain qui a la forme d'un quart de disque de rayon 1 km représenté par la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles. Elle veut partager son terrain en trois parcelles pour y cultiver respectivement des tomates, des aubergines et des patates.
La parcelle hachurée est réservée à la culture des tomates. La coopérative souhaite que l'aire de cette parcelle soit maximale.



L'agent de l'agriculture chargé de la mise en valeur de ces trois parcelles informe la coopérative que l'aire de la partie réservée à la culture des tomates est égale à $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$, où $x = OH$ et $x \in [0 ;1]$.
Le gérant de la coopérative ne sachant comment déterminer l'aire maximale, te sollicite.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du gérant de la coopérative.

BACCALAURÉAT
SESSION 2022

Durée : 4 H
Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3, 3 sur 3 et une feuille annexe à rendre avec la copie. Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

On donne les groupes de mots (la droite de régression, des primitives, une bijection, fonction dérivable, extremum relatif) et les phrases incomplètes dans le tableau ci-dessous :

N°	Phrases incomplètes
1.	Toute fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle K définit ………… de K sur f(K).
2.	Soit (X, Y) une série statistique double ayant une forte corrélation entre X et Y et telle que $V(X) \neq 0$. Une équation de ……………… de Y en X est $y = ax + b$ où $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ étant les moyennes respectives de X et Y.
3.	Toute fonction continue sur un intervalle I admet ……………………… sur I.
4.	Toute ……………… en un point a est continue en a.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que la phrase soit vraie.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	A	B	C
1.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto e^{-2x+5}$ est …	$x \mapsto -2e^{-2x+5}$.	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x+5}$.	$x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+5}$.
2.	Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont de la forme …	$x \mapsto ke^{2x}+k'e^{-2x}$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.	$x \mapsto kcos(2x) + k'\sin(2x)$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.	$x \mapsto ke^{4x}+k'e^{-4x}$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
3.	$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$ est égale à …	$-\infty$.	$+\infty$.	0.
4.	La forme exponentielle du nombre complexe $-1 + i$ est …	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$.	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.	$\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
A, B, C, D et I sont les points du plan complexe d'affixes respectives : $-\sqrt{2}$; $1+i$; $1-i$; $3+i$ et 1.

1. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Soit S la similitude directe du plan d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 1 - 3i$.
a) Justifie que : S(D) = D et S(B) = C.
b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
c) Détermine l'image (C') du cercle (C) de diamètre [BD] par S.

EXERCICE 4 **(4 points)**

On donne la fonction numérique *f* définie sur [0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{5x+2}{4x+7}$.
(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Sur la feuille annexe à rendre avec la copie, construis à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$, les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

2. On admet que la fonction *f* est dérivable et strictement croissante sur]0 ; +∞[.
a) Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$.
b) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$.
c) Déduis de 2.*a*) et 2.*b*) que la suite (u_n) est décroissante.

3. *a*) Déduis de 2.*a*) et 2.*c*) que la suite (u_n) est convergente.
b) Justifie que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 5 **(4 points)**

Soit *f* la fonction numérique définie sur [0 ; +∞[par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - 2x, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1. *a*) Justifie que *f* est continue en 0.
b) Justifie que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.
c) Interprète graphiquement le résultat de 1. *b*).

2. On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
Interprète graphiquement ces résultats.

3. *a*) On suppose que *f* est dérivable sur]0 ; +∞[.
Justifie que : $\forall\, x \in\ ]0 ; +\infty[,\ f'(x) = -1 + \ln x$.
b) Étudie les variations de *f*.
c) Dresse le tableau de variation de *f*.

4. Trace la courbe (C_f).
(Tu pourras tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur du papier millimétré).

5. *a*) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que l'intégrale K telle que
K = $\int_1^2 x\ln x dx$ est égale à $2\ln 2 - \frac{3}{4}$.
b) On admet que, sur [1 ; 2], (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses (OI).
Calcule l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

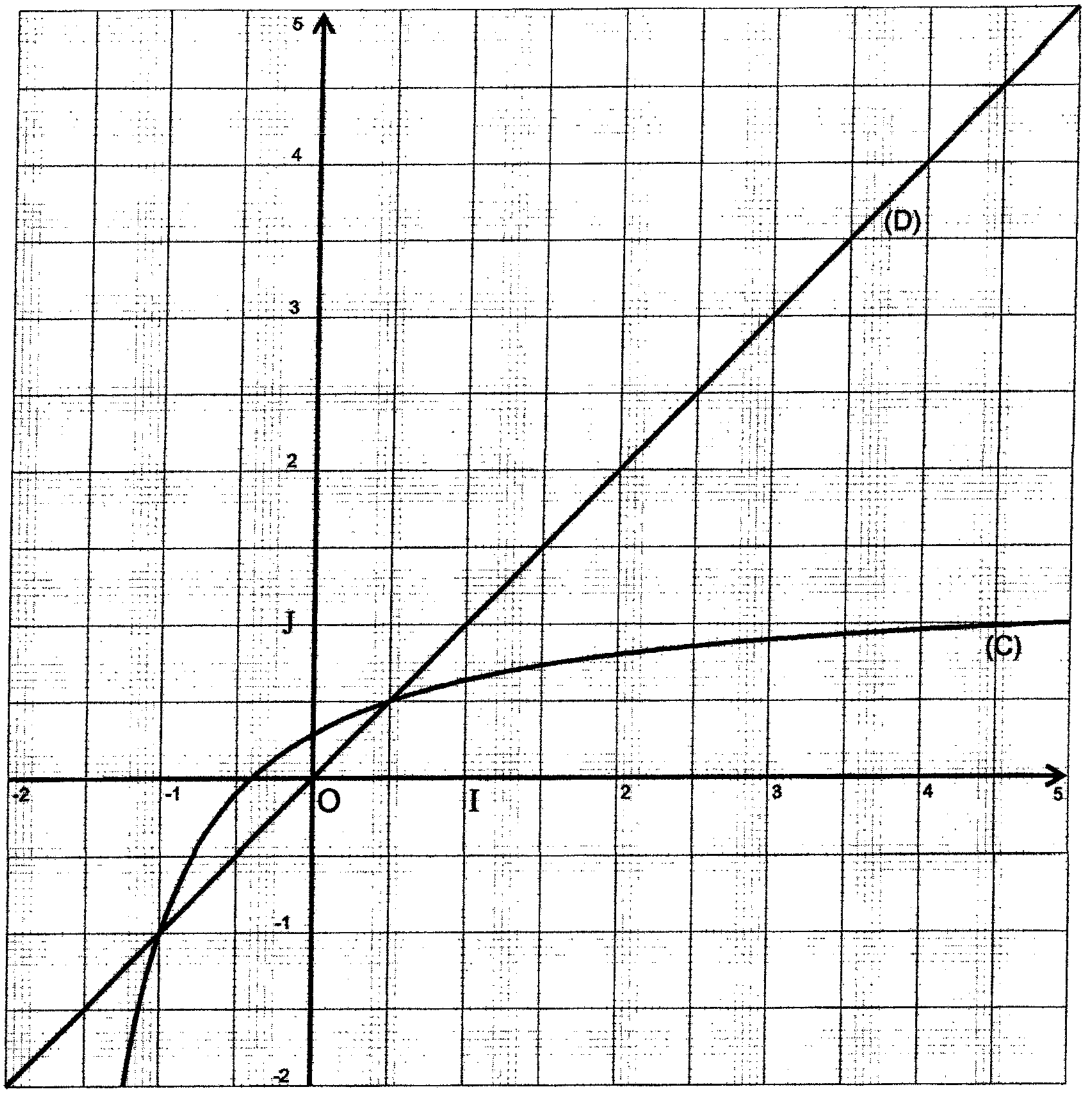
EXERCICE 6 **(5 points)**

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton lycée, le comité d'organisation a initié un jeu d'adresse.
Le jeu comprend quatre épreuves.
Le joueur reçoit 4 boules après une mise de 100 F CFA.
Une épreuve consiste à lancer une boule dans un trou situé à 10 m.
Le jeu est terminé lorsque le joueur a lancé les quatre boules.
On suppose que les 4 lancers sont indépendants.
À chaque épreuve :

- si le joueur réussit à loger la boule dans le trou, le comité d'organisation lui remet 2 tickets.
- s'il ne réussit pas à loger la boule dans le trou, il ne gagne aucun ticket.

On admet que le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou.
Le comité d'organisation récompense à hauteur de 2 500 F CFA le joueur qui possède à la fin du jeu au moins 4 tickets.
Un élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2 500 F CFA.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'affirmation de cet élève est justifiée ou non.

Annexe à rendre avec la copie.



*R. C. I. – MENET-FP * Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - MENET-FP*

BACCALAURÉAT
SESSION 2020

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Une entreprise achète, utilise et revend des machines à coudre après un certain nombre d'années. Le tableau suivant donne l'évolution du prix Y de vente d'une machine en fonction du nombre d'années X d'utilisation.

Nombre x_i d'années	1	2	3	4	5	6
Prix y_i (en milliers de francs CFA)	150	125	90	75	50	45

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour une année ; en ordonnée, 1 cm pour 20 000 F.

1. Représente le nuage de points associés à la série statistique (X, Y).

2. *a*) Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
b) On note V(X) la variance de X et Cov(X, Y) la covariance de (X, Y).
Démontre que : $V(X) = \frac{35}{12}$ et $Cov(X, Y) = -\frac{255}{4}$.

3. On admet que la variance V(Y) de Y est égale à 1445.
a) Justifie que le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X, Y) est $\frac{-3\sqrt{21}}{14}$.
b) Justifie qu'il existe une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y.

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X.
Démontre, par la méthode des moindres carrés, qu'une équation de (D) est : $y = -\frac{153}{7}x + \frac{497}{3}$.

5. Détermine le prix de vente d'une machine à coudre à la fin de la 7^e année.
On arrondira le résultat au multiple le plus proche de 5.

EXERCICE 2

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.

   a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).
   b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)[z^2 + (1+3i)z - 4]$.
   c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.
   d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
   On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i$; $1-i$; $2i$ et $-2-2i$.
   a) Place les points A, B, C et D sur votre feuille de copie.
   b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

3. Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$.
   b) Démontre que S(B) = C.
   c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - e^{-x}$.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Démontre que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresse son tableau de variation.

3. *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On la note α.
   b) Justifie que : $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

4. Justifie que : $\forall x \in]-\infty, \alpha[$, $g(x) < 0$;
   $\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)(2e^x - 1)$.
On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x + 2(x-1)e^x$.
   c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
   d) Étudie la position relative de (C_f) et (D).

