



LEÇON 5 : FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'une grande chaîne de magasins. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres proportionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.

Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres. Dans la formule de P , les élèves remarquent une nouvelle fonction : la fonction $x \mapsto e^x$. Ils décident d'étudier cette nouvelle fonction afin de répondre à la préoccupation de la grande chaîne de magasins

2. RESUME DE COURS

I. Définition et propriétés algébriques.

1. Définition et notation

a) Définition

La fonction exponentielle népérienne, notée $\exp$, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

b) Autre notation :

Pour tout nombre réel x , $\exp(x)$ se note également e^x : $\exp(x) = e^x$.

c) Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction $\exp$ est $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b , $\ln(a) = b$ équivaut à $e^b = a$.
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$.
- Pour tout nombre réel a , $e^a > 0$.
- Pour tout nombre réel a , $\ln(e^a) = a$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif, $e^{\ln a} = a$.

Exercice

a) Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponse
--------------	---------

L'ensemble de définition de la fonction $x: \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	
Le nombre e^{-10} est négatif.	
Le nombre e^0 est égal à 0.	
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à $\ln 12$.	
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	

b) Ecris chacun des nombres A, B, C et D suivants sous forme de nombre rationnel.

$$A = \ln(e^8) \quad B = \ln(e^{-5}) \quad C = e^{\ln 3} \quad D = e^{-\ln 2}$$

Corrigé

a)

Affirmations	Réponse
L'ensemble de définition de la fonction $x: \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	vrai
Le nombre e^{-10} est négatif.	Faux
Le nombre e^0 est égal à 0.	faux
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à $\ln 12$.	Faux
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	vrai

b)

$A = \ln(e^8)$ $= 8$	$B = \ln(e^{-5})$ $= -5$	$C = e^{\ln 3}$ $= 3$	$D = e^{-\ln 2}$ $= e^{\ln \frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$
-------------------------	-----------------------------	--------------------------	--

2. Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b ,

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{1}{e^b} = e^{-b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^r = e^{ar}$$

Exercice

Ecris chacun des nombres E, F et G suivants sous la forme $e^k, k \in \mathbb{R}$.

$$E = e^6 \times e^{-4} \quad F = (e^{-2})^4 \quad G = \frac{e^4}{e^{-5}}$$

Corrigé

$E = e^6 \times e^{-4}$ $= e^{6+(-4)}$ $= e^2$	$F = (e^{-2})^4$ $= e^{-2 \times 4}$ $= e^{-8}$	$G = \frac{e^4}{e^{-5}}$ $= e^{4+5}$ $= e^9$
--	---	--

Exercice maison

Ecris chacun des nombres suivants sous la forme $e^k, k \in \mathbb{R}$.

a) $e^{-3} \times e^{\frac{1}{2}}$; b) $\frac{e^4}{e^2}$; c) $(e^3)^{-2}$; d) $\frac{1}{e^{-5}}$;

II Limites, sens de variations et représentation graphique de la fonction exponentielle

1. Limites de référence

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

Exercice

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - e^x)$

Corrigé

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 3) = 3$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 = 3$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 3 = 3$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 2 \times 0 = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x})$
 $= -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}) = -\infty \end{cases}$

2. Dérivée et sens de variation de la fonction exponentielle.

Propriété

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $(e^x)' = e^x$.

