MATHEMATIQUES

Durée : 04 heures
Coeff : 04

Série : D

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.
Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 (2 points)

On donne les énoncés et les mots ou groupes de mots : une bijection, la puissance, dérivable, indépendants.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi du mot ou groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que l'énoncé soit vrai.

1. Soit A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P.
   A et B sont … si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
2. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.
   La fonction f réalise … de K vers f(K).
3. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant f(K). La fonction composée g o f est … sur K et on a :
   $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
4. Pour tous p élément $\mathbb{Z}^*$, q élément de $\mathbb{N}^*$ et x élément de $]0\,;+\infty[$.
   On appelle x à … $\frac{p}{q}$ le nombre réel, noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque énoncé quatre informations a, b, c et d sont proposées dont une seule est vraie.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre de l'information vraie.

1. On lance successivement deux fois et de façon indépendante un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note chaque fois le numéro de la face supérieure.
   La probabilité d'obtenir 6 deux fois est …

   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{25}{36}$ c) $\frac{35}{36}$ d) $\frac{1}{36}$
2. Soit f la bijection de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$ définie par : $f(x) = x\sqrt{x}$. On note f^{-1} la bijection réciproque de f.

Pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f^{-1}(x)$ est …

a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{x}$ d) $\sqrt{x^3}$

3. On note (C) la courbe représentative de la fonction ln dans le plan muni d'un repère.

   Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est …

   a) $y = ex - 2$ b) $y = \frac{x}{e} - \frac{1}{e^2} - 1$ c) $y = ex$ d) $y = \frac{x}{e}$

4. La limite de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est …

   a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $+\infty$

EXERCICE 3 (2 points)

1. On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

   a) Détermine les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

   b) Détermine la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que : $F(0) = 2$

2. On donne la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

   Détermine une primitive H de h sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \ln(U_n + 5)$.

1. On donne les fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \ln(x + 5)$ et $g(x) = f(x) - x$.

   Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0 ; 4]$.

   a) Justifie que la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 4]$.

   b) Justifie que l'équation : $f(x) = x$, a une unique solution α comprise entre 1,93 et 1,94.

2. Justifie que : $f([0 ; 3]) \subset [0 ; 4]$.

   (On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0 ; 4]$)

3. a) Justifie que : $\forall x \in [0 ; 4]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

   b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontre par récurrence que :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{4}{5^n}$.

4. Déduis de la consigne 3b) que la suite U est convergente et donne sa limite.

EXERCICE 5 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 1cm.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+1}$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1. a) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis vérifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

   b) Interprète graphiquement l'ensemble des résultats précédents.

2. a) Justifie que pour tout nombre réel, $f'(x) = (2x^2 - 4x + 3)e^{x^2-2x+1}$.

   b) Etudie le sens de variation de f.

3. On admet que pour tout nombre réel, $f''(x) = 2(x-1)(2x^2 - 4x + 5)e^{x^2-2x+1}$.

   Justifie que le point I est un point d'inflexion de (C).

4. On admet que le point I est un centre de symétrie de (C) et que la droite (T) d'équation $y = x-1$ est tangente à (C) au point I.

   Trace (T) et (C).

EXERCICE 6 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton établissement d'enseignement secondaire, un promoteur de jeu organise un jeu de tirage de boules d'un sac qui contient 10 boules indiscernables au toucher dont 5 vertes et 5 rouges.

Le jeu se déroule de la façon suivante :

Le joueur mise 800 FCFA non remboursables, prend au hasard une boule du sac, note sa couleur puis la replace dans le sac.

- Si la boule est rouge, le jeu s'arrête.
- Si la boule est verte, le joueur tire simultanément et au hasard 2 boules du sac.
  - Pour chaque boule verte obtenue, le joueur reçoit 2000 FCFA.
  - Pour chaque boule rouge obtenue, le joueur paye 1000 FCFA.

Ton professeur de mathématiques signale à l'administration de ton établissement que le jeu est favorable au promoteur.

L'ordre est immédiatement donné au promoteur de changer la mise pour en faire un jeu équitable. Ce dernier te sollicite.
A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances en mathématiques, détermine la mise pour laquelle le jeu équitable.