3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x g(x)$.

b) Étudie le sens de variation de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4. *a*) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

b) Déduis-en les coordonnées des points d'intersection A et B de (C_f) et de l'axe des abscisses. On choisira : $x_A < x_B$ (x_A et x_B étant les abscisses respectives de A et B).

5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

6. Trace les droites (D) et (T), puis construis (C_f).
On prendra : $\alpha = 0{,}35$ et $f(\alpha) = -1{,}2$.

7. À l'aide d'une intégration par parties, calcule l'aire en cm², de la partie du plan délimitée par (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

BACCALAURÉAT
SESSION 2019

Coefficient : 4
Durée : 4h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

En vue de sélectionner des joueurs pour un tournoi international de football, une fédération nationale met à la disposition de l'entraîneur un certain nombre de joueurs évoluant au pays et hors du pays. Parmi eux, il y a des joueurs professionnels et des joueurs non professionnels.
Ces joueurs se répartissent comme suit :

- 75% des joueurs évoluent au pays ;
- 60% des joueurs évoluant au pays sont professionnels ;
- 80% des joueurs évoluant hors du pays sont professionnels.

On choisit au hasard un joueur pour subir un test antidopage.
On désigne par A l'évènement « Le joueur choisi évolue au pays ».
On désigne par B l'évènement « Le joueur choisi est professionnel ».
On désigne par C l'évènement « Le joueur choisi évolue au pays et est professionnel ».

1. *a*) Traduis l'énoncé par un arbre de probabilité.
   b) Donne $P_A(B)$, la probabilité de B sachant A.
   c) Démontre que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,45.
2. Calcule la probabilité de B.

Partie B

Un entraîneur doit sélectionner des joueurs parmi ceux mis à sa disposition. Pour ce faire, il soumet d'abord chaque joueur à un test qui consiste à faire trois tirs au but successifs à partir du point de penalty. Est retenu à l'issue de ce premier test, tout joueur qui réussit au moins deux de ses trois tirs. On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir est égale à $\frac{3}{4}$.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par un joueur donné à l'issue de l'épreuve de trois tirs au but successifs.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
2. Calcule l'espérance mathématique de X.
3. Démontre que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égale à $\frac{27}{32}$.

EXERCICE 2

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles a acheté 5 000 tonnes de noix de cajou aux paysans en 2011. La société décide d'augmenter de 5% ses achats chaque année par rapport à l'année précédente.
On note, pour tout entier naturel n, Q_n la quantité en tonnes de noix de cajou achetée en l'an $(2011 + n)$.
On a : $Q_0 = 5\,000$.

1. Justifie que la quantité de noix de cajou achetée en 2012 est de 5 250 tonnes.

2. Démontre que (Q_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

3. *a)* Justifie que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $Q_n = 5\,000 \times (1{,}05)^n$.
b) Détermine la quantité de noix de cajou qu'achètera cette société en 2020.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

4. *a)* Détermine l'année où la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10 000 tonnes.
b) Détermine la quantité totale de noix de cajou achetée par cette société de 2011 à fin 2020.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x-1} - \ln(x-1)$.
On note $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. *a)* Calcule la limite de g à droite en 1.
b) Interprète le résultat obtenu.

2. *a)* Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.
c) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que g est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
a) Justifie que : $\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{-x}{(x-1)^2}$
b) Déduis de ce qui précède le signe de $g'(x)$.
c) Dresse le tableau de variation de g.

4. *a)* Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
On note α cette solution.
b) Vérifie que : $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$.

5. Démontre que :
$\forall\, x \in]1\,;\alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]1\ ;+\infty[$ par : $f(x) = 4e^{-x}\ln(x-1)$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. *a*) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$.

   b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

3. On suppose que f est dérivable sur $]1\ ;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Justifie que : $\forall\, x \in]1\ ;+\infty[,\ f'(x) = 4e^{-x}g(x)$.
   b) Déduis de la question précédente et de la question 5 de la partie A, les variations de f.
   c) Dresse le tableau de variation de f.

4. Construis les courbes $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C})$ dans le même repère (O, I, J).
   On prendra : $\alpha = 2{,}75$ et $f(\alpha) = 0{,}14$.

Partie C

1. Justifie que : $\ln(\alpha - 1) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, en utilisant la question 4-*a*) de la partie A.

2. On pose : $U = \displaystyle\int_2^{\alpha} \frac{1}{x-1}\,dx$ et $V = \displaystyle\int_2^{\alpha} \ln(x-1)\,dx$.

   a) Calcule U.
   b) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $V = 3 - \alpha$.

3. On désigne par A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_g)$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = 2$ et $x = \alpha$.

   a) Justifie que : $U - V = \dfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha - 1}$.

   b) Déduis-en l'aire A.

*R. C. I. - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours*

BACCALAURÉAT
SESSION 2018

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est : 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4i$; 2 et $1 + i\sqrt{3}$.

1. *a*) Écris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
b) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère (O, I, J).

2. Soit $\mathscr{S}$ la similitude directe de centre O qui transforme B en C.
a) Justifie que l'expression complexe de $\mathscr{S}$ est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.
b) Justifie que $\mathscr{S}$ est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.

3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$.
a) Détermine et construis (E).
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par $\mathscr{S}$.

4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$.
a) Détermine et construis (F).
b) Justifie que le point O et le point K milieu du segment [BC] appartiennent à (F).
c) Justifie que l'image de (F) par $\mathscr{S}$ est la droite (OJ).

EXERCICE 2

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1 000).
L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f. Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000\,;+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1): \quad y'(t)+\frac{1}{200}y(t)=-\frac{200}{t^2}+\frac{1}{t}.$$

1. Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000\,;+\infty[$ par : $h(t)=\frac{200}{t}$.
Vérifie que h est une solution de (E_1).

2. Résous l'équation différentielle
$(E_2): \ y'(t)+\frac{1}{200}y(t)=0.$

3. *a*) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g-h$ est solution de (E_2).
b) Déduis-en les solutions de (E_1).
c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que :

$$\forall\, t \in [2000\,;+\infty[,\ \ f(t)=999{,}9\,e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)}+\frac{200}{t}.$$

d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle$]0\,;+\infty[$ par :
$g(x)=2+x-3x\ln(x)$.

1. Calcule la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.

2. *a*) On désigne par g', la fonction dérivée de g.
Calcule $g'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
b) Étudie les variations de g.
c) Vérifie que : $g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)=2+3e^{-\frac{2}{3}}$.
Dresse le tableau de variation de g.

3. *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[e^{-\frac{2}{3}}\,;+\infty[$, une solution unique notée α.

b) Justifie que : $1{,}9<\alpha<2$.

4. Démontre que : $\forall\, x \in]0\,;\alpha[,\ g(x)>0$ et $\forall\, x\in]\alpha\,;+\infty[,\ g(x)<0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{20\ln(x)}{(x+2)^3}$.

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 5 cm.

1. *a)* Calcule la limite de f en 0.
Interprète graphiquement le résultat.
b) Justifie que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.
Interprète graphiquement le résultat.

2. On note f' la fonction dérivée de f.
a) Démontre que :

$$\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}.$$

b) Déduis-en les variations de f.
c) Dresse le tableau de variation de f. *On ne calculera pas $f(\alpha)$.*

3. Justifie qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y = \dfrac{20}{27}x - \dfrac{20}{27}$.

4. Trace (T) et $(\mathscr{C})$. On prendra $\alpha = 1{,}95$ et $f(\alpha) = 0{,}22$.

Partie C

On pose : $\mathrm{U} = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}\,dx$ et $\mathrm{V} = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x+2)^3}\,dx$.

1. On admet que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ \dfrac{1}{x(x+2)^2} = \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4(x+2)} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$

Déduis-en que : $\mathrm{U} = \dfrac{\ln 3}{4} - \dfrac{\ln 2}{4} - \dfrac{1}{24}$

2. *a)* À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\mathrm{V} = -\dfrac{\ln 2}{32} + \dfrac{1}{2}\mathrm{U}$.

b) Calcule en cm² l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.

Pays : Côte d'Ivoire	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : Bac, Série D	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 4

EXERCICE 1

Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent à visité huit (8) exploitations. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16 ha d'hévéa. Pour cela, l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci –dessous.

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée y (en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1. Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double (X,Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1cm pour une superficie de 1 ha.

Pour les questions 2) ,3) ,4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

2. Justifie que le point moyen à pour couple de coordonnées (5,63 ; 7,75).

3. On note V(X) la variance de X, V(Y) la variance de Y et Cov(X,Y) la covariance de X et Y.

Justifie que : V(X) = 4,18 ; V(Y) = 8,44 et Cov(X,Y) = 5,37.

4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire ***r*** de la série (X,Y).

b) Interprète le résultat obtenu précédemment.

5. a) Justifie qu'une équation de la droite ($\mathcal{D}$) d'ajustement de Y en X, par la méthode des moindres carrées, est : $y = 1{,}28x + 0{,}54$.

b) Trace ($\mathcal{D}$) sur le graphique précédent.

6. Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant.

On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

L'unité graphique est 2 cm.

1. Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$.

2. On pose : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$.

a) Justifie que : P(-2i) = 0.

b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$.

c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0$.

3. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i$; $-2+2i$ et $1+i$.

On note D le symétrique de A par rapport au point O.

a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

2. a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

b) Justifie que :

* $\forall\, x \in]-\infty\,;\ 1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}\,; +\infty[, f'(x) > 0$;

*$\forall\, x \in]1-\sqrt{2}\ ;\ 1+\sqrt{2}[, f'(x) < 0$.

c) Dresse le tableau de variation de f.

On ne calculera pas $f(1-\sqrt{2})$ et $f(1+\sqrt{2})$.

4. Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) point d'abscisse 0 est : $y = -x + 1$.

5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1+x)e^{-x} - 1$.

On suppose que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note h' sa fonction dérivée.

a) Calcule $h'(x)$.

b) Étudie les variations de h.

c) Calcule $h(0)$ et dresse le tableau de variation de h.

On ne demande pas de calculer les limites de h.

d) Justifie que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) \leq 0$.

e) Vérifie que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) + x - 1 = (1-x)h(x)$.

f) Déduis des questions précédentes la position relative de (C) et (T).

6. Trace la tangente (T) et la courbe (C).

On prendra : $f\left(1-\sqrt{2}\right) = 1{,}3$ et $f\left(1+\sqrt{2}\right) = -0{,}4$.

Partie B

Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

1. Démontre, en utilisant deux intégrations par parties, que : $A(\lambda) = (\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^{\lambda}})$ cm².

2. Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

EXERCICE 1

1- On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $h(x) = 2x - x^2$.

a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

b) En déduire que l'image de l'intervalle [0 ; 1] par h est l'intervalle [0 ; 1].

2- Soit u la suite définie par :

$u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

b) Démontrer que la suite u est croissante.

c) Justifier que la suite u est convergente.