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

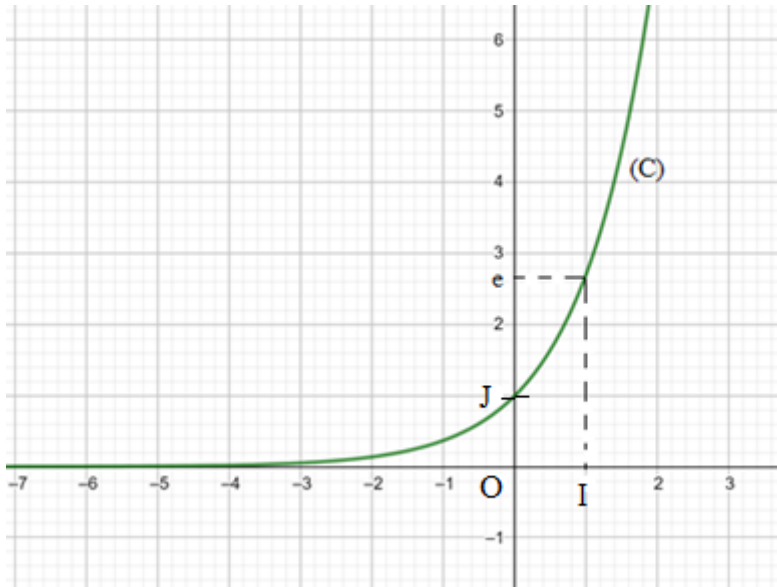
Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x		

3. Représentation graphique de la fonction exp.

Notons (C) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe (OI), est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.



Exercice

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 2x + e^x$.

1. Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

2. Calcule $f'(x)$.

Corrigé

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + e^x) = -\infty$ car : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + e^x) = +\infty$ car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

2. Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2 + e^x$.

Exercice de maison

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + e^x$.

1. Calcule la limite de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$

2. Calcule $f'(x)$.

B-3. Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction exp.

1. Propriété

Pour tous nombres réels a et b :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

2. Equations

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

- 1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$
- 2) $e^{x-2} = 5$
- 3) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

Corrigé

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 5$ $\Leftrightarrow x = 6$ $S_{\mathbb{R}} = \{6\}$	2) $e^{x-2} = 5$ $\Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\ln 5}$ $\Leftrightarrow x - 2 = \ln 5$ $\Leftrightarrow x = 2 + \ln 5$ $S_{\mathbb{R}} = \{2 + \ln 5\}$	3) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 6 = 0$ Posons : $X = e^x$. Donc $X > 0$ L'équation devient : $X^2 + X - 6 = 0$ Résolution de cette équation : $\Delta = 1 + (-4) \times (-6) = 25 = 5^2$ $X = \frac{-1 - 5}{2}$ ou $X = \frac{-1 + 5}{2}$ $X = -3$ ou $X = 2$, $X = -3$ est impossible car $X > 0$. $e^x = 2$ on a : $x = \ln 2$ $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2\}$
---	---	--

Exercices de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

- a) $e^{3-x} = 1$; b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$; c) $2 - e^x = 0$; d) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$
e) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

3. Inéquations

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

- 1) $e^{2x-1} < 8$
- 2) $e^{2x} - 5e^x + 6 \geq 0$

Corrigé

1) $e^{2x-1} < 8$ $\Leftrightarrow \ln(e^{2x-1}) < \ln 8$ $\Leftrightarrow 2x - 1 < \ln 8$ $\Leftrightarrow x < \frac{1+\ln 8}{2}$ $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}[$	2) $e^{2x} - 5e^x - 6 \geq 0$ Posons $e^x = X$, donc $X > 0$. On a $X^2 - 5X + 6 \geq 0$ $\Delta = 25 - 24 = 1$ $X = 2$ ou $X = 3$ Etudions le signe de $X^2 - 5X + 6$ <table border="1"><tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$X^2 - 5X + 6$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> $X^2 - 5X + 6 \geq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$ On a : $e^x \in]-\infty; 2]$ ou : $e^x \in [3; +\infty[$ $e^x \leq 2$ ou $e^x \geq 3$ ce équivaut à $x \leq \ln 2$ ou $x \geq \ln 3$ $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[$	X	$-\infty$	2	3	$+\infty$	$X^2 - 5X + 6$	+	0	-	0	+
X	$-\infty$	2	3	$+\infty$								
$X^2 - 5X + 6$	+	0	-	0	+							

Exercice de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $e^x - 3 \geq 0$ b) $2e^{2x} - 3e^x - 2 \leq 0$

IV. Dérivée et primitives

1. Dérivée

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K , alors e^u est dérivable sur K et on a :

$$(e^u)' = u'e^u$$

Exercice

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine leur fonction dérivée.

