BAC BLANC REGIONAL **Coefficient : 4**
SESSION AVRIL 2023 **Durée : 4H**

MATHEMATIQUES

SERIE D

Ce sujet comporte trois (03) pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3
Tout modèle de calculatrice non graphique est autorisé

EXERCICE 1 : 2 points

Pour chacune des affirmations ci-dessous, recopie le numéro suivi de **vrai** si elle est vraie ou suivi de **faux** si elle fausse.

1	$(\sqrt{3}+i)^3$ est un nombre réel
2	Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres : $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$; alors la variance V(X) est égale à $\frac{15}{4}$.
3	La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ admet un prolongement par continuité en 1.
4	Si la fonction h définie par $h(x) = 3x - 1$ et h^{-1} la bijection réciproque de h , alors $(h^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$

EXERCICE 2 : 2 points

Pour chacun des énoncés ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une seule est vraie. Sur ta feuille de copie, écris le numéro de chaque énoncé suivi de de la lettre qui correspond à la bonne réponse.

N°	Énoncé	Réponses	
1	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé. On donne A $(1+i)$ et B$(-2i)$. L'ensemble des points M(z) tels que : $\lvert z-1-i\rvert = \lvert z+2i\rvert$ est	*A*	Le cercle de diamètre $[AB]$
		B	Le cercle de diamètre AB
		C	La médiatrice du segment $[AB]$
2	Une primitive H de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 6\sin(3x+2)$ est :	*A*	$H(x) = 2\cos(3x+2)$
		B	$H(x) = -2\cos(3x+2)$
		C	$H(x) = 6\cos(3x+2)$
3	On donne les nombres complexes suivants : A = 2 + i et B = 4 − 3i. La forme algébrique du quotient $\frac{A}{B}$ est	*A*	$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$
		B	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$
		C	$-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$
4	La transformation du plan d'écriture complexe : $z' = (-1+i)z+1$ est :	*A*	Une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$
		B	Une similitude directe d'angle $\frac{3\pi}{4}$
		C	Une similitude directe d'angle $-\frac{3\pi}{4}$

EXERCICE 3: 3 points

On considère le polynôme à variable complexe P définie par :

$$P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$$

1. Justifie que $2i$ un zéro de P.
2. Déduis-en trois nombres complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$
3. Sachant que $-1-3i$ et $1+3i$ sont les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$.
   a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (5-i)z + 8 - 4i = 0$
   b. On pose $P(z) = (z-2i)(z^2 - (5-i)z + 8 - 4i)$
   Déduis-en de tout ce qui précède les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$
   A, B et C sont trois points d'affixes respectifs : $z_A = 3 + i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 2 - 2i$.
   a. Place les points A, B et C dans le plan complexe.
   b. Calcule le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduis-en la nature du triangle ABC.
   c. Détermine l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme, puis construis le parallélogramme ABCD.

EXERCICE 4 : 3 points

Dans tout cet exercice on donnera la valeur exacte de chaque résultat.
Grace à un système de détecteur, une borne de péage automatique peut délivrer des tickets à deux hauteurs différentes selon le véhicule détecté afin que le conducteur ne soit pas obligé de descendre pour le saisir :

- S'il s'agit d'une voiture, d'une moto ou d'une camionnette, le ticket sort en bas ;
- S'il s'agit d'un camion, le ticket sort en haut.

La société d'autoroute a modélisé le fonctionnement défectueux de l'une de ces bornes de péage :

- Lorsqu'un camion passe, le ticket sort en haut que deux fois sur trois ;
- Lorsqu'un autre type de véhicule passe, son conducteur est contraint de descendre pour saisir son ticket une fois sur quatre.

On estime qu'à cette borne de péage 60% des véhicules sont des camions. On considère les évènements suivants :

- C : « Le véhicule qui se présente est un camion »
- H : « Le ticket sort en haut »
- B : « Le ticket sort en bas ».

1. a) Démontre que : $P(C) = \frac{3}{5}$; $P_C(H) = \frac{2}{3}$ et $P_{\bar{C}}(H) = \frac{1}{4}$
   b) Construis un arbre de probabilité présentant la situation
   c) Justifie que la probabilité pour que le ticket sorte en haut est égale à $\frac{1}{2}$.
   d) Déduis-en la probabilité que le véhicule soit un camion sachant que le ticket sort en haut.
2. Démontre que la probabilité qu'un conducteur ne soit pas obligé de descendre de son véhicule pour saisir le ticket vaut $\frac{7}{10}$. (On remarquera que le conducteur descend pour saisir son ticket si le véhicule est un camion et le ticket sort en bas ou le véhicule n'est pas un camion et le ticket sort en haut)
3. À cette bonne de péage, les tarifs sont de 1250F CFA pour les camions et 750F CFA pour les autres véhicules. Mais à cause du fonctionnement défectueux de cette borne de péage, la société fait une remise de 250FCFA à chaque fois qu'un conducteur est contraint de descendre pour saisir son ticket. On note X, la variable aléatoire égale au tarifs payé par un conducteur à cette borne de péage.
   a) Démontre que la loi de probabilité de X est définie par le tableau suivant :

$X = x_i$	500	750	1000	1250
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

   b) Justifie que l'espérance mathématique de X est 975 puis interprète ce résultat.

EXERCICE 5 : 5 points

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)(2e^x - 1)$.
(C_f) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité $2\ cm$.

Partie A

Soit g la fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - e^{-x}$
Le tableau ci-dessous est le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1. a) Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$.
   b) Vérifie que $\alpha \in]0,3\ ;\ 0,4[$.
2. Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\,\alpha[,\ g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;\,+\infty[,\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1. a) Justifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donne une interprétation graphique des résultats obtenus
   b) Justifie que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
2. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}\,; f(x) = 1 - x + 2(x - 1)e^x$
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
   c) Étudie les positions relatives de (C_f) par rapport à (D).
3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}\,; f'(x) = e^x g(x)$.
   b) Déduis-en les variations de f puis dresse le tableau de variation de f.
4. a) Justifie que $-ln2$ et 1 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
   b) Déduis-en les coordonnées des points d'intersections A et B de (C_f) et de l'axe des abscisses. On choisira : $x_A < x_B$ (x_A et x_B étant les abscisses respectives de A et B)
5. Justifie qu'une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 est $y = -x - 1$.
6. Trace les droites (D) et (T), puis construis (C_f). (On prendra $\alpha = 0,35$ et $f(\alpha) = -1,2$)

EXERCICE 6 : 5 points

Un commerçant de meubles de luxe achète ses articles en Turquie. Lorsqu'il achète en ligne les frais de transport sont inclus dans le coût de la marchandise et le fournisseur se charge de l'expédition. Cette fois-ci, dans l'intention d'accroître ses bénéfices, il décide de faire le déplacement. Mais avant, il échange avec une société de transport IMPORT-EXPORT ; il ressort de cet échange que les articles aussi fragiles que les siens ont 75% de chance de ne pas être endommagé durant le transport.

Il veut savoir la quantité minimale d'article qu'il doit acheter afin qu'il ait plus de 99% de chance qu'au moins un article ne soit endommagé. Il te demande de l'aider moyennant une récompense.

En t'appuyant sur les connaissances mathématiques au programme, aide-le.