3- On considère la suite v définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1 - u_n)$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite v.

d) En déduire la limite de la suite u.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, (unité graphique : 2 cm).
On considère la transformation $\mathscr{S}$ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1- *a)* Soit Ω le point d'affixe 2.

Vérifier que : $\mathscr{S}(\Omega) = \Omega$.

b) Justifier que $\mathscr{S}$ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2- *a)* Démontrer que : $\forall\, z \neq 2$, $\frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) En déduire que le triangle MΩM'est rectangle en M.

c) Donner un programme de construction de l'image M' par $\mathscr{S}$ d'un point M donné.

3- *a)* Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$ dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Construire les images respectives A' et B' de A et B par $\mathscr{S}$.

b) On note z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AA'BB'.

PROBLÈME

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur ℝ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- *a)* Soit g' la fonction dérivée de g.
Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$.
b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
c) Justifier que : $g(\frac{3}{2}) = -2$.
d) Dresser le tableau de variations de g.

3- *a)* Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans ℝ une solution unique notée α.
b) Vérifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.
c) Justifier que : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), (unité graphique : 2 cm).
On considère la fonction f dérivable et définie sur ℝ par : $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}$.
On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f.

1- *a)* Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) En déduire que ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

2- *a)* Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Démontrer que la droite ($\mathscr{D}$) d'équation $y = -x$ est asymptote à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.
c) Étudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à ($\mathscr{D}$).

3- *a)* Soit f' la fonction dérivée de f.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
b) En déduire les variations de f.
c) Dresser le tableau de variations de f. On ne calculera pas $f(\alpha)$.

4- Construire ($\mathscr{D}$) et ($\mathscr{C}$) sur le même graphique.
On précisera les points de ($\mathscr{C}$) d'abscisses 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 4.
On prendra : $\alpha = 0{,}865$ et $f(\alpha) = 0{,}4$.

5- Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite ($\mathscr{D}$) et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.
On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}\,dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$.
b) En déduire $\mathscr{A}(t)$.
c) Calculer $\lim_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t)$.

Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2015	**Session :** normale
Série : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

Exercice 1

Partie I

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}$, P(z) = $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$.

1. *a*) Calculer P(i).

b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : P(z) = $(z - i)(z^2 + az + b)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : P(z) = 0.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité 5 cm.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. *a)* Calculer z_1 et z_2.

b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2. On considère la suite U définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.

b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$.)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

a) Calculer l_n.

b) En déduire la limite de l_n.

Exercice 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4 ;

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

b) Démontrer que la probabilité p(B) de l'évènement B est 0,58.

c) Mariam réalise un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.
On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.
2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.
a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0{,}42)^n$.
b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$.

Problème

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

1. Démontrer que g est solution de l'équation (E).
2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.
a) Démontrer qu'une fonction ¨ est solution de (E) si et seulement si ¨ − g est solution de (F).
b) Résoudre l'équation différentielle (F).
c) En déduire la solution ¨ de (E) qui vérifie ¨(0) = $-\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$.

On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques OI = 2 cm et OJ = 4 cm.
1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
b) Démontrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3. *a*) soit f' la fonction dérivée de f.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$.
b) Étudier les variations de f.
c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0 est :
$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.
5. Étudier les positions relatives de ($\mathscr{C}$) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et ($\mathscr{C}$).

Partie C

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

2. *a*) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**).

b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f\left(x\right) = -f'\left(x\right) + xe^{-x}$.

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite(OI) et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2014	**Session :** normale
Série : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On note B et C les points du plan d'affixes respectives $3 - 2i$ et $5 + i$.
On désigne par S la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

1. *a*) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
c) Déterminer l'affixe du point D qui a pour image le point C par S.

2. *a*) Justifier que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par S est $\frac{1}{2}(1-5i)$.

b) Justifier que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

3. On définit les points suivants : $\text{B}_0 = \text{B}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{B}_{n+1} = S(\text{B}_n)$.
On note z_n l'affixe du point B_n.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$.

b) Calculer la distance OB_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \text{OB}_n$.

Exercice 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le ministère du plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003.
Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1cm)
On prendra pour origine le point $\Omega(0\,;24)$.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (X, Y).
3. Justifier que :

a) La variance de X est $\frac{20}{3}$.

b) La covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$.

4. *a*) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.
b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5. Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.
a) Déterminer une équation de (D).
b) Tracer (D).
6. On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes.
Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont des nombres réels.
Dans le plan muni du repère (O, I, J), on désigne par :
$(\mathscr{C})$ la courbe représentative de g ; (D) la droite d'équation $y = x$.
1. *a*) On donne: $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b.
b) On admet que la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D).
Déterminer la valeur de a.
2. Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{x} - x$.
a) Soit h' la dérivée de h.
Calculer $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$.
b) Dresser le tableau de variation de h.
On ne calculera pas les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$.
1. *a*) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.
c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.
2. *a*) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que (D) est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
c) Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (D).
3. *a*) On désigne par f' la fonction dérivée de f.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x} h(x)$.
b) Déterminer le sens de variations de f.
c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Construire sur le même graphique (T), $(\mathscr{C})$ et (D).
5. *a*) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $(f^{-1})'(1)$.
c) Construire (Γ), la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que $(\mathscr{C})$.

Partie C

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t}dt.$

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = (-2-n)e^{-n} + e.$

2. Calculer l'aire $\mathscr{A}_n$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathscr{A}_n$.

BACCALAURÉAT
SESSION 2025

Durée : 4 h
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 **(2 points)**

Écris le numéro de chacune des propositions ci-dessous suivi de V si la proposition est vraie ou de F si elle est fausse.

1. A, B et C sont trois points distincts du plan et k un nombre réel.
La ligne de niveau k de l'application $M \longmapsto 2MA^2 - 4MB^2 + 2MC^2$ est un cercle.

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x}$ est égal à $\frac{2}{3}$.

3. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}\cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
L'équation $x = y^2$ est l'équation réduite d'une parabole.

5. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
A est un point d'affixe z_A et r un nombre réel strictement positif.
L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - z_A| = r$ est une droite.

6. L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Le vecteur $\vec{n}(2\ ;\ 4\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (P) d'équation : $2x + 4y + z - 7 = 0$.

EXERCICE 2 **(2 points)**

Écris le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de l'une des lettres A, B, C ou D qui permet d'obtenir la proposition vraie.

1. Si h est une fonction continue et paire sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$, alors $\int_{-3}^{3} h(t)dt$ est égale à :

A. 0 ; **B.** $-2\int_{3}^{0} h(t)dt$; **C.** $\frac{1}{2}\int_{0}^{3} h(t)dt$; **D.** $2\int_{3}^{0} h(t)dt$.

2. Un argument du nombre complexe $(1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{3}}$ est :

A. $-\frac{\pi}{3}$; **B.** $\frac{\pi}{6}$; **C.** $-\frac{2\pi}{3}$; **D.** $-\frac{2\pi}{3}$.

3. L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 cosx\, dx$ est égale à :
A. 2 ; **B.** 0 ; **C.** -1 ; **D.** 1.

4. Soit E et F deux évènements d'un univers Ω tels que : $P(E) = 0{,}1$ et $P(F) = 0{,}05$.
Si $P_E(F) = 0{,}2$, alors $P_F(E)$ est égale à :
A. $0{,}4$; **B.** $0{,}04$; **C.** $0{,}25$; **D.** $0{,}2$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

ABCΩ est un losange de sens direct tel que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}}) = \frac{\pi}{3}$.

1. Fais une figure que tu complèteras au fur et à mesure.

2. On considère la rotation r de centre Ω qui transforme A en C.
Construis le point D, image du point B par r.

3. Pour tout point M du segment [AB], on note N le point du segment [CD] tel que :
AM = CN. On admet que le triangle ΩMN est équilatéral et on note G son centre de gravité.
Soit S la similitude directe de centre Ω telle que : $S(M) = G$.
a) Place un point M et construis les points N et G correspondants.
b) Justifie que l'angle de la similitude S est $\frac{\pi}{6}$.
c) Détermine le rapport de S.

4. On admet que : $S(B) = C$.
On pose : $K = S(A)$.
a) Démontre que les points C, G et K sont alignés.
b) Construis le point K.

EXERCICE 4 **(4 points)**

Une urne U_1 contient deux boules indiscernables au toucher. Sur l'une est inscrit le nombre 1 et sur l'autre un nombre entier relatif a.
Une urne U_2 contient trois boules indiscernables au toucher. Sur l'une est inscrit un nombre entier relatif b et sur les deux autres le nombre -1.
On tire au hasard une boule de l'urne U_1 et une autre de l'urne U_2.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres inscrits sur les deux boules tirées.

1. *a*) Justifie que les valeurs prises par X sont : $a + b$; $a - 1$; $b + 1$ et 0.
b) Justifie que : $P(X = 0) = \frac{1}{3}$.
c) Détermine la loi de probabilité de X.

2. Démontre que l'espérance mathématique E(X) de X est : $E(X) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}$.

3. *a*) Justifie que l'équation E(X) = 0 admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
b) Détermine l'ensemble des couples (a, b) pour lesquels l'espérance mathématique de X est nulle sachant que : $-5 < b < a$.

EXERCICE 5 **(4 points)**

On considère la fonction numérique f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = x(\ln x)^2 + x$, $si\ x > 0$ et $f(0) = 0$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Justifie que f est continue en 0.

2. *a*) Justifie que f n'est pas dérivable en 0.
b) Donne une interprétation graphique du résultat de la question 2.*a*).

3. On admet que f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

a) Démontre que : $\forall\, x \in\ ]0\ ;+\infty[,\ f'(x) = (1 + \ln x)^2$.

b) Déduis-en le sens de variation de f.

c) Dresse le tableau de variation de f(On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$)

4. Démontre que $(\mathscr{C})$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse est $\frac{1}{e}$.

5. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

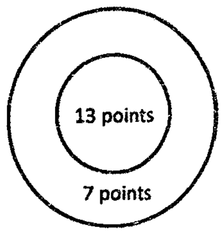
a) Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e} \leq u_n \leq 1$.

b) Démontre que la suite (u_n) est croissante.

c) Déduis des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

d) Détermine la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 6 **(5 points)**



Dans le cadre de ses activités de fin d'année, la promotion Terminale d'un lycée organise une Kermesse. Pendant les festivités, il est proposé à l'un des stands un jeu qui consiste à lancer des fléchettes sur une cible représentée par la figure ci-contre.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- le nombre de fléchettes n'est pas limité et elles atteignent toutes leurs cibles ;
- si la fléchette atteint le disque central, le joueur obtient 13 points ;
- si la fléchette atteint la couronne, le joueur obtient 7 points ;
- si le joueur obtient 1 000 points, il gagne 25 000 F CFA ;
- chaque combinaison ayant permis d'obtenir les 1 000 points est payée une seule fois et est affichée à l'attention des autres joueurs.