1) $f(x) = e^{-4x+3}$

2) $f(x) = e^{x+3} - 2x + 5$

3) $f(x) = (2x + 1)e^x$

Corrigé

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4e^{-4x+3}$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2 + e^{x+3}$

3) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x$

$$f'(x) = (2x + 3)e^x$$

Exercice de maison

Détermine dans chaque cas la dérivée de la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$

b) $f(x) = x + 2 - e^x$

c) $f(x) = (1 - x)e^x$

2. Primitives (Terminale A1 uniquement)

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K , alors la fonction la fonction $u'e^u$ a pour primitive sur K , la fonction $e^u + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Méthode

Fonctions	Primitives
$f: x \mapsto e^x,$	$F: x \mapsto e^x + k, , k \in \mathbb{R}$
$f: x \mapsto e^{ax+b}, a \neq 0$	$F: x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + k ; k \in \mathbb{R}$
$f: x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$F: x \mapsto e^{u(x)} + k ; k \in \mathbb{R}$

Exercice

Détermine sur $\mathbb{R}$ les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x,$ b) $f(x) = e^{-3x+7},$ c) $f(x) = xe^{x^2}$

Corrigé

a) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions F telles que : $F(x) = e^x + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

b) Déterminons les primitives de la fonction f telle : $f(x) = e^{-3x+7}$ sur $\mathbb{R}$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+7} + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

c) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$

On a : $u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{2} u'(x)e^{u(x)}$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice de maison

Dans chacun des cas suivants détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{4x}$; b) $f(x) = e^{x+5}$

c) $f(x) = e^{3x} - e^{-\frac{1}{2}x} + 5$; d) $f(x) = x - \frac{3}{4} + 3e^{-2x+1}$

Exercice type Bac

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $] -\infty ; 2]$ par $f(x) = (-2x + 3)e^x$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J) .

1. Justifie que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.

2.a) Vérifie que pour tout élément x de $] -\infty ; 2]$, $f'(x) = (-2x + 1)e^x$

b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $] -\infty ; 2]$.

En déduis les variations de f sur $] -\infty ; 2]$

c) Dresse le tableau de variation de f .

3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Détermine les coordonnées respectives des points A et B .

4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci - dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4		1,8		3,3			-7,4

5. Construis (C) sur l'intervalle $] -\infty ; 2]$.

Corrigé

1 Justifions que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

On a $(-2x + 3)e^x = -2xe^x + 3e^x$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$

2. a) Vérifions que pour tout élément x de $]-\infty ; 2]$, $f'(x) = (-2x + 1)e^x$

Pour tout élément x de $]-\infty ; 2]$ f est dérivable .

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x + 3)'e^x + (-2x + 3)(e^x)' \\ &= -2e^x + (-2x + 3)e^x \\ &= (-2x + 3 - 2)e^x \\ f'(x) &= (-2x + 1)e^x \end{aligned}$$

b) Etudions le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]-\infty ; 2]$.

Le signe de la dérivée est celui de $(-2x + 1)$.

- $(-2x + 1) = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$
- $(-2x + 1) \geq 0$ équivaut à $x \leq \frac{1}{2}$ soit $x \in]-\infty ; \frac{1}{2}]$
- $(-2x + 1) < 0$ équivaut à $x > \frac{1}{2}$ soit $x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$

Variation de f sur $]-\infty ; 2]$

Pour tout $x \in]-\infty ; \frac{1}{2}]$, f est croissante

Pout tout $x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$, f est strictement décroissante.

