



**MATHEMATIQUES**

**SÉRIE : A1**

*Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2 / 2. Chaque candidat viendra avec une feuille de papier millimétré. L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

**EXERCICE 1 (2points)**

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée. Ecris sur ta copie le numéro de l'affirmation suivi de VRAI lorsque l'affirmation est vraie ou de FAUX lorsque l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Si $B$ et $\bar{B}$ sont deux événements contraires d'un univers $\Omega$ et $P$ une probabilité définie sur $\Omega$ , alors $P(\bar{B}) = -P(B) + 1$ .
2	Soit $f$ une fonction et $(Cf)$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère $(O, I, J)$ . La tangente $(T)$ à $(Cf)$ au point d'abscisse $e$ est donnée par $(T): y = f(e)(x - e) + e$ .
3	La dérivée de la fonction $x \mapsto ax - e^x$ , où $a \neq 0$ est la fonction $x \mapsto a - xe^x$ .
4	Lorsque la dérivée d'une fonction $f$ s'annule en $a_0$ et changent de signe, alors la fonction $f$ admet un extremum relatif en $a_0$ .

**EXERCICE 2 (2points)**

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est correcte. Ecris sur ta copie le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse choisie

N°	AFFIRMATIONS	REPNSES		
		A	B	C
1	L'équation $(E): x^2 - 5x - 6 = 0$ admet	une solution dans $\mathbb{R}$	aucune solution dans $\mathbb{R}$	deux solutions dans $\mathbb{R}$
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \frac{\ln x}{x})$ est égale	$+\infty$	$-\infty$	0
3	L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x - 1) + \ln(x - 3) = \ln(3)$ dans $\mathbb{R}$ est	$\{0; 4\}$	$\{\frac{7}{2}\}$	$\{4\}$
4	Le nombre $e^{10}(e^{-2})^5$	$e^{-100}$	1	$e^{13}$

**EXERCICE 3 (4points)**

La commission de discipline d'un lycée du PORO a convoqué 14 élèves témoins de perturbations de cours pour congés anticipés dans l'établissement. La commission a été renseigné sur le fait que 5 de ces témoins ont été complices des faits mais elle ignore leurs identités.

Dans le but d'identifier les complices, la commission a auditionné un groupe de trois (03) élèves pris au hasard parmi les 14.

1 - Démontre qu'il y a 364 façons de composer ce groupe de 3 élèves.

2- On note A l'évènement : « Aucun élève du groupe choisi n'est complice » et B l'évènement : « Tous les élèves du groupe choisi sont complices ».

Justifie que  $P(A) = \frac{3}{13}$  et  $P(B) = \frac{5}{182}$ .

3- Calcule la probabilité de l'évènement C: « avoir au moins un élève complice ».

4- On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de complices figurants dans le groupe choisi. On admet que les valeurs prises par  $X$  sont 0; 1; 2 et 3.

- Etablis la loi de probabilité de  $X$ .
- Détermine l'espérance mathématique de  $X$ .

(On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles)

#### **EXERCICE 4 (7points)**

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1-x}{2} + \ln x$ . On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, I, J)$  d'unités :  $OI = 2 \text{ cm}$ ,  $OJ = 5 \text{ cm}$ .

- Justifie que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  puis interprète graphiquement le résultat obtenu.
- On admet que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x})$ . Déduis la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Démontre que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2-x}{2x}$
- Justifie que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; 2[$  et strictement décroissante sur  $]2; +\infty[$
  - Dresse le tableau de variation de  $f$ .
- Démontre que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]3.5; 4[$ .
- Montre qu'une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1 est :  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .
- Construis la courbe  $(C)$  et  $(T)$  dans un même repère. (on pourra s'aider de la table des valeurs sur  $]0; 6[$  ci-dessous pour construire la courbe)

$x$	0.25	0.5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-1	-0.4	0	0.2	0.1	-0.1	-0.4	-0.7

- En admettant que  $H(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction  $h(x) = \ln x$ , trouve une primitive de la fonction  $f$
  - Calcule l'aire de la partie délimitée par la courbe  $(C)$ , la tangente  $(T)$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 3.5$ .

#### **EXERCICE 5 (5points)**

A l'occasion de la 34<sup>e</sup> édition de la Coupe d'Afrique des Nations (CAN) côte d'Ivoire 2023, un jeune étudiant s'est spécialisé dans l'achat et la vente de tee-shirts aux couleurs des équipes qualifiées. Il peut recevoir de son fournisseur entre 100 et 300 tee-shirts par jour. On suppose que cette quantité est vendue dans sa totalité.

Le bénéfice journalier, exprimé en milliers de francs réalisé par la vente de  $x$  centaines de tee-shirts est modélisé sur l'intervalle  $[1; 3]$  par la fonction  $B$  définie par  $B(x) = -10x^2 + 30x$ .

Ce jeune voulant accroître le bénéfice de son activité te sollicite afin de connaître le nombre de tee-shirts à vendre par jour pour que son activité lui procure un bénéfice maximal.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances en mathématiques, réponds à la préoccupation du jeune.