En vue de payer les éventuels gagnants, les organisateurs souhaitent connaitre le budget à allouer à ce jeu. Étant élève de Terminale C, ils te sollicitent.

À l'aide d'une production argumentée et cohérente, réponds à leur préoccupation.

BACCALAURÉAT
SESSION 2024

Durée : 4 H
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré

EXERCICE 1 **(2 points)**

Écris le numéro de chacune des propositions ci-dessous suivi de V si la proposition est vraie ou de F si elle est fausse.

1. Soit (Δ) une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On note $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. Si $\vec{u}$ est normal à (Δ), alors la composée $S_{(\Delta)} \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissée.

2. Soit (X, Y) une série statistique à deux variables. Une équation de la droite de régression de X en Y par la méthode des moindres carrés est :

$$x = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}(y - \overline{Y}) + \overline{X}.$$

3. Toute similitude directe du plan de rapport 1 est une isométrie du plan.

4. La suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est divergente.

EXERCICE 2 **(2 points)**

Écris le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de l'une des lettres A, B, C ou D qui permet d'obtenir la proposition vraie.

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions :
A. $x \mapsto 2x + k, k \in \mathbb{R}$; **B.** $x \mapsto ke^{2x}, k \in \mathbb{R}$;
C. $x \mapsto ke^{-2x}, k \in \mathbb{R}$; **D.** $x \mapsto k(e^{2x} + e^{-2x}), k \in \mathbb{R}$.

2. L'ensemble de définition de la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(\ln(-x))$ est :
A. $]-\infty\,;\,-1$; **B.** $]-\infty\,;\,0[$; **C.** $]-1\,;\,0[$; **D.** $]1\,;\,+\infty[$.

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{e_1}, \vec{e_2})$, les coordonnées du foyer de la parabole d'équation $y^2 - 2y + 4x + 5 = 0$ sont :
A. $(-2\,;1)$; **B.** $(2\,;-1)$; **C.** $(-1\,;\,0)$; **D.** $(-2\,;\,-1)$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k})$.
Si un plan (P) a pour équation cartésienne $y = x - 1$ et une droite (Δ) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, alors le plan (P) et la droite (Δ) sont :

A. orthogonaux ; ; **B.** parallèles ;

C. sécants au point $E\left(2\,;1\,;-\frac{1}{2}\right)$; **D.** sécants au point $F\left(2\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

EXERCICE 3 (3 points)

Un grossiste achète des pagnes basin chez deux fournisseurs A et B. Il achète 80% de sa provision chez le fournisseur A et le reste chez le fournisseur B. On sait que 10% des pagnes basin provenant du fournisseur A présentent des défauts. Par ailleurs, 11% des pagnes basin du stock total du grossiste présentent des défauts.
On prélève au hasard un pagne basin du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :
A : « le pagne basin provient du fournisseur A » ;
B : « le pagne basin provient du fournisseur B » ;
D : « le pagne basin présente des défauts ».

1. Traduis la situation décrite par l'énoncé à l'aide d'un arbre de probabilité.
(*Tu le complèteras par la suite.*)

2. *a*) Calcule la probabilité pour que le pagne basin provienne du fournisseur A et présente des défauts.
b) Démontre que la probabilité de $B \cap D$ est égale à 0,03.
c) On prélève au hasard un pagne basin provenant du fournisseur B.
Détermine la probabilité pour qu'il présente des défauts.
d) Complète l'arbre de probabilité de la question 1.

3. Un gérant de magasin de vente de pagnes basin achète cent pagnes chez ce grossiste. On suppose que les pagnes basin sont choisis au hasard l'un après l'autre de façon indépendante. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de pagnes basin avec des défauts.
a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
b) Calcule l'espérance mathématique E(X) de X, puis interprète le résultat obtenu.

EXERCICE 4 (4 points)

1. *a*) Justifie que : $(4 - 2i)^2 = 12 - 16i$.
b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i = 0$.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P tel que : $P(z) = z^3 + (1 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i$.
a) Calcule $P(-3)$.
b) Justifie que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z + 3)[z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i]$.
c) Déduis-en les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0$.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique : 1 cm)
On considère les points A ; B et C d'affixes respectives -3 ; $-1 + 4i$ et $3 + 2i$.
a) Place les points A, B et C.
b) Justifie que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.
c) Soit D le point d'affixe $1 - 2i$.

Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

4. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tel que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -20$.
Soit G le barycentre des points pondérés (A, -1) ; (B, 1) et (C, 1).
a) Détermine l'affixe z_G du point G, puis place ce point.
b) Justifie que le point C appartient à (Γ).
c) Détermine et construis (Γ).

EXERCICE 5 **(4 points)**

Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞[par : $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

Partie I

1. *a*) Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b) Donne une interprétation graphique des résultats précédents.

2. *a*) Étudie la dérivabilité de f en 0.
b) Interprète graphiquement le résultat de la question 2. *a*).

3. On suppose que la fonction f est dérivable sur]0 ; +∞[.
a) Justifie que : $\forall\, x \in]0\,; +\infty[,\ f'(x) = \frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{2x}$.
b) Dresse le tableau de variation de f.

4. Construis la courbe ($\mathscr{C}$).

Partie II

Soit g et h deux fonctions définies sur [0 ; +∞[par : $g(x) = x^2$ et $h(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$.
On désigne par ψ la fonction dérivable sur [0 ; +∞[et définie par : $\psi(x) = (h \circ g)(x)$.

1. *a*) Calcule $\psi(0)$.
b) Justifie que : $\forall\, x \in [0\,; +\infty[,\ \psi'(x) = 2xe^x$.
c) Déduis des questions **1.** *a*) et **1.** *b*) que : $\forall\, x \in [0\,; +\infty[,\ \psi(x) = 2(x-1)e^x + 2$.

2. On pose : $M = \int_0^1 e^{\sqrt{t}}\, dt$.
a) Calcule $\psi(1)$ puis déduis-en la valeur de M.
b) Déduis de tout ce qui précède l'aire $\mathscr{A}$, en cm², de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation : $x = 1$.

EXERCICE 6 **(5 points)**

À l'occasion de ton anniversaire, ta maman t'a permis d'inviter dans un restaurant des élèves de ta classe. Les invités avaient la possibilité de choisir deux types de kits : un kit comprenant des frites de pomme de terre et un kit comprenant de l'alloco. Le kit contenant des frites coûte 4 500 F et celui contenant de l'alloco coûte 2 400 F.
À la fin de la cérémonie, tu donnes à ta maman une facture de 90 300 F. Par curiosité, elle te demande de déterminer le nombre de kits de chaque sorte choisie par les invités au cours de cette cérémonie.
Tu te souviens seulement que les invités ont choisi plus de 10 kits de chaque sorte.
En utilisant tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de ta maman.

BACCALAURÉAT
SESSION 2023

Durée : 4 h
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1.	Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si (P) est le plan d'équation cartésienne : $2x + 3y + 4z - 8 = 0$, alors un vecteur normal à (P) est : $\vec{n}(1; \frac{3}{2}; 2)$.
2.	Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, de demi distance focale $\sqrt{7}$ a pour foyers F et F' tels que : $F(\sqrt{7};\ 0)$ et $F'(-\sqrt{7}; 0)$.
3.	Une corrélation linéaire entre deux caractères X et Y d'une série statistique double est forte lorsque le coefficient de corrélation linéaire r est tel que : $r < 0{,}87$.
4.	Soient A et B deux points distincts du plan. La composée $r_{(A\,;\frac{\pi}{3})} o t_{\overrightarrow{AB}}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	Informations	
1.	La suite $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $u_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$ a pour limite …	A	$+\infty$.
		B	$-\infty$.
		C	0.
		D	$-\frac{2}{3}$.
2.	PQRS est un carré de centre O tel que le triplet (P, Q, R) soit de sens direct. I et J sont les milieux respectifs des segments [QR] et [RS]. La composée $r_{(O\,;\frac{\pi}{2})} o S_{(QR)}$ est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur…	A	$\overrightarrow{QS}$.
		B	$\overrightarrow{OQ}$.
		C	$\overrightarrow{SQ}$.
		D	$\overrightarrow{QO}$.

3	On admet que : $\forall x \in [0\,;\,1], \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. La fonction F définie sur $[0\,;\,1]$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$ est telle que …	A	$x - 1 \leq F(x) \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.
		B	$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \leq F(x) \leq x - 1$.
		C	$1 - x \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$.
		D	$\frac{1}{2} - \frac{x}{2} \leq F(x) \leq 1 - x$.
4	Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A, B et C d'affixes respectives : 2 ; $2 + 2i$ et $2i$. La similitude directe de centre A qui transforme B en C a pour angle et pour rapport …	A	$\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		B	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
		C	$-\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		D	$-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 3 (3 points)

Des scientifiques participent à un séminaire sur le thème : « Le réchauffement climatique et ses conséquences sur les économies des pays ».
Une enquête organisée par un organisme international a révélé que 75 % des scientifiques croient au réchauffement climatique et parmi ceux-ci, il y a des écologistes.
Selon cette enquête :
- la probabilité qu'un scientifique qui croit au réchauffement climatique soit un écologiste est 0,6 ;
- la probabilité qu'un scientifique qui ne croit pas au réchauffement climatique ne soit pas un écologiste est 0,08.

On choisit un scientifique au hasard ayant participé au séminaire.
On désigne par :
R l'évènement : « Le scientifique interrogé croit au réchauffement climatique » ;
E l'évènement : « Le scientifique interrogé est un écologiste ».

1. *a*) Traduis cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   b) Donne les probabilités suivantes : $P(R)$; $P_{\bar{R}}(\bar{E})$; $P_R(E)$.
2. *a*) Calcule : $P_R(\bar{E})$.
   b) Justifie que : $P(\bar{R} \cap E) = 0{,}23$.
3. *a*) Justifie que la probabilité qu'un scientifique interrogé soit un écologiste est 0,68.
   b) Un scientifique interrogé est un écologiste.
   Calcule la probabilité qu'il ne croit pas au réchauffement climatique.
   (*Tu donneras l'arrondi d'ordre 2 du résultat*).

EXERCICE 4 (4 points)

Soit m un nombre réel et f_m la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$.
On note D_m l'ensemble de définition de f_m et on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On désigne par (D) la droite d'équation : $y = x$.