c) le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	0	3.3	

3. Déterminons les coordonnées respectives des points A et B.

- Soit $A(x_A; y_A)$

A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses équivaut à $y_A = 0$

$$\text{Soit } (-2x_A + 3)e^{x_A} = 0$$

$$\text{C'est-à-dire } (-2x_A + 3) = 0$$

$$x_A = \frac{3}{2}$$

Donc $A(\frac{3}{2}; 0)$

- Soit $B(x_B; y_B)$

B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées équivaut à $x_B=0$

Soit $(-2 \times 0 + 3)e^0 = y_B$

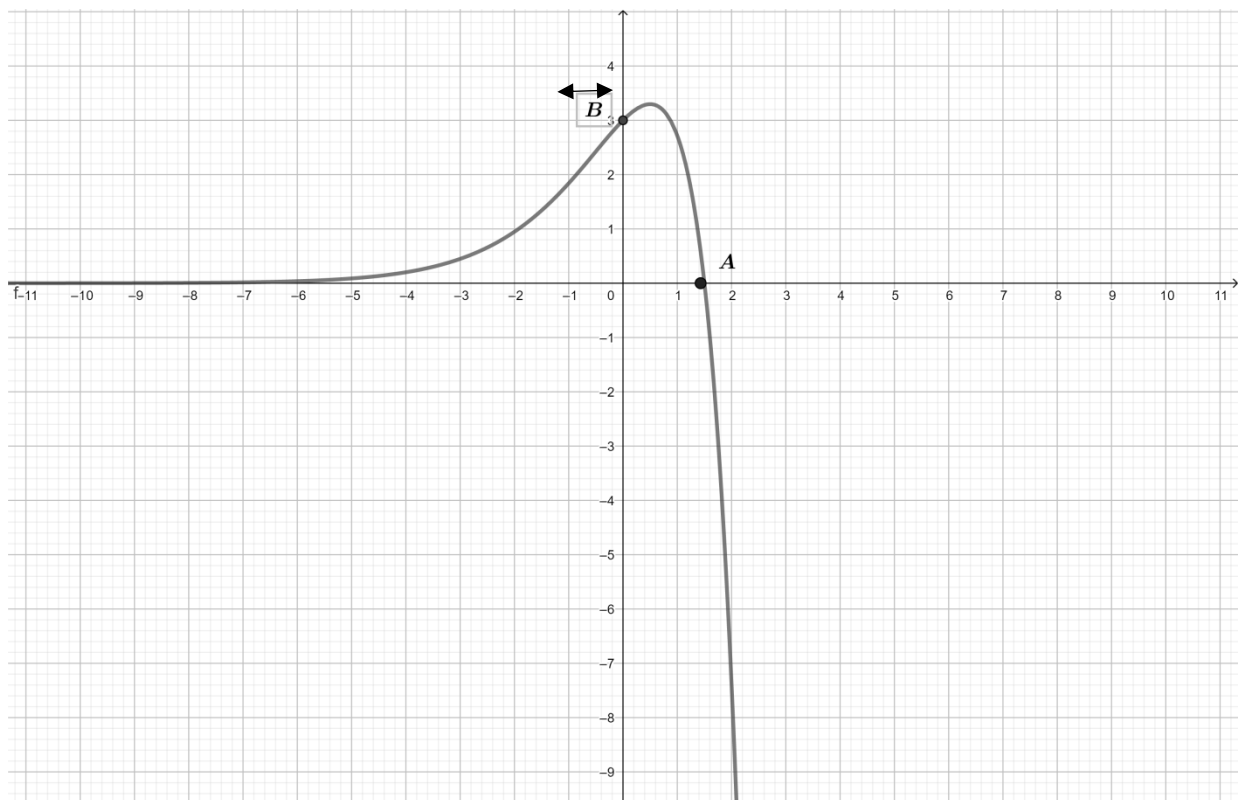
C'est-à-dire $y_B = 3$

Donc $B(0; 3)$

4. Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4	0,9	1,8	3	3,3	2,7	0	-7,4

1. Construction



3. EXERCICES

3-1. Exercices de fixation

Exercice 1

Simplifie chacun des nombres suivants :

$$A = \frac{e^6}{e^3} \quad ; \quad B = \frac{e^{-3}}{e^{-7}} \quad ; \quad C = \frac{e^5 \times e^{-2}}{e^3} \quad ; \quad D = e^6 \times e^{-4} \quad ; \quad E = (e^{-4})^3$$

Exercice 2

Simplifie les expressions suivantes :

a) $(e^x)^3 e^{2x}$

b) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2}$

c) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

Exercice 3

Simplifie chacune des expressions a, b et c suivantes : $a = \frac{e^{2x}}{e^x}$; $b = \frac{e^{-2x}}{e^{-3x}}$; $c = \frac{e^{5x} \times e^{-2x}}{e^{-x+2}}$.

