R.C.I. – Ministère de l'Education Nationale et de l'Alphabétisation - Direction Régionale de San Pedro

BAC BLANC REGIONAL **Coefficient : 4**
SESSION 2023 **Durée : 4 H**
Série : D

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois pages numérotée 1/3, 2/3, et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Exercice 1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation, suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction $x \mapsto 2 + cos^5x$ est une primitive sur R de la fonction : $x \mapsto -5sinxcos^4x$.
2	a étant un nombre réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln(\sqrt{a^n}) = \frac{nlna}{2}$.
3	La fonction h : $x \mapsto \ln(4 - x^2)$ a pour ensemble de définition : $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
4	Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p alors l'écart – type de X est $\sigma(X) = E(X)(1-p)$

Exercice 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet de le rendre juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé, suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Enoncés	Réponses	
1	Le système d'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} 5lnx + 2lny = 8 \\ 4lnx - 3lny = 11 \end{cases}$ a pour solution…	A	$(e^2; \frac{1}{e})$
		B	$(\frac{1}{e}; e^2)$
		C	$(e^{-2}; e^{-1})$
		D	$(e^{-1}; e^{-2})$
2	Pour $x > 0$, la fonction f définie par $f(x) = (lnx)^3$ a pour fonction dérivée la fonction f' définie par ….	A	$f'(x) = \frac{3lnx}{x}$
		B	$f'(x) = \frac{3(lnx)^2}{x}$
		C	$f'(x) = \frac{\ln(x^2)}{3x}$
		D	$f'(x) = \frac{3\ln(x^2)}{xlnx}$
		A	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

3	La forme exponentielle du nombre complexe $(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i})^3$ est égale à…	B	$2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$
		C	$2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
		D	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$
4	Le plus petit entier naturel n tel que : $1-\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0,95$ est …	A	2
		B	4
		C	3
		D	5

Exercice 3 (3 points)

Le plan est muni d'un repère ortho normal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). Unité graphique 2 cm.

On donne le polynôme complexe P tel que : $P(z) = Z^3 - (7+i)z^2 + 2(8+3i)z - 10(1+i)$

1. Soit le nombre complexe z_0 tel que : $z_0 = 1 + i$
   a) Démontre que Z_0 est un zéro du polynôme P.
   b) Déduis-en que : $P(z) = (z - z_0)(z^2 - 6z + 10)$
   c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) définie par : $P(z) = 0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives. $1 + i$; $3 + i$ et $3 - i$
   a. Calcule et écris sous forme exponentielle le nombre complexe : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$
   b. Déduis-en la nature exacte du triangle ABC.
   c. Place les points A, B et C dans le plan muni du repère (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).
   d. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. Détermine l'affixe du centre G et le rayon r de (C).

Exercice 4 (3 points)

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5. On tire simultanément deux de ces boules.

Calcule la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 »

B : « tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 »

C : « tirer deux boules portant des chiffres différents ».

2) On suppose maintenant que l'urne contient a boules portant le chiffre 1 et b boules portant le chiffre 5 avec $a + b = 10$ $(1 \leq a \leq 9)$ et $(1 \leq b \leq 9)$.

Soit X la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.

a) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Détermine l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de a.

c) Pour quelles valeurs de a, a-t-on $6 < E(X) < 8$?

Exercice 5 (5 points)

On définit la fonction f sur R par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x} + 2 \; si \; x \leq 0 \\ \frac{x \ln x}{1+x} \; si \; x > 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. unité graphique : 4cm.

I. Partie A

On donne la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + lnx$.

1) a) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   b) Détermine le sens de variation de g.
   c) Dresse le tableau de variation de g.
2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0\,;+\infty[$ et que $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$.
3) Déduis-en que : $\begin{cases} \forall\, x \in]0;\alpha[,\ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in]\alpha;+\infty[\,, g(x) > 0 \end{cases}$

II.Partie B

1) Etudie la continuité de f en 0.
2) Etudie la dérivabilité de f en 0. Donne une interprétation graphique.
3) a- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b- Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interprète le résultat obtenu.

4) Etudie le sens de variation de f sur R. (On montrera que pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$)
5) Montre que $f(\alpha) = -\alpha$ et détermine le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
6) Dresse le tableau de variation de f.
7) Construis (C_f).