1. Justifie que :
   a) Si $m \leq 0$, alors $D_m = \mathbb{R}$.
   b) Si $m > 0$, alors $D_m =]\ln(m)\,;\,+\infty[$.
2. On suppose que f_m est dérivable sur D_m pour tout nombre réel m.

a) Justifie que pour tout x de D_m, $f_m'(x) = \frac{e^x}{e^x - m}$

b) Justifie que pour $m \leq 0$, f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Justifie que pour $m > 0$, f_m est strictement croissante sur $]\ln(m)\,;\,+\infty[$.

3. *a)* Démontre que pour tout nombre réel m, f_m est une bijection sur D_m.
   b) Etablis que pour tout nombre réel m et pour tout nombre réel x élément de $f_m(D_m)$, on a :
   $f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)$.
   c) Déduis de la question précédente, une méthode de construction de (C_{-m}) dans le même repère que (C_m).
4. On suppose que m et p sont des nombres réels strictement positifs.
   a) Justifie que (C_p) est l'image de (C_1) par la translation T de vecteur $\vec{u}(\ln p\ ; \ln p)$.
   b) Détermine la translation T' qui transforme (C_p) en (C_m).

EXERCICE 5 **(4 points)**

On considère l'équation (E) : $4x - y = 2$ où les inconnues x et y appartiennent à $\mathbb{Z}$.

1. *a)* Démontre que si le couple (x_0, y_0) est une solution de (E), alors y_0 est pair.
   b) Détermine les valeurs possibles de PGCD(x_0, y_0).

2. *a)* Vérifie que le couple (1 ; 2) est une solution de (E).
   b) Résous l'équation (E).

3. Détermine l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E) tels que x et y sont premiers entre eux.

4. $\overline{ac2}^3$ et $\overline{baa}^4$ sont deux écritures du même entier naturel p respectivement en base 3 et en base 4.
   a) Justifie que $3c + 2$ est multiple de 4.
   b) Déduis-en que c est égal à 2.
   c) Détermine les valeurs de a et de b. (*Tu pourras utiliser 2.b*).
   d) Ecris p dans le système décimal.

EXERCICE 6 **(5 points)**

Une étudiante en histoire ancienne veut rédiger son mémoire de Master 2. Au cours de ses recherches, elle décide de déterminer l'âge d'un fragment d'os découvert par des archéologues.
L'information dont elle dispose est que le fragment découvert à une teneur en carbone 14 égale à 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse pris comme témoin.
Au cours de sa formation, elle a appris que :
- Si t est l'âge en années de l'os découvert, alors la quantité restante de carbone 14 dans le fragment d'os est $P(t)$ où P est une fonction de t.
- La dérivée P' de la fonction P est égale au produit de P par l'opposé de la constante radioactive de carbone 14, notée λ ($\lambda = 1{,}2444 \times 10^{-4}$).
- La quantité P_0 de carbone 14 d'un organisme vivant commence à diminuer à partir de la mort de cet organisme à l'instant t égal à zéro.

N'ayant pas suffisamment de connaissance pour exploiter ces données, elle te sollicite.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de l'étudiante.

BACCALAURÉAT
SESSION 2022

Durée : 4 H
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3 et 3 sur 3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1.	Toute isométrie du plan qui laisse invariant deux points distincts A et B est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
2.	Soient f une fonction dérivable sur un intervalle K, a et b deux éléments de K tels que : $a < b$. S'il existe un nombre réel M tel que, $\forall x \in [a\,;b], \lvert f'(x)\rvert \leq M,$ alors $-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
3.	Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'' = 3y$ est la fonction : $x \mapsto 2e^{3x} + 4e^{-3x}$.
4.	La dépendance linéaire entre deux caractères X et Y d'une série statistique à deux variables est forte si et seulement si le coefficient de corrélation linéaire r est tel que : $\lvert r\rvert \leq 0{,}4$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	Informations	
1.	Si E, F et G sont trois points distincts du plan, alors pour tout point M du plan, le vecteur $2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}$ est égal à …	A	$4\overrightarrow{MF}$.
		B	$-\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$.
		C	$5\overrightarrow{ME}$.
		D	$2\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$.
2.	Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la directrice de la parabole d'équation réduite $x^2 = 8y$ est la droite d'équation …	A	$y = -1$.
		B	$y = 2$.
		C	$y = -2$.
		D	$y = 1$.

3.	Arg $[(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^5]$ est égal à …	A	$\frac{7\pi}{12}$.
		B	$\frac{-5\pi}{12}$.
		C	$\frac{-7\pi}{12}$.
		D	$\frac{5\pi}{12}$.
4.	Soit OPN un triangle rectangle isocèle en O, de sens direct et I le milieu du segment [NP]. Si une similitude directe S de centre O applique I sur P, alors l'angle et le rapport de S sont respectivement …	A	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
		B	$-\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		C	$-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
		D	$\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A(0 ; 4 ; 1) , B(1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2), E(7 ; −1 ; 4) et le vecteur $\vec{u}(2 ;\ -1 ;\ 3)$.

1. Démontre que les points A, B et C déterminent un plan.

2. *a)* Démontre que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Justifie qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) Vérifie que le point E n'appartient pas au plan (ABC).

3. Soit (Δ) la droite passant par le point E et orthogonale au plan (ABC).
On pose : $\{K\} = (\Delta) \cap (ABC)$.

a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Justifie que le point K a pour coordonnées (3 ; 1 ; −2).

c) Calcule la distance EK.

EXERCICE 4 **(4 points)**

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure à l'arrêt, il prend le bus de ramassage gratuit mis à sa disposition par l'entreprise. S'il est en retard, il prend le bus de ville.
On suppose que l'employé n'est pas en retard le premier jour. A partir du deuxième jour :

- si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{5}$.
- s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : on appelle R_n, l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ».
On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$, l'évènement contraire de R_n.
On suppose que : $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{5}$. On a : $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$.
Dans tout ce qui suit, on prend $n \geq 2$.

1. *a)* Justifie que : $p(R_n \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20}p_n$ et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = \frac{1}{5}q_n$.

b) Détermine p_{n+1} en fonction de p_n et q_n .

c) Déduis-en que : $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.

2. On pose : $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a) Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b) Détermine son premier terme v_2.

3. *a)* Calcule la limite de la suite (v_n).

b) Déduis-en la limite de la suite (p_n).

EXERCICE 5 **(4 points)**

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1+n\ln(x)}{x^2}$.
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 3 cm.

1. *a*) Justifie que : $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$;

b) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

c) Donne une interprétation graphique des résultats des questions 1.a) et 1.b).

2. *a*) On admet que f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Justifie que $\forall\, x \in\,]0 ; +\infty[$, $f_n'(x) = \frac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}$.

b) Détermine les variations de f_n sur $]0 ; +\infty[$.

c) Vérifie que : $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2}{n}-1}$.

d) Dresse le tableau de variation de f_n.

3. *a*) Justifie que : $\forall\, x \in\,]0 ; +\infty[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

b) Déduis-en la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

4. Soit I l'intégrale telle que : $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $I = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Déduis-en l'aire en cm² de la partie du plan limitée par les courbe (C_n), (C_{n+1}) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 6 **(5 points)**

La salle du foyer des jeunes d'une commune est dans un état de dégradation avancée.
Le Maire, soucieux du bien-être de sa jeunesse, décide de la réhabiliter en commençant en priorité par le revêtement du sol qui est un rectangle de longueur 14,40 m et de largeur 8,70 m.
Pour ce faire, il instruit le chef du service technique de la Mairie qui prend attache avec un fournisseur en vue d'acheter des carreaux.
Ce dernier dispose de trois types de carreaux carrés, de côtés respectifs 18 cm ; 25 cm et 30 cm. Chaque type de carreaux est livré en paquets de 12 et de 20 carreaux.
Pour éviter le gaspillage et la surfacturation, le Maire exige :

- qu'il n'y ait pas de découpe de carreaux lors du carrelage ;
- qu'on lui communique le nombre exact de paquets de 12 et de paquets de 20 qu'il faut acheter.

Le chef du service technique pense que les carreaux de côté 30 cm conviennent si l'on veut éviter des découpes de carreaux. N'étant pas qualifié pour faire ces types de calculs, il te sollicite.

1. Vérifie si le chef du service technique a raison ou pas.

2. En supposant qu'il a raison, détermine le nombre de paquets de 20 et le nombre de paquets de 12 que le chef du service technique doit commander, sachant que le nombre de paquets de 20 est supérieur à 66.

*R. C. I - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2020 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :
$a = 2 - 2i$, $b = 2 + 2i$ et $c = -2 + 2i$.

1. *a*) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.
   b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
   c) Écris sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes a, b et c.

2. Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$ et (Γ) le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 2.
   a) Détermine l'application complexe associée à la rotation r.
   b) Déduis de ce qui précède $r(B)$.
   c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'image (Γ') de (Γ) par r.
   d) Construis (Γ) et (Γ') sur la même figure.

3. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,2\pi[$, tel que : $\alpha \neq \pi$. On note M le point d'affixe z telle que $z = 2 + 2ie^{i\alpha}$ et M' l'image de M par r. On note z' l'affixe de M'.
   a) Démontre que M est un point de (Γ).
   b) Démontre que : $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$.
   c) On note u et v les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
   Exprime u et v en fonction de α.

4. *a*) Démontre que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^{2ix} + 1 = 2e^{ix}\cos x$ et $e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix}\sin x$.
   b) Démontre que : $\dfrac{u}{v} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$.
   c) Déduis de ce qui précède que les points M, M' et B sont alignés.

5. On donne : $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.
   a) Détermine sous forme algébrique l'affixe du point M.
   b) Construis les points M et $r(M)$.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fausse.
On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

1. Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours.
   Exprime en fonction de k la note globale N de ce candidat.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Démontre que : $P(X = 3) = \frac{45}{512}$.
   c) Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est : $\frac{53}{512}$.

3. On suppose qu'à ce concours, n candidats ont répondu au hasard aux cinq questions.
   On admet que lorsqu'un des n candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.
   a) Justifie que la probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est : $1 - (\frac{459}{512})^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0{,}99$.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1 - x)^n e^{\frac{x}{2}}$.
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Partie A : Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

1. *a*) Calcule : $\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.
   b) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. *a*) Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.
   b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que f_1 est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et strictement décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.

b) Dresse le tableau de variations de f_1.

c) Trace dans le repère (O, I, J), la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

<u>Partie B</u> : Etude de la fonction f_n.

1. *a*) Détermine, suivant la parité de n, la limite de f_n en $+\infty$.

b) Détermine, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$.

c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ *(On pourra poser : $X = 1-x$).*

b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que : $\forall x \in\mathbb{R},\ f_n'(x) = \dfrac{1}{2}(-x-2n+1)\,(1-x)^{n-1}\,e^{\frac{x}{2}}$.

b) Étudie, suivant la parité de n, le signe de $f_n'(x)$.

c) Dresse, suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.