Exercice 4

Simplifie l'expression suivante : $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

Exercice 5

Développe l'expression suivante : $(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})$.

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations proposées :

a) $e^{3-x} = 1$

b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

c) $2 - e^x = 0$

d) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$

e) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

f) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}}$

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x en posant $X = e^x$.

a) $e^{2x} + e^x + 3 = 0$; b) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$; c) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$; d) $-3e^{2x} - 9e^x + 12 = 0$.

Exercice 8

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $e^{3x} - e^x = 0$; b) $(5 - x)(e^{2x} - 1) = 0$; c) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$; d) $\frac{x(e^x - 1)}{x^2 + 1} = 0$.

Exercice 9

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $e^{x^2+x+1} = e \times e^{x+3}$; b) $(x^2 + x - 2)(e^{2x+1} - 1) = 0$; c) $\frac{e^{-x+2} - e}{x^2 + 1} = 0$.

Exercice 10

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $e^x - 3 \geq 0$

b) $2e^{2x} - 3e^x - 2 \leq 0$

Exercice 11

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x .

a) $e^{x+1} \geq 1$; b) $e^{-x+1} \leq 1$; c) $e^{-2x+1} \geq e^x$; d) $e^{x^2+1} \geq e^{x-2}$.

Exercice 12

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x après avoir déterminé leur ensemble de validité :

a) $e^2 - e^{2x} \geq 0$; b) $(e^x + 1)(e^{-x} - 1) \leq 0$; c) $\frac{e^x + 1}{x + 2} \geq 0$; d) $\frac{x(e^{-x} - 1)}{x - 3} \geq 0$.

Exercice 13

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes d'inconnue x après avoir déterminé leur ensemble de validité :

a) $e^{2x+3} \leq e^{-x}$; b) $(3x^2 - x + 2)(e^{-x} - 1) \leq 0$; c) $(3x + 1)e^{x-1} < 0$; d) $\frac{x^2 + x - 2}{e^{2x} - 1} \geq 0$.

Exercice 14

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = e^x - 2x + 1$, $a = -\infty$; b) $g(x) = -e^x - x - 3$, $a = +\infty$;
c) $h(x) = xe^x - x^2 - 2x + 2$, $a = 0$.

Exercice 15

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = (2x + 1)e^x + \frac{1}{x}$, $a = +\infty$;
b) $g(x) = (2x - 3)e^{-x}$, $a = -\infty$;
c) $h(x) = 2 \times \frac{e^x - 1}{x} + x^2$, $a = 0$.

Exercice 16

Détermine la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

a) $f(x) = (2 - 3x)e^x$; b) $g(x) = (x + 1)e^{-x}$; c) $h(x) = 3 - 2x + e^x$.

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule la fonction dérivée de f .

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = x + 2 - e^x$ c) $f(x) = (1 - x)e^x$

Exercice 18

Détermine la dérivée de chacune des fonctions f , g et h suivantes :

$f(x) = x^2 e^x$; $g(x) = \frac{e^x}{x-1}$; $h(x) = e^x - 3x + 1$.

Exercice 19

Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = (-2x+5)e^x \quad ; \quad g(x) = (-3x^2+5)e^x \quad ; \quad h(x) = \frac{e^x-1}{x+1} \quad ; \quad k(x) = \frac{e^x+2}{e^{x-1}} .$$

Exercice 20

Calcule la dérivée et étudie les variations de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = xe^x - 1 \quad ; \quad g(x) = x - 1 + e^x .$$

Exercice 21 (Terminale A1 uniquement)

Dans chacun des cas suivants détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{-4x} + 2x$

b) $f(x) = 2xe^{x^2}$

c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

d) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

Exercice 22 (Terminale A1 uniquement)

Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x^2e^{x^3} \quad ; \quad g(x) = e^x + 1 \quad ; \quad h(x) = 2xe^{x^2-1} .$$

Exercice 23 (Terminale A1 uniquement)

Trouve une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$f : x \mapsto (2x-3)e^{-x^2+3x+1}$$

3-2. Exercices de renforcement

Exercice 24

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Choisis la réponse exacte.