Exercice 6 (5 points)

Lors d'une conférence organisée dans votre établissement sur les effets de la consommation de l'alcool sur l'organisme chez les jeunes, le conférencier a donné entre autres, les informations suivantes :

- Les recherches scientifiques démontrent clairement que l'alcool altère la capacité de conduire un véhicule en toute sécurité et, par conséquent, augmente les risques d'accident.
- La concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) pour un individu de corpulence moyenne, en fonction du temps t après une ingestion d'une boisson alcoolisée peut être modélisée par la fonction C définie sur $[0;+\infty[$ par $C(t) = 2te^{-t}$ où $C(t)$ est exprimée en gramme par litre (g / L). $C'(t)$ la dérivée de $C(t)$ est la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang et t est en heure.
- Selon la législation, le taux de concentration maximale d'alcool dans le sang pour un jeune conducteur est de 0,2 g / L.

De retour à la maison, vous trouvez votre frère aîné âgé de 20 ans, de corpulence moyenne, conducteur d'un véhicule de transport en commun buvant deux verres d'une boisson alcoolisée. Inquiet, vous cherchez à déterminer l'instant auquel la concentration d'alcool dans le sang sera maximale et à déterminer la durée d'attente nécessaire qu'il devra observer pour que son taux d'alcoolémie soit inférieur à 0,2 g / L.

1. Détermine l'instant auquel la concentration d'alcool sera maximale dans le sang du jeune conducteur.
2. Détermine la durée minimale d'attente pour le jeune conducteur avant la prise du volant en toute légalité.

Corrigé + barème terminale D

Exercice 1 (2points)

N°	Corrigé	Barème
1	VRAI	0,5
2	VRAI	0,5
3	FAUX	0,5
4	VRAI	0,5

Exercice 2 (2points)

Pour l'item 2 (Pour $x > 0$, la fonction f définie par $f(x) = (lnx)^3$ a pour fonction dérivée la fonction f' définie par .... $f'(x) = \frac{3(lnx)^2}{x}$), accorder le point à tous les élèves quel que soit le résultat.

N°	Corrigé	Barème
1	A	0,5
2	B	0,5
3	C	0,5
4	C	0 ,5

Exercice 3 (3points)

N°	Corrigé	Barème
1	$P(z) = z^3 - (7+i)z^2 + 2(8+3i)z - 10(1+i)$ a) Je démontre que $1+i$ est un zéro de P. $P(1+i) = (1+i)^3 - (7+i)(1+i)^2 + 2(8+3i)(z+i) - 10(1+i)$ $(1+i)^3 = -2+2i$; $-(7+i)(1+i)^2 = 2-14i$; $2(8+3i)(z+i) = 10+22i$ $P(1+i) = -2+2i+2-14i+10+22i-10-10i = 0$ → b) Justification correcte de $P(z) = (z-z_0)(z^2-6z+10)$ → c) La résolution de l'équation $P(z) = 0$ revient à résoudre : $\begin{cases} z-1-i=0 \\ z^2-6z+10=0 \end{cases}$ et en utilisant le discriminant pour l'équation : $z^2-6z+10=0$, on obtient : $S_C = \{1+i; 3+i; 3-i\}$ →	0,5 0,25 0,5

2	a) Je calcule et j'écris sous forme exponentielle le nombre : $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=\frac{1+i-3-i}{3-i-3-i}=\frac{-2}{-2i}=-i$ La forme exponentielle le nombre : $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$ car $arg(-i)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	0,5
	b) Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en B	0,25
	c) Voir annexe	0,5
	d) Puisse que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B et inscrit dans le cercle, alors son centre G est le milieu du segment [AC]. Son affixe est définie par : $z_G=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{1+i+3-i}{2}=2$	0,25
	et son rayon est r = $\lvert z_G-z_A\rvert \Rightarrow$ r = $\lvert 2-1-i\rvert=\lvert 1-i\rvert=\sqrt{2}$	0,25

Exercice 4 (3points)