4. *a*) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.

b) Déduis de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.

c) Étudie, suivant la parité de n, les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

d) Trace la courbe (C_2) dans le repère (O, I, J).

<u>Partie C</u> : Calcul de la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Justifie que la fonction f_n est décroissante sur $[0\,;1]$.
2. Démontre que : $\forall\, x \in[0\,;1],\ f_n(x) \in[0\,;1]$.
3. Déduis de ce qui précède que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le S_n \le \dfrac{1}{n}$.
4. Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

*R. C. I. – MENET-FP * Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - MENET-FP*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2019 **Durée : 4h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que AB = 3.
On note E le milieu du segment [BC] et G le barycentre des points pondérés (A, 4), (B, –1) et (D, –1).

1. *a*) Démontre que A est le milieu du segment [KG].

b) Justifie que : $GB^2 = \frac{45}{2}$.

c) Justifie que : GB = GD.

d) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :
$$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9.$$

2. *a*) Justifie que : $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

b) Démontre que pour tout point M du plan :
$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AE}.$$

c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :
$$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63.$$

EXERCICE 2

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$.
(On rappelle que : $m = 10^2a + 10\,b + c$)

Partie A

1. Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.

2. On suppose que : $m \equiv 0$ [27].

i) Démontre que : $10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0$ [27].

ii) Déduis-en que : $10\,\overline{bc} + a \equiv 0$ [27].

iii) Justifie alors que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

Partie B

Dans cette partie on suppose que : $a > c$.
On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a - c$ et $d = m - p$.

1. Justifie que : $d = 99u$.

2. Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.

3. On suppose que : $b = a + c$.
   i) Justifie que : $m = 11(10a + c)$.
   ii) Déduis-en que m et d ne sont pas premiers entre eux.

4. On suppose que : $a = b + c$.
   i) Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$.
   ii) Justifie que : $m = 110b + 101c$.
   iii) Démontre que les entiers naturels m qui sont premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b+c$ n'est pas divisible par 3 ; b et c sont premiers entre eux.
   iv) Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions f_n et F_n continues sur $\mathbb{R}$ et définies par :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère (O, I, J).
On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_n)$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. Démontre que f est une fonction impaire.

2. *a)* Calcule la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   b) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   b) Détermine le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
   c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

4. Détermine une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

5. On note g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :
   $g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
   a) Détermine le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
   b) Détermine les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (Δ). *(On pourra calculer g(0)).*

6. Construis la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) dans le plan muni du repère (O, I, J).

7. On note A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie *B*

1. *a*) Justifie que F_n est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontre que F_n est une fonction impaire.
   c) Étudie le sens de variation de F_n sur $[0\ ;+\infty[$.

2. Soit (I_n) la suite numérique définie par :

$$I_0 = \ln(1+\sqrt{2}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

   a) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$.
   b) Démontre que la suite (I_n) est décroissante.
   c) Démontre que la suite (I_n) est convergente.
   (*On ne demande pas de calculer la limite de (I_n)*).
   d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t^{2n}\sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$$

   e) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2}I_n.$$

   On remarquera que pour tout nombre réel t, $\dfrac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1} \times \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

   On admettra que : $I_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}I_0$.

   f) Calcule I_1 et I_2.

3. *a*) Démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = I_n + \displaystyle\int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

   b) Démontre que :

$$\forall\, t \geq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall\, x \geq 1,\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}(x^{2n}-1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

   c) Déduis-en la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n, $(\mathscr{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.
   e) Construis la courbe $(\mathscr{C}_2)$ dans le plan muni du repère (O, I, J).

Pays : Côte d'Ivoire	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : Bac, Série C	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique E(Y) de Y est égale à 1.

1. a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$.

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = ln(\frac{1}{7})$ et $c = ln(\frac{4}{7})$.

2. Justifie que la variance V(Y) de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 4).

On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (Γ).

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : OI = OJ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$. On pose : F = rot et G = tor.

1. Fais une figure. (*On prendra : OI = 8 cm*).

2. a) Détermine F(C) et G(B).

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3. On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation GoF^{-1}.

b) Détermine (GoF^{-1})(O), puis caractérise la transformation GoF^{-1}.

c) Détermine (GoF)(I) puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GOF.

4. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2. On pose : S = $h o r$.

a) Écris l'affixe de chacun des points A , B et C.

b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r.

c) Soit g l'application complexe associée à S.

Démontre que : $\forall\, z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i.$

d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S.

PROBLÈME

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = n - \left(n + \frac{1}{2}\right) ln(n) + ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) *et de démontrer que* :

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = ln(\sqrt{2\pi})$$

<u>Partie I</u> **: Étude de la convergence de la suite**$(\boldsymbol{t_n})$

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n\,;+\infty[$ par : $\psi(t) = ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]-n\,;+\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1. a) Justifie que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[,\ \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1+\frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (*On ne calculera pas les limites*).

d) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[, ln(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$.

2. a) En utilisant la question **1.** d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, lnx \leq x - 1.$$

b) Démontre que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\frac{x}{k} - 1) dx = 0.$

c) Déduis des questions **2.** a) et **2.** b) que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(\frac{x}{k}) dx \leq 0.$

d) Justifie alors que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln(x) dx \leq ln(k).$

e)En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} ln(x) dx \leq ln(n!).$$

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n + \frac{1}{2}\right) ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + ln(n!) \geq ln(\sqrt{2}).$$

b) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq ln(\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction f sur l'intervalle] 0 ; 1[par : $f(x) = \frac{1}{2x} ln(\frac{1+x}{1-x})$.

On admet que : $\forall\, x \in]0\,;1[\,, f(x) \geq 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$.

a) Détermine le sens de variation de la suite (t_n).

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n).

<u>Partie II</u> : Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, t\, dt.$$

1. a) Calcule w_1.

b) Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive.
On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n$.

On remarquera que : $sin^{n+2}(t) = sin(t) \times sin^{n+1}(t)$.

d) En utilisant les questions **1.** b) et **1.** c) de la partie II, justifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

a) Démontre que la suite (y_n) est constante.

b) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} n w_n^2$.
($On\ remarquera\ que: nw_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$).

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite (a_n) converge vers l, alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers l.

a) Déduis de la question **2.** c) de la partie II la limite de la suite (nw_{2n}^2).

(*On remarquera que* : $nw_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2nw_{2n}^2)$).

b) En utilisant la question **1.** c) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, e^{t_n} = n!\,(\frac{e}{n})^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, e^{t_{2n} - 2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{nw_{2n}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n).

Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : C	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-n\ln(n)}{n}$$

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$.

2- *a)* Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \le k \le n-1$,
$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$
(*On pourra utiliser un encadrement de* ln(*x*) *sur l'intervalle* $\left[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}\right]$.)

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln x\,dx \le u_n$.

3- Sachant que $\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln(2) - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1- On note $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) tels que : $14z\overline{z} + 16i(z-\overline{z}) = z^2 + \overline{z}^2$.
Démontrer que M appartient à $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$.

2- *a)* Justifier que $(\mathscr{C})$ est une ellipse. On note Ω son centre.
b) Préciser les coordonnées de Ω.
c) Déterminer une équation de l'axe focal de $(\mathscr{C})$.
d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives
$\frac{-2\sqrt{3}}{3}+i,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}+i,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}+i$.
Justifier que A et A' sont les sommets de $(\mathscr{C})$ situés sur son axe focal.
Justifier que F et F' sont les foyers de $(\mathscr{C})$.

3- Construire l'ellipse $(\mathscr{C})$.

4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.
a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est :
$3x^2 - y^2 = 1$.
b) Tracer les asymptotes de (H).
c) Construire (H).

PROBLÈME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) tel que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

On considère la fonction dérivable sur ℝ* et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|.$$

1- *a)* Calculer la limite de *f* en 0.

b) Calculer les limites de *f* en +∞ et en -∞.

c) Démontrer que *f* est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{1}{4}\right[$ et $]0\,;+\infty[$, et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}\,;0\right[$.

d) Dresser le tableau de variations de *f*.

2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $3 < \alpha < 4$.

3- Démontrer que :

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\ 0[\, \cup\,]0\,;\ \alpha[,\ f(x) < 0$;

$\forall\, x \in\,]\alpha\,;+\infty[,\qquad f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction *h* dérivable sur ℝ* et définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- *a)* Démontrer que *h* est dérivable en 0.

b) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = xf(\frac{1}{x})$.

c) Démontrer en utilisant A-3) que :

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\ 0[\, \cup \left]0\,;\ \frac{1}{\alpha}\right[,\ h'(x) > 0$;

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\alpha}\,;+\infty\right[,\qquad h'(x) < 0$.

2- On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de *h* à l'intervalle $[-1\,;\frac{3}{2}]$ dans le plan muni du repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

a) Tracer la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe (Γ). (*On prendra : α = 3,6*).

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1[.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda$.

b) On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite de repère $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Déduire de la question précédente que :

$\mathscr{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda)\right)$ cm².

c) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$.

a) Étudier les variations de g.

b) Démontrer que l'image de l'intervalle [3 ; 4] par g est contenue dans l'intervalle [3 ; 4].

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) = x$.

2- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3 \leq u_n \leq 4$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout x élément de [3 ; 4], on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n,

$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$, puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

BACCALAUREAT **Coefficient : 5**
SESSION 2025 **Durée : 4H**

MATHEMATIQUES

SERIE E

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuilles de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 **3 points**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. Ecrire le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte sans aucune justification.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1.	ABCD est un carré de sens indirect. L'isométrie r(A, $\frac{\pi}{2}$)o r(B, $-\frac{\pi}{2}$) est la translation de vecteur	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$
2.	Deux dés parfaits sont lancés. La probabilité d'obtenir le numéro 5 sur le premier dé et un nombre pair sur le deuxième dé est	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$
3.	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} ln(1+e^{x}) =$	0	1	$+\infty$
4.	La valeur exacte de $(1-i)^{2020}$ est	2^{1010}	$(\sqrt{2})^{1010}$	-2^{1010}
5.	La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n(2n)$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	N'existe pas
6.	La solution générale sur ℝ de l'équation différentielle y' – 3y = 0 est	y = ke^{-3x} avec kϵℝ	y = ke^{3x} avec kϵℝ	y = kx^{3} avec kϵℝ

EXERCICE 2 **5 points**

1. On considère l'équation (E) : 8x + 5y = 1, où (x , y) est un couple de nombres entiers relatifs.

   a) Vérifier que le couple (2 ; - 3) est une solution particulière de (E).

   b) Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre entier naturel tel qu'il existe un couple (a , b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Démontrer que le couple (a, - b) est solution de (E).
b) Justifier que le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.

3. a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x , y) est un couple de nombres entiers relatifs.