N°	Affirmations	A	B	C
1	Pour tout $x \neq 0$, l'expression $\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}$ est égale à....	$\frac{e^x-1}{1-e^{-x}}$	$\frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$	$\frac{e^x-e^{-x}}{1-e^{-x}}$
2	L'équation $e^{x^2-x-1} = e^{3x-4}$ a pour solution....	$x=1$ et $x=-3$	$x=-1$ et $x=3$	$x=1$ et $x=3$
3	La limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $e^x - 2x$	$+\infty$	$-\infty$	0
4	La dérivée de la fonction f définie pour tout réel x , par : $f(x) = xe^{2x}$ est :	$f'(x) = 2xe^{2x}$	$f'(x) = (2x-1)e^{2x}$	$f'(x) = (1-2x)e^{2x}$

Exercice 25

Simplifie les expressions suivantes :

a) $e^x \times e^{-x}$; b) $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2$; c) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

Exercice 26

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Détermine la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

2) Détermine la limite en 0 de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{e^x - 1}{3x}$.

Exercice 27

Détermine la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$; b) $g(x) = \frac{e^x + 2}{x + 2}$; c) $h(x) = \frac{xe^x}{x + 1}$.

Exercice 28

Détermine la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par: $f(x) = e^x - 2x + 3$.

Exercice 29

Pour chacune des fonctions suivantes ;

a) Calcule la dérivée.

b) Etudie les variations.

$f(x) = xe^x - 1$; $g(x) = (-3x^2 + 5)e^x$; $h(x) = x - 1 + e^x$.

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)e^x$.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Calcule la dérivée f' de f .

c) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

Exercice 31

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $e^{x^2} = e^{5x-4}$; b) $e^x - e^{-x} = 0$; c) $(e^{-x} - e)(e^{3x} + 5) = 0$

Exercice 32

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $e^{-x} \leq e^x$; b) $e^{x+3} - e^{x^2+x-1} \leq 0$.

Exercice 33

Etudie le signe de chacune des expressions suivantes :

$A = (1 - x)e^{-x}$; $B = e^{3x} - e^x$; $C = e^x - 2e^{-x} + 1$; $D = e^{3x} + e^x$; $E = e^{2x} + e^x - 2$

3-3. Exercices d'approfondissement

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (2 - x)e^x$.

- a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
- b) Calcule la dérivée f' de f .
- c) Etudie les variations de f .
- d) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
- e) Trace la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé (O, I, J) .
- f) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[1 ; 2]$.
- g) Dédus-en une étude du signe de $f(x)$.

Exercice 35

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 + x + e^x$.

- a) Calcule la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- b) Calcule la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.
- c) Etudie les variations de f .
- d) Dresse le tableau de variation de f .
- e) Trace (C_f) , représentation graphique de f dans le repère orthonormé (O, I, J) .
- f) Détermine une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36

Soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

- 1- a) Calcule la limite de f en $+\infty$ et en -1 .
b) Justifie que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à (C_f) .
- 2- Calcule la dérivée f' de f .
- 3- Etudie les variations de f .
- 4- Dresse le tableau de variation de f .
- 5- Représente (C_f) dans le repère orthonormé (O, I, J) .

Exercice 37

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 - x + e^x$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. Précise l'ensemble de définition de f , noté D_f .
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x} \right)$
b) En déduis la limite de f en $+\infty$.
4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$
b) Précise la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
5. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.
b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$
c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$
d) En déduis les variations de f et dresse son tableau de variations.

6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)						

7. Trace (C) et (Δ) sur $[-3 ; 2]$

Exercice 38 (Bac A2, 2008)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty ; 2]$ par $f(x) = (-2x + 3)e^x$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1. Justifie que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.