<table>
<tr><th>N°</th><th>Corrigé</th><th>Barème</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$Card(\Omega)=C_{10}^{2}=45$
$Card(A)=C_4^2=6$ $P(A)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.
$Card(B)=C_6^2=15$ $P(B)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.
$Card(C)=C_6^1\times C_4^1=24$ $P(C)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$.</td><td>0,25×
3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a) $a+b=10$ $(1\leq a\leq 9)et$ $(1\leq b\leq 9)$. Loi de probabilité de X
Les valeurs prises par X sont : 2 ; 6 et 10. $X=\{2;6;10\}$ avec $b=10-a$
$$P(X=2)=\frac{C_a^2}{45}=\frac{a(a-1)}{90}$$
$$P(X=6)=\frac{C_a^2\times C_b^1}{45}=\frac{a(10-a)}{45}$$
$$P(X=10)=\frac{C_b^2}{45}=\frac{(10-a)(9-a)}{90}$$
<table>
<tr><td>x_i</td><td>2</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{a(a-1)}{90}$</td><td>$\frac{a(10-a)}{45}$</td><td>$\frac{(10-a)(9-a)}{90}$</td></tr>
</table>
b) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$
$$E(X)=\frac{2(a^2-a)+6(20a-2a^2)+10(90-19a+a^2)}{90}$$</td><td>0,25
1
0,5</td></tr>
</table>

	$E(X) = 10 - \frac{4}{5}a.$ c) $6 < E(X) < 8 \Leftrightarrow 6 < 10 - \frac{4}{5}a < 8 \Leftrightarrow \frac{10}{4} < a < \frac{20}{4}$ $a \in]2{,}5\,;5[$ donc $a \in \{3\,;4\}$.	0,5

Exercice 5 (5points)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x} + 2 \; si \; x \leq 0 \\ \frac{x\ln x}{1+x} \; si \; x > 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. unité graphique : 4cm.

N°	Corrigé	Barème
Partie A	1- On définit la fonction g sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$. a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(1 + x + \ln x). = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(1 + x + \ln x). = +\infty$	0,125 x 2
	b) La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall\, x \in]0\,;+\infty[, g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $g'(x) = \frac{x+1}{x}$ $\forall\, x \in]0\,;+\infty[, g'(x) > 0$, donc g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.	0,25
	c) Tableau de variation $\begin{array}{c\|c\|l} x & 0 & \qquad\qquad +\infty \\ \hline g'(x) & & \qquad + \\ \hline g(x) & & -\infty \nearrow +\infty \end{array}$	0,25
	2- g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, et $g(]0\,;+\infty[) = \mathbb{R}$, comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$. De plus $g(0{,}2) \times g(0{,}3) = -0{,}409 \times 0{,}096 = -0{,}039 < 0$. D'où $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$.	0,5 0,25
	3- g étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, $\forall x \in]0;\,\alpha[, g(x) < g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(\alpha) < g(x) \Leftrightarrow 0 < g(x)$.	
Partie B	1) Etudions la continuité de f en 0 ; $f(0) = 2(3 \times 0 - 1)e^{0} + 2 = 0$ - $\lim\limits_{x\to 0_<} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[2(3x-1)e^{-2x} + 2] = 0$ - $\lim\limits_{x\to 0_>} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln x}{1+x} = 0$. Car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0_<} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_>} f(x) = f(0)$ donc la fonction f est continue en 0.	0,25
	2) Etudions la dérivabilité de f en 0. $\lim\limits_{x\to 0_<}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2(3x-1)e^{-2x}+2}{x}$ $= \lim\limits_{x\to 0} 2[3e^{-2x} - \frac{e^{-2x}-1}{x}]$ En posant $X = -2x\,; x = -\frac{X}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0} 2[3e^{-2x} - \frac{e^{-2x}-1}{x}] = \lim\limits_{X\to 0} 2[3e^{X} + 2\frac{e^{X}-1}{X}] = 10$ car $\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^{X}-1}{X} = 1$. $\lim\limits_{x\to 0_>}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+x} = -\infty \; car \lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$. La fonction f est dérivable à gauche en 0, mais n'est pas dérivable à droite en 0. f n'est donc pas dérivable en 0. Par conséquent, la courbe (C_f) de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 10 et une demi-tangente verticale à droite.	0,25x2 0,25

3) $a - \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[2(3x-1)e^{-2x}+2) = -\infty$

Car $\lim_{x\to-\infty} 3x-1 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xlnx}{1+x} = \lim_{x\to+\infty}[\frac{x}{1+x} \times lnx] = +\infty$ → 0,125x2

$b - \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}[\frac{lnx}{x} \times \frac{x}{1+x}] = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1$ → 0,25

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI).

) - Pour $x \leq 0, f'(x) = [2(3x-1)e^{-2x}+2)]' = (10-12x)e^{-2x}$ → 0,25

Pour $x \leq 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $10-12x$ car $e^{-2x} > 0$.

$10-12x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{6}$. Donc $\forall x \in]-\infty; 0], f'(x) > 0$, d'où f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$. → 0,25

- Pour $x > 0, f'(x) = \left(\frac{xlnx}{1+x}\right)' = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$ → 0,25

$\forall x \in]0; +\infty[, (1+x)^2 > 0$; donc le signe de f' dépend du signe de g.