Lors de la CAN 2023, un groupe de supporters composé d'hommes et de femmes a dépensé 100000f dans un restaurant. Les hommes ont dépensé chacun 8000f et les femmes 5000f chacune.

b) Combien d'hommes et de femmes compose ce groupe sachant que le nombre d'hommes est supérieur au nombre de femmes.

PROBLEME **12 points**

Soit n un entier naturel non nul.

Partie A

On considère la fonction f_n définie sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par $f_n= \left(x-\frac{1}{2}\right)^n ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

On désigne par (C_n), la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Unité graphique 2 cm.

1. Soit g_n la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par $g_n(x) = nln\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{2x-1}{2x+1}$.
   a) On admet que g_n est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et on note g'_n sa dérivée.
   Justifier que : $\forall x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[, g'_n(x) = \frac{2n}{2x+1} + \frac{4}{(2x+1)^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction g_n.
   c) Calculer $g_n(\frac{1}{2})$, puis donner le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On admet que f_n est dérivable sur$\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et on note f'_n sa dérivée.
   a) Démontrer que : $\forall x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[, f'_1(x) = g_1(x)$.
   b) Démontrer que : $\forall x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[, f'_n(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-1} g_n(x)$.
   c) Pour n impair, étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.
   d) Pour n pair, étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que pour tout entier non nul n , les courbes (C_n) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.
4. a) Etudier les positions relatives de (C_1) et (C_2).

   b) Tracer les courbes (C_1) et (C_2).dans le repère (O,I,J).

Partie B

1. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(x-\frac{1}{2})^n \ln(x+\frac{1}{2})dx$.

   a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le v_n \le \frac{ln2}{n+1}$.
   b) En déduire la limite de la suite v_n.

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{ln2}{n+1} - \frac{2^{-n}}{n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}\, dx.$$

3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$et $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right]$, on pose $S_n(x) = 1 - \left(x - \frac{1}{2}\right) + \cdots + (-1)^n\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$

   a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$et $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right]$, $S_n(x) = \frac{2}{2x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2x-1)^{n+1}}{2x+1}$.

   b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{ln2}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left(ln2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$.

   c) Calculer la valeur exacte de v_1.

BACCALAUREAT
SESSION 2024

Coefficient : 5
Durée :4H

MATHEMATIQUES

SERIE E

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1sur3 ; 2 sur3 et 3sur3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé
Le candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$; $c_n = 2\times10^n + 1$.

1. a) Calculer les nombres a_3, b_3 et c_3.
   b) Démontrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
   c) Démontrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 50, que b_3 est premier.
   d) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
   En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.
   e) Démontrer que $\text{pgcd}(c_n, b_n) = \text{pgcd}(b_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (1) : $b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.
   a) Justifier que l'équation (1) possède au moins une solution.
   b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
   c) Résoudre l'équation (1).

EXERCICE 2

Dans le plan orienté dans le sens direct, OBC est un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle (Γ).

Le point A est le symétrique de C par rapport à O.

J et K sont les points de (Γ) diamétralement opposés respectivement à B et C.

Partie A

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure. On prendra OB = 5 cm.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation R définie par $R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$.
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   Déterminer la droite (Δ) telle que $T = S_{(\Delta)} \circ S_{(OJ)}$.

4. Démontrer que T o R est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Partie B

On considère le point E tel que $\overline{CE} = \overline{BO}$

1. Démontrer que ABE est un triangle équilatéral de centre O.
2. Soit *h* une isométrie du plan qui transforme A en C et O en B. On pose $g = t_{\overline{BO}} \circ h$.
   a) Déterminer g(O) et g(A).
   b) En déduire que g est soit la symétrie orthogonale d'axe (OB), soit la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
3. Caractériser les isométries *h* du plan qui transforment A en C et O en B.

PROBLEME

On considère la fonction *f* définie sur]0, + ∞ [par $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

On note (C_f) la représentation graphique de *f*, dans un repère orthogonal (O, I, J).

(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie 1

1. Calculer les limites de *f* en + ∞ et en 0.
2. On admet que *f* est dérivable sur]0 ; + ∞ [et on désigne par *f* ' sa dérivée.

   a) Calculer *f* '(*x*) pour tout nombre réel *x* strictement positif puis établir que $f'(x) = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$.

   b) Déterminer les variations de *f*.
3. Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J).
4. On pose pour tout entier naturel p≥1 , $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^2} dx$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

   b) Démontrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\forall$ p≥ 1, $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$.

   c) En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2, I_3 et I_4.
   d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de (C_f) d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de (C_f), d'abscisse *x*, décrit alors un cercle de rayon *f*(*x*).
   Justifier que le volume du solide ainsi engendré en unités de volume est $V = \pi I_4 \text{ cm}^3$.

Partie 2

Soit **a** un nombre réel strictement positif et A le point de (C_f) d'abscisse **a**.

Soit T_a la tangente à (C_f) au point A.

1. Ecrire une équation de T_a.
2. Déterminer les nombres réels **a** pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à (C_f), passant par O.

Partie 3

On étudie maintenant l'intersection de (C_f) avec la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{e^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - e\ln x$.
   Démontrer que φ_1 est strictement décroissante sur$]0 ; e[$ et strictement croissante sur $]e ; +\infty[$.
   En déduire que 0 est le mininum de φ_1 sur $]0 ; +\infty[$.
2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + e\ln x$.
   a) Etudier le sens de variation de φ_2 sur $]0 ; +\infty[$
   b) Justifier que l'équation $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique α telle que $0,5 < \alpha < 1$.
3. Déterminer les points d'intersection de (C_f) et de (Δ).

BACCALAUREAT **Coefficient : 5**
SESSION 2020 **Durée : 4 H**

MATHEMATIQUES

SERIE E

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle du plan.

1. a) Déterminer et construire le point G, barycentre des points pondérés (A ,1) ; (B,-1) et (C, 1).
   b) Déterminer et construire le point G', barycentre des points pondérés (A ,1) ; (B,5) et (C, –2).

2. Soit J le milieu de [AB].
   a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis en déduire que le point J est le point d'intersection des droites (GG') et (AB).
   b) Démontrer que le barycentre I des points pondérés (B,2) et (C,-1) appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan n'appartenant pas à la droite (AC).
   Soit O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].
   a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que K soit le barycentre de (A, a); (D, b) et (C, c).
   b) Soit E le point d'intersection des droites (DK) et (AC).
   Démontrer que E est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (C, 1).

EXERCICE 2

L'objectif est d'étudier la suite u définie par : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
   a) Calculer $f'(x)$ et en déduire u_0. f' étant la dérivée de f.
   b) Calculer u_1.

2. On ne cherchera pas à calculer u_n
   a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.
   b) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1],
   on a : $1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}$.
   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. (1)
   c) Déterminer la limite de (u_n).

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

   a) Justifier que : $\forall\, n \geqslant 3,\ u_n + u_{n-2} = I_n$.

   b) A l'aide d'une intégration par parties de I_n, démontrer que : $\forall n \geqslant 3,\ nu_n + (n-1)\,u_{n-2} = \sqrt{2}$.

   c) En déduire que : $\forall\, n \geqslant 3,\ (2n-1)\,u_n \leqslant \sqrt{2}$. (2)

   d) A l'aide des inégalités (1) et (2), démontrer que : $\forall\, n \geqslant 3, \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant nu_n \leqslant \dfrac{n\sqrt{2}}{2n-1}$

   En déduire que la suite (nu_n) est convergente.

PROBLEME

n est un nombre entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n \text{ si } x \in\,]0,1] \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

On désigne par (C_n), la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 10 cm.

Partie A

1. Démontrer que f_n est dérivable à droite en 0.
2. a) Démontrer que : $\forall\, n > 0,\ 0 < e^{-\frac{n}{2}} < 1$.

   b) Résoudre dans]0 ; 1], l'inéquation : $\ln x + \frac{n}{2} < 0$.
3. a) Démontrer que : $\forall x \in\,]0\,;1],\ f_n'(x) = 2x(\ln x)^{n-1}(\ln x + \frac{n}{2})$

   b) Etudier suivant les valeurs de n, les variations de f_n puis dresser son tableau de variation (On distinguera trois cas : n =1, n pair et n impair)
4. a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

   b) Construire (C_1) et (C_2) dans le même repère.

Partie B

t désigne un nombre réel appartenant à [0 ; 1]. On pose $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)dx$ et $L_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

On admet que $L_n = \lim\limits_{t \to 0} I_n(t)$.

1. Soit F la fonction dérivable et définie sur [0 ;1] par : $\begin{cases} F(x) = \dfrac{x^3}{3}(\ln x) - \dfrac{x^3}{9} \text{ si } x \in\,]0,1] \\ F(0) = 0 \end{cases}$

   a) Démontrer que F est une primitive de f_1 sur [0 ; 1].

   b) Calculer L_1.
2. Soit φ_n la fonction définie sur]0 ; 1] par $\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$.

   a) Calculer la limite de φ_n en 0.

   b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall\, t \in [0\,;1], I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3}I_n(t)$

   c) En déduire que : $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3}L_n$.

   d) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \geqslant 1,\ L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$.
3. Calculer en fonction de n, l'aire A(n) de la partie du plan délimitée par (C_n) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x= 1.

BACCALAUREAT
SESSION 2019

Coefficient : 5
Durée : 4 *h*

MATHEMATIQUES

SERIE E

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

EXERCICE 1

ABCD est un carré de centre O et de sens direct tel que AB = 4 cm.

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$; h l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$ et $r' = t \circ r$.

1- Faire une figure qu'on complètera au fur et à mesure.

2- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r'.

3- On considère $f = r' \circ h$.
   a) Déterminer l'image de C par f.
   b) Donner la nature de f puis préciser son angle et son rapport.

4- Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$.

5- Soit Ω le centre de f.
   a) Démontrer que Ω appartient à (Γ) et au cercle de diamètre [DC].
   b) Construire Ω .
   c) Déterminer Mes $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C\Omega}})$.

EXERCICE 2

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le wifi.

Sur l'ensemble des téléphones portables, 40% possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60% ont l'option wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

G : « le téléphone possède l'option GPS ».

W : « le téléphone possède l'option wifi ».

Dans tout l'exercice, le candidat donnera les valeurs exactes des probabilités.

1- Déterminer $P(G)$ et $P_G(W)$.

2- Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré qui sera complété tout au long de l'exercice.

On suppose que la probabilité de W est $P(W) = \frac{7}{10}$.

3- Déterminer la probabilité de l'événement : « le téléphone possède les deux options ».

4- Démontrer que $P_{\overline{G}}(W) = \frac{23}{30}$. Compléter l'arbre de la question 2.

