

EXERCICE 1

1) Résous les équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2y = 0$

b) $y' + 3y = 0$

2) Dans chacun des cas suivants, détermine la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition donnée :

a) (E) : $y' - 4y = 0$ et $f(0) = 3$

b) (E) : $y' + 2y = 0$; la courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1

EXERCICE 2

Résous les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 4y = 0$

2) $y'' + 9y = 0$

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, détermine la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition donnée :

a) $y'' - 16y = 0$ et $f'(0) = f(0) = 1$

b) $y'' + y = 0$; la courbe représentative de f dans un repère orthonormé passe par le point $A(\frac{\pi}{2}; 1)$ admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$

1) Détermine le nombre réel a pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ae^{-x}$ soit solution de (E).

2) Résous sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$

3) Justifie qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) Déduis-en les solutions de (E).

EXERCICE 5

Au début de la croissance de certaines espèces végétales (telles que le coton, le maïs), on estime que le poids de la plante varie proportionnellement à lui-même. Pour une espèce donnée de coton, le poids p (en g par jour) varie en fonction du temps t (en jours) selon l'équation $p'(t) = 0,18p(t)$.

Sachant que le poids de la plante après un jour est de $2g$, détermine son poids après 30 jours.

EXERCICE 6

1) Résous dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = 0$.

2) Démontre que l'équation différentielle (E') : $y'' - 4y = 4(x - 1)^2 - 2$ admet sur \mathbb{R} une et une seule solution qui soit une fonction polynôme P de degré 2.

3) a) Démontre que f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - P$ est solution de (E).

b) Déduis-en les solutions de (E'), puis celle qui vérifie $f(0) = f'(0) = 0$

EXERCICE 7

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$

- 1) Vérifie que la fonction $g: x \mapsto (x + 1)e^{-2x}$ est solution de (E).
- 2) Démontre qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$
- 3) Déduis-en les solutions sur \mathbb{R} de (E).

EXERCICE 8

On considère l'équation différentielle (E) : $f'(x) - 2f(x) = xe^x$

1. Démontre que la fonction u définie par : $u(x) = -(x + 1)e^x$ est solution de (E).
2. Résous l'équation différentielle (E') : $f'(x) - 2f(x) = 0$
3. Démontre qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. Déduis-en que les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :
 $f_k(x) = ke^{2x} - (x + 1)e^x$ avec k un réel quelconque.
5. Déduis-en la solution de (E) qui s'annule en 0.

EXERCICE 9 (situation complexe)

Dans un laboratoire de biologie, un scientifique développe une culture de microbes. La vitesse d'accroissement à laquelle se développent ces microbes à l'instant t est proportionnelle à la quantité de microbes à cet instant. Suite à une panne technique, le scientifique a perdu des données renfermant une information importante : le nombre initial de microbes dans cette culture. Mais il constate qu'il y a 10^5 microbes au bout de 2 heures et $5 \cdot 10^5$ microbes au bout de 6 heures. Submergé par les nombreuses tâches qui l'attendent, il confie dans l'urgence à son fils en classe de terminale D, la détermination de ce nombre initial de microbe. Ce dernier te sollicite.

En t'appuyant sur un raisonnement, basé sur tes connaissances mathématiques au programme aides-le