BACCALAURÉAT BLANC REGIONAL — **Coefficient : 5**
SESSION : MARS 2024 — **Durée : 4 h**

MATHEMATIQUES

Série C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3 ,2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Le candidat utilisera un (01) feuille de papier millimétré

Exercice 1 *(2 points)*

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation ci-dessous suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si celle-ci est fausse.

N°	Affirmations
1	Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[-4;3]$ et que $f([-4;3]) = [-1;0]$ alors l'équation $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ admet une unique solution dans $[-4;3]$
2	Dans le plan muni du repère orthonormé(O,I,J), l'ensemble des points dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient $y^2 = \frac{-3}{2}(x-1)$ est une parabole de paramètre $\frac{3}{4}$
3	Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I
4	Pour tout nombre entier naturel n, $e^{-i\frac{n\pi}{2}} = (-i)^n$

Exercice 2 *(2 points)*

Pour chaque énoncé ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Ecris sur ta copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

N°	Enoncés	Réponses	
1	L'écriture décimale du nombre $\overline{ac2}^3$ est …	A	$a + 3c + 18$
		B	$9a + 3c + 2$
		C	$a + 3c + 2$
2	Pour tout nombre entier naturel n, si le nombre a divise $n+4$ et le nombre a divise $2n+3$ alors a divise …	A	5
		B	6
		C	7
3	Soit le nombre complexe $a = (-1+i)(\cos\frac{5\pi}{8} - i\sin\frac{5\pi}{8})$ Un argument de a est ….	A	$\frac{\pi}{8}$
		B	$\frac{11\pi}{8}$
		C	$\frac{5\pi}{4}$
4	L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ est ….	A	$]0;+\infty[$
		B	$]-\infty;1[$
		C	$]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

Exercice 3 *(3 points)*

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

A. 1.a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

b) Déduis-en le sens de variation de la suite (U_n)

2. Démontre que la suite (U_n) est convergente.

B. L'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de la limite de la suite (U_n).

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

1. Démontre que : $\forall n \in N^*,\ 0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$
2. On admet que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\},\quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

   a) Déduis-en que $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

   b) En utilisant les questions précédentes, détermine la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de : $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$
3. a) Vérifie que : $\forall n \geq 1\ ,\ f(n) + fn + 1) + \cdots + f(2n) = U_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$

   b) Détermine la limite de la suite (U_n)

Exercice 4 *(3 points)*

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(0; 1; 1), B(1; 2; -2), C(-1; 2; 0)$ et $K(1; -2; 1)$.

On note G le barycentre des points pondérés $(A; -2), (B; 1), (C; -1)$ et (P) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $(-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AB} = 0$.

1. Justifie que le point G est de coordonnées $(-1; 1; 2)$.
2. a) Démontre que : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB} = 0$.

   b) Déduis-en que (P) est le plan d'équation cartésienne : $x + y - 3z + 6 = 0$
3. Soit (Q) le plan d'équation cartésienne $-x + y - z - 2 = 0$

   Démontre que les plans (P) et (Q) sont sécants.
4. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

   a) Démontre qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in R)$

   b) Vérifie que le point K n'appartient pas à (D).

   c) Détermine la valeur du paramètre t pour que pour tout point $M(x, y, z)$ de la droite (D).

   le vecteur $\overrightarrow{KM}$ soit normal à (D).

   d) Déduis en la distance de K à la droite (D).

Exercice 5 *(5 points)*

On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ de représentation graphique (C) dans le repère (O, I, J) unité 2cm

1) Démontre que le point O est centre de symétrie pour (C).

2) a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) Montre que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

c) Déduis la variation de f sur $\mathbb{R}$.

3) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats.

4) Trace (C)

5) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x - ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$.

a) Etudie les variations de la fonction u.

(on admettra $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} u(x) = -\infty$))

b) Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$.

c) Vérifie que : $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$.

6) Étudie la position relative de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

7) a) Représente le symétrique (C') de (C) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

b) Justifie que (C') est la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{4}$.

Exercice 6 *(5 points)*

Pour participer à une séance de présentation des formations post-bac à la fin du deuxième trimestre un groupe d'établissements secondaires de la DRENA de Korhogo dont le vôtre, cherche des cars pour le déplacement de ses élèves. Le transporteur choisi, dispose de deux types de cars : les uns sont de 40 places et les autres de 26 places. Le nombre d'élèves concernés est compris entre 600 et 700.

Le coordonnateur se rend compte que s'il prend seulement des cars de 40 places, 12 élèves occuperont le dernier car et s'il utilise uniquement des cars de 26 places, 16 élèves occuperont le dernier car.

Il décide d'utiliser les deux types de cars de sorte que toutes les places des cars affrétés soient occupées.

Le coordonnateur désire savoir le nombre auquel il doit arrêter les inscriptions et le nombre de cars de chaque type à communiquer au transporteur mais ne sait pas comment procéder. Pour cela il esollicite.

A l'aide de tes connaissances mathématiques au programme, réponds à la préoccupation du coordonnateur.