BACCALAUREAT BLANC
SESSION 2023

Série D : Coefficient: 4
Durée: *4h*

MATHEMATIQUES

SERIE D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1|3, 2|3 et 3|3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Enoncés		Réponses proposées
1	S'il existe un nombre réel l, une fonction g définie sur $]a; +\infty[$ tel que $\forall x \in]a; +\infty[$, $\|f(x)+l\| \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors :	A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$
		B	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -l$
		C	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
2	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a; +\infty[$, alors $f([a; +\infty[)$ est égale à :	A	$[f(a); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$
		B	$]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); f(a)]$
		C	$]-\infty; f(a)]$
3	z et z' sont deux nombres complexes non nuls, d'arguments respectifs θ et θ'. Un argument du quotient $\frac{z}{z'}$ est égal à :	A	$\frac{\theta}{\theta'}$
		B	$\theta + \theta'$
		C	$\theta - \theta'$
4	Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = -1 + 2i$. L'ensemble des points M d'affixe Z, tel que $\|Z - i\| = \|Z + 1 - 2i\|$ est :	A	La droite (AB) privée des points A et B
		B	La médiatrice du segment [AB]
		C	Le cercle de diamètre [AB]

EXERCICE 2 (2 points)

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque affirmation, suivi de vrai (V) si l'affirmation est vraie ou faux (F) si celle-ci est fausse.

N°	Affirmations
1	L'équation $x^3 + x - 7 = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$
2	La fonction h définie de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{8-2x}{\sqrt{x}-2}$ admet un prolongement par continuité en 4
3	$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux nombres complexes. On a : $z \times z' = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$
4	Si z est un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{12}$ alors $z^6 = 8$

EXERCICE 3 (2 points)

Une urne contient trois (03) pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « pile » et un côté « face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « face ». On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancés successifs de cette pièce. On considère les évènements suivants :

B : "la pièce prise est normale" ;

$\bar{B}$: "la pièce prise est truquée" ;

C : "On obtient « pile » au premier lancé" ;

F_n : "On obtient « face » pour les n premiers lancés", n étant un entier naturel non nul.

1- a) Calcule la probabilité de l'évènement B.

b) Calcule la probabilité de l'évènement C sachant que B est réalisé.

2- a) Calcule la probabilité de chacun des évènements $C \cap B$ et $C \cap \bar{B}$.

b) En déduis que $P(C) = \frac{1}{3}$.

3- Montre que $P(Fn) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$.

EXERCICE 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphie est 2 cm.

1- Résous l'équation : $Z \in \mathbb{R}$, $Z^2 + (1 - 3i)Z - 4 = 0$.

2- On pose $\forall Z \in \mathbb{C}, P(Z) = Z^3 + (1 - i)Z^2 + (2 + 2i)Z - 8i$.

a) Justifie que : $P(-2i) = 0$.

b) Justifie que $\forall Z \in \mathbb{C}, P(Z) = (Z + 2i)[Z^2 + (1 - 3i)Z - 4]$.

c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $\forall Z \in \mathbb{C}, P(Z) = 0$.

3- Soit A, B et C les points d'affixe respectives $-2i, -2 + 2i$ *et* $1 + i$.

On note D le symétrique de A par rapport au point O.

a) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

EXERCICE 5 (5 points)

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-1-x\ln x}{x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) d'unité graphique 2cm.

1- Calcule la limite de f en 0. Interprète graphiquement le résultat

2-a) Calcule les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement les résultats.

3-a) Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$.

b) Détermine le sens de variation de f.

4- Dresse le tableau de variation.

5-a) Démontre que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectives α *et* β tels que $\alpha < \beta$.

b) Justifie que : $6{,}3 < \beta < 6{,}4$.

6- Trace $(\mathcal{C})$ dans le repère (O ; I ; J). On prendra $\alpha = 0{,}3$ et $\beta = 6{,}35$.

EXERCICE 6 (5 points)

Une épicerie reçoit un lot de pommes dont 25% sont avariées. Un employé est chargé de trier le stock et de préparer des paquets de 5 pommes chacun pour la vente. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine d'extraire les pommes avariées.

Par conséquent, chaque client qui trouve, dans le paquet qu'il achète, 2 pommes ou plus qui sont avariées, revient se plaindre. Ce jour-là, l'épicerie a eu 100 clients ; chaque client ayant acheté exactement 1 paquet.

En vue de se préparer à d'éventuels remboursements, M. Gadou, le propriétaire de l'épicerie, souhaiterait savoir combien de plaintes en moyenne il y aura, ce jour-là. Il te sollicite alors pour l'aider.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de M Gadou.