5- On choisit un téléphone avec l'option wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas d'option GPS ?

6. Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabriquant du téléphone est de 7 200 F pour l'option GPS et de 3 600 F pour l'option wifi.

a) Déterminer la loi de probabilité du coût de revient d'un téléphone suivant ces deux options.

b) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ et (Cf) sa courbe représentative.

Soit (Ch) la courbe représentative de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

1- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et à droite en 0.

Interpréter graphiquement les résultats.

2- On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note f ' sa dérivée.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Etudier les variations de f

3- Soit A le point d'intersection de (Cf) avec la droite des abscisses.

Déterminer les coordonnées de A.

4- Pour tout x élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on pose $g(x) = 1-x+2\ln x$.

a) Etudier les variations de la fonction g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0 ; 2[$ et $]2 ; 4[$.

c) Soit α la solution appartenant à l'intervalle $]2 ; 4[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

d) Calculer g(1) puis en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

5- a) Etudier les positions relatives de (Cf) et (Ch).

b) Démontrer que, pout tout nombre réel x supérieur ou égal à 4, on a : $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$.

6- Construire (Cf) et (Ch).

Partie B

1- a) Déterminer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

b) Démontrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2 - \frac{2}{\alpha}$ cm^2 et donner une valeur approchée de $\mathcal{A}(\alpha)$ à 10^{-1} près.

2- Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on a: $0 \leq I_n \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b) Calculer la limite de la suite (I_n) puis en déduire que (I_n) converge .

c) Soit $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$. Calculer S_n en fonction de n, puis calculer la limite de la suite (S_n).

Partie C

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^{2n}}.$$

On admet que f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on désigne par f_n' sa dérivée.

1- Calculer $f_n'(x)$ pour tout x strictement positif.

2- Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.

3- Déterminer la limite de la suite (x_n).

BACCALAUREAT
SESSION 2018

Coefficient : 5
Durée : 4 *h*

MATHEMATIQUES

SERIE E

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\, dx$ et pour tout nombre entier naturel non nul n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x\, dx$.

1- a) Calculer I_0.
b) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

2- a) En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.

b) Vérifier que : $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.

3- a) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n non nul, $I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n\, dx$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est de déterminer la position du centre d'inertie G d'une plaque homogène P d'épaisseur négligeable.
Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 2x + \sin 2x$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2cm.

La plaque P représente la portion du plan délimitée par la courbe (Cf), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

1- a) Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; \pi]$.
b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (Cf) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0, $\frac{\pi}{2}$ et π.

2- Démontrer que, l'aire exprimée en cm^2, de la plaque est égale à $4\pi^2$.

3- On admettra que les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque sont données par :

$$x_G = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi xf(x)\,dx \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi \left(f(x)\right)^2 dx.$$

On pose $I = \int_0^\pi \sin^2(2x)\,dx$ et $J = \int_0^\pi x\sin(2x)\,dx$.

a) Vérifier que: $x_G = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2}{3}\pi^3 + J\right)$ et $y_G = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{4}{3}\pi^3 + 4J + I\right)$

b) Calculer I. (on pourra utiliser la formule $\sin^2(t) = \frac{1-\cos 2t}{2}$)

c) En utilisant une intégration par parties, calculer J.

d) Déduire des questions 3.a),b) et c) les coordonnées du point G.

PROBLEME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives 2 ; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$ et -1.

***Partie* A**

Soit (Γ) l'ellipse de centre Ω passant par les points A et B et dont l'axe focal est l'axe (OI).

1- Construire les points A, B, C et Ω.

2- *a)* Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (Γ).

b) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère (O, I, J).

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec l'axe (OJ).

3- Tracer (Γ) dans le repère (O, I, J).

***Partie* B**

On désigne par s la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Soit E l'image du point C par h.

1- a) Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

b) Démontrer que s(E) = B.

c) Construire les points F et K tels que s(C) = F et s(B) = K.

2- Le cercle circonscrit au triangle BCE recoupe la droite (AB) en un point G et le cercle circonscrit au triangle BFK recoupe la droite (AK) en un point D.

a) Construire les points G et D.

b) Démontrer que s(G) = D.

3- Soit $S_{(OA)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OA).

a) Démontrer que $S_{(OA)}(E) = G$

b) Justifier que h(B) = G

c) Démontrer que le triangle ABD est équilatéral de sens indirect.

4- Démontrer que le quadrilatère ADBC est un losange.

5- Démontrer que l'image du triangle DBA par h^{-1} est le triangle KAF (où h^{-1} est la réciproque de h).

Pays : Côte d'Ivoire	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : Bac, Série E	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1

Afin d'éviter des licenciements dans une entreprise, la direction et le personnel se sont mis d'accord, pour réduire la durée hebdomadaire du travail et de la faire passer de cinq à quatre jours.
L'un des trois jours de congés sera dimanche, les deux autres étant répartis au hasard dans la semaine.
Dans un sac, on dépose six boules portant chacune le nom d'un des jours de la semaine, du lundi au samedi. Chaque employé choisit ses deux jours de congé autre que le dimanche en tirant au hasard et simultanément deux de ces boules, supposées indiscernables au toucher. Il remet ensuite les deux boules tirées dans le sac.

1. a) Soit A l'évènement « l'un des jours de congé est le lundi » et
B l'évènement « l'un des jours de congé est le samedi ».

Démontrer que : P(A) = P(B) = $\frac{1}{3}$.

b) On définit les évènements C et D suivants :

C " parmi les jours de congés figurent le lundi, ou le samedi, ou les deux jours ".
D " les jours de congés sont trois jours consécutifs".

Calculer P(C) et P (D).

c) Yao aimerait bien avoir les mêmes jours de congé que Mariam. Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

2. L'entreprise compte douze employés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'employés ayant tiré le samedi comme jour de congé.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c) Calculer la probabilité pour que 5 employés tirent le samedi comme jour de congé.

d) Calculer la probabilité pour qu'au moins deux (2) employés tirent le samedi comme jour de congé.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

On appelle ($\mathcal{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. I est le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [OI]. Les droites (OA) et (OC) recoupent ($\mathcal{C}$) respectivement en D et E.

1. Placer ces points sur une figure.

2. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

c) En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupent en G, puis placer G.

3. A tout point M du plan, on fait correspondre par une transformation f, le point M'

tel que : $4\,\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$.

a) Démontrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Déterminer les images par f des points B et D.

4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et S la transformation telle que : S = R∘f.

a) Caractériser la transformation S.

b) Construire le point H tel que : H = S(G).

c) Soit le point , invariant par S.
Démontrer que les points Ω, O, G et H sont cocycliques ainsi que les points Ω, O, B et D.

PROBLÈME

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$.

1. Résoudre sur ℝ l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y = 0$.

2. a) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction h_1 définie par $h_1(x) = (ax + b)e^{x^2}$ soit solution de l'équation différentielle (E).

b) Soit h_2 une fonction. Démontrer que h_2 est solution de (E) si et seulement si $h_2 - h_1$ est solution de (E').

3. Déduire de ce qui précède la résolution sur ℝ de l'équation (E).

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur ℝ par : $f(x) = e^{x|x|}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) En déduire une interprétation graphique.

3. a) Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-1}{x}$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{f(x)-1}{x}$.

b) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

c) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

5. Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}]$ par : $g(x) = e^{-x^2} - (x\sqrt{2}+2)e^{-\frac{1}{2}}$.

a) Justifier que : $\forall\, x \in]-\infty;-\frac{1}{2}],\ g''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

b) Étudier les variations de g'.

c) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup]-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{1}{2}[,\ g'(x) < 0$.

d) En déduire le sens de variation de g sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}]$.

e) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}],\ g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}[,\ g(x) > 0$.
En déduire les positions de $(\mathcal{C})$ relativement à (T).

6. Tracer (T) puis $(\mathcal{C})$.

Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : E	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$),
d'unité graphique, un centimètre.
Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M, N et P les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m, n et p.

1- Construire les triangles MNP et ABC sachant que : $m = -1 - 3i$ et $n = 2$.

2- On considère la transformation f du plan dans lui-même,
qui à chaque point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :
$z' = -\frac{1}{2}(1+i)[2 - (m+n+p)]$.
Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.

3- Soit α, β et γ les affixes respectives des points A, B et C.
Démontrer que :
a) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}$. En déduire que : $\alpha = n + p - m$.
b) $\beta = m - n + p$.
c) $\gamma = n - p + m$.

4- On pose : f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.
On désigne par α', β' et γ' les affixes respectives des points A', B' et C'.
a) Démontrer que : $\alpha' = (1 + i)m$;
$\beta' = (1 + i)n$;
$\gamma' = (1 + i)p$.
b) En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{MA'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sont orthogonaux et que le point A' appartient à la droite (BC).
c) Calculer $\frac{\beta'-n}{n}$ et $\frac{\gamma'-p}{p}$.
En déduire que les points B' et C' appartiennent respectivement aux droites (AC) et (AB).

5- Démontrer que les triangles A'B'C' et MNP sont semblables.

EXERCICE 2

Soit (u_n), la suite définie sur ℕ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

1- Démontrer que : $\forall\, n \in \,]0\,;+\infty[$, $f(x) \geq \sqrt{7}$.

2- *a)* Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{7}$.

3- *a)* Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

b) En déduire la convergence de la suite (u_n).

4- Soit ℓ la limite de la suite (u_n).

a) Démontrer que: $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.

b) Déterminer la valeur de ℓ.

5- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

6- On définit la suite (d_n) par : $\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2 \end{cases}$.

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

PROBLÈME

Partie A

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g_n(x) = nx + (n+1)\ln x$.

1- Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

2- *a)* Calculer $g_n'(x)$ pour x élément de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, où g_n' est la dérivée de g_n.
b) En déduire le sens de variation de g_n.

3- Démontrer que l'équation $x \in]0\,;+\infty[$, $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0\,;1[$.

4- Démontrer que : $g_n(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [\alpha_n\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ définie dans la partie **A** et h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$
par : $h(x) = x + \ln x$.

1- Démontrer que l'équation $x \in]0\,;+\infty[$, $h(x) = 0$ admet une unique solution α telle que :
$\alpha \in]0\,;+\infty[$.

2- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $g_{n+1}(x) = g_n(x) + x + \ln x$.

3- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n+1}$.

4- *a)* Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
b) En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.

5- Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul différent de 1, f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par
$f_n(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$et ($\mathscr{C}_{fn}$) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (Unités graphiques : 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).

1- Selon la parité de n, déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2- *a)* Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{1-\ln x}{x^3}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-1} g_n(x)$.
b) En déduire, selon la parité de n, le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation.

3- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $f_n(\alpha_n) = (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

4- Construire ($\mathscr{C}_{f_2}$). On prendra : $\alpha_2 \approx 0{,}6$.