2.a) Vérifie que pour tout élément x de $]-\infty ; 2]$, $f'(x) = (-2x + 1)e^x$

b) Etudie le signe de la dérivée f' sur $]-\infty ; 2]$.

Déduis-en les variations de f sur $]-\infty ; 2]$.

c) Dresse la tableau de variation de f.

3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Détermine les coordonnées respectives des points A et B.

4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci - dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	0,2	0,4		1,8		3,3			-7,4

5. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

4. SITUATION COMPLEXE

Exercice 39

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'une grande chaîne de magasins. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres proportionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.

Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres. Elle te sollicite pour savoir le nombre de jours qu'elle devra consacrer à la publicité.

Détermine le nombre de jours nécessaires à la grande chaîne de magasins pour faire la publicité de ces nouvelles offres.

Quelques corrigés

Exercice 38 (Bac A2, 2008)

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2xe^x + e^x = 0, \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} -2xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$2.a) \text{ pour tout élément } x \text{ de }]-\infty ; 2], f'(x) = -2e^x + (-2x + 3)e^x = (-2x + 1)e^x$$

$$\text{Donc pour tout élément } x \text{ de }]-\infty ; 2], f'(x) = (-2x + 1)e^x$$

b) Etudions le signe de la dérivée f' sur $]-\infty ; 2]$.

pour tout élément x de $]-\infty ; 2]$, $e^x > 0$.

pour tout élément x de $]-\infty ; 2]$, $-2x + 1 > 0$, $x < \frac{1}{2}$

Donc

- pour tout élément x de $]-\infty ; \frac{1}{2}]$, $f'(x) \geq 0$
- pour tout élément x de $[\frac{1}{2} ; 2]$, $f'(x) \leq 0$

Ainsi :

- pour tout élément x de $]-\infty ; \frac{1}{2}]$, f est croissante
- pour tout élément x de $[\frac{1}{2} ; 2]$, f est décroissante

c) Dressons la tableau de variation de f .

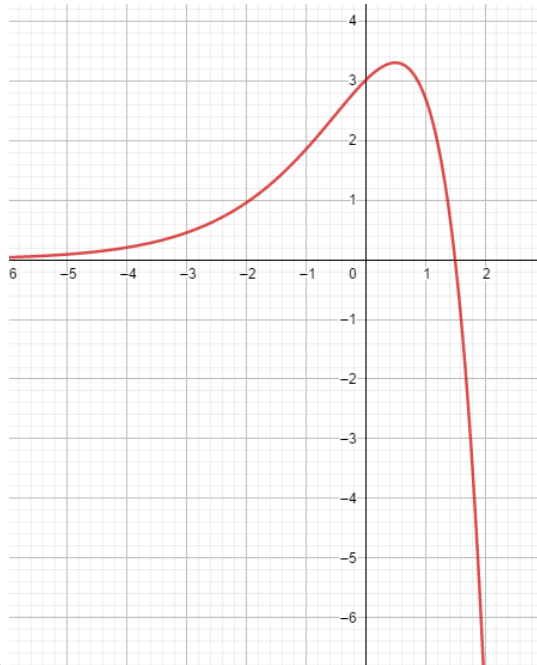
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$2e^{\frac{1}{2}}$	$-e^2$

$$3) f(0) = 3 \text{ et } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

On en déduit que : $A(\frac{3}{2}; 0)$ et $B(0; 3)$.

4)

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4	1	1,8	3	3,3	2,8	0	-7,4



5.

Situation complexe

Déterminer le nombre de jours nécessaires à la grande chaîne de magasins pour faire la publicité de ces nouvelles offres revient à déterminer le nombre de jour pour que la proportion de la population qui est au courant de ces nouvelles offres atteint 90% .

C'est-à-dire : $1 - e^{-0,21t} = 90\%$

Soit $e^{-0,21t} = 0,1$

$-0,21t = \ln 0,1$

$$t = \frac{\ln 0,1}{-0,21}$$

$$t = 11$$

La grande chaîne de magasins fera la publicité pendant 11 jours.