D'après la partie I) ; - $\forall x \in]0; \alpha[, f'(x) < 0$; donc f est continue et strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ → 0,25

- $\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est continue et strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

5) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + ln\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow ln\alpha = -\alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha ln\alpha}{1+\alpha} = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{1+\alpha} = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{1+\alpha} = -\alpha.$$ → 0,25

Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xlnx}{1+x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; lnx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$$ → 0,25

Il y a donc deux points d'intersection ; O(0 ;0) et le point de coordonnées (1 ;0).

6) Tableau de variation

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−		+	
$f(x)$			0				$+\infty$
	$-\infty$ ↗		↘		$-\alpha$ ↗		

→ 0,25

7) Voir feuille annexe.. → 0,25

Exercice 6 (5points)

CRITERES	INDICATEURS	BAREME
CM1 :	Pour répondre aux différentes questions posées, je vais : - utiliser la leçon sur les limites et les dérivabilités de fonction. Pour la question 1 - Etudier les variations de la fonction C - Déterminer éventuellement les solutions de l'équation $C'(t) = 0$ - En déduire l'instant auquel la concentration d'alcool est maximale dans le sang du jeune conducteur Pour la question 2 - Déterminer éventuellement dans les solutions de l'équation $C(t) = 0,2$ celle qui convient - Trouver si possible une approximation de la valeur de t choisie - Déduire la durée minimale d'attente du jeune conducteur avant la prise du volant	0,75 point 1/7 → 0,125 2/7 → 0,5 3/7 → 0,625 4/7 → 0,75

CM2 :	1°) - Les variations de la fonction C C est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $C'(t) = 2(1-t)e^{-t}$ $\forall\, t \in]0;1[, C'(t) > 0$ et $\forall\, t \in]1;+\infty[, c'(t) < 0$ C est strictement croissante sur $]0;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ - La résolution de l'équation $C'(t) = 0$ pour $t \in]0\,;+\infty[$ admet pour solution $t = 1$ - J'en déduis que puisque C est strictement croissante sur $[0;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et que $C'(1) = 0$ et $C(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74$, elle admet pour maximum 0,74 sur $]0;\ +\infty[$ atteint en une heure. - Donc la concentration d'alcool dans le sang sera maximale une heure après l'ingestion de la boisson. 2°) - C est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ et $C([0\,;1]) = [0\,;2e^{-1}]$ or $0{,}2 \in [0\,;2e^{-1}]$. Donc l'équation $C(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_1 dans $[0;1]$ - C est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et $C(]1;+\infty[) =]\lim_{t\to+\infty} C(t)\,;2e^{-1}] =]0\,;2e^{-1}]$ or $0{,}2 \in [0\,;2e^{-1}]$. Donc l'équation $C(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_2 dans $]1;+\infty[$ **En conclusion**, l'équation $C(t) = 0{,}2$ admet deux solution sur $[0;+\infty[$ - Démarche pour le choix de t. Pour $t \in [t_1\,;t_2]$, $C(t) > 0{,}2$ donc t_1 n'est pas convenable car $t_1 < 1h$ et à partir de $t_2 > 1h$, $C(t) < 0{,}2$ donc le temps convenable est t_2. - Approximation de la valeur de t_2 Par approximation, on découvre que $C(3{,}6) < C(t_2) < C(3{,}5) \Rightarrow 3{,}5 < t_2 < 3{,}6$ car C est décroissante sur $]1;+\infty[$ donc une valeur approchée de t_2 est $3{,}5h$. - **En conclusion**, la durée maximale d'attente du jeune conducteur avant la prise du volant 3h30min.	2,5 points 1 indic/10→ 0,25 2 indic/10→ 0,75 3 indic/10→ 1,25 4 indic/10→ 1,75 5 indic/10→ 2,25 6 indic/10→ 2,5
CM3 :	-Réponses attendues : - la concentration d'alcool dans le sang sera maximale une heure après l'ingestion de la boisson. - la durée maximale d'attente du jeune conducteur avant la prise du volant 3h30min. - la qualité des enchainements de la démarche	1,25 point 1 indic/ 3→ 0,75 2 indic/ 3→ 1,25
CP :	- Concision - Originalité - Bonne présentation	0,5 point : 1 indic/ 3→ 0,25 2 indic/ 3→ 0,5