



MATHEMATIQUES

Série D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1, 2 et 3.

Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Le candidat utilisera deux feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, relève le numéro suivi de V si l'affirmation est vraie ou F si elle est fausse. (Aucune justification n'est demandée)

N°	AFFIRMATIONS
1	Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I .
2	Toute suite décroissante et à termes positifs est convergente.
3	Pour tous nombres complexes non nuls z et z' , on a : $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
4	Si g est une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus si $g(-3) = 0,7$ et $g(2) = 0,03$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -3; 2[$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste. (Aucune justification n'est demandée).

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 3x + \sqrt{3}$ est la fonction ...	$x \mapsto \frac{3x^2}{2} + \sqrt{3}x$	$x \mapsto 3$	$x \mapsto \frac{3x^2}{2} + x\sqrt{3}$
2	L'ensemble des solutions de l'équation : $(3 \ln x - 1)(\ln x + 1) = 0$ est ...	$\left\{e^{\frac{1}{3}}; e^{-1}\right\}$	$\left\{\frac{1}{3}; -1\right\}$	$\left\{e^{-\frac{1}{3}}; e\right\}$
3	Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit B et C les points d'affixes respectives $2 - 2i$ et $-3i$. L'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z vérifiant $ z - 2 + 2i = z + 3i $ est ...	la droite (BC) privée des points B et C .	la médiatrice du segment $[BC]$.	le cercle de centre C et de rayon 3.
4	La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est	$x \mapsto (\ln 2) e^{x \ln 2}$	$x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$	$x \mapsto -(\ln 2) \left(\frac{1}{2}\right)^x$

EXERCICE 3 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; I; J)$. Unité graphique : 2 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = \sqrt{3} + i$, $z_C = 2i$ et

$$z_D = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- 1) a- Ecris z_A, z_B, z_C et z_D sous forme trigonométrique.
b- Place avec précision les points A, B, C et D dans le repère.
c- Démontre que le triangle OAB est équilatéral.
- 2) Soit E le point tel que le quadrilatère $DABE$ soit un parallélogramme.

Démontre que $z_E = \frac{1}{2} + i\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 4 (3 points)

La police de la ville de Korhogo a décidé d'intensifier les contrôles des motocyclistes en vue d'exiger le port du casque et de vérifier les pièces administratives afférentes à ces motos.

On dit qu'un motocycliste est en règle s'il possède toutes les pièces administratives de sa moto.

Ces contrôles effectués au cours de cette année ont révélé que :

- 40% des motocyclistes contrôlés sont en règle et parmi ces motocyclistes en règle 70% portent un casque.
- 80% des motocyclistes qui ne sont pas en règle ne portent pas de casque.

Un policier contrôle au hasard un motocycliste.

On désigne par :

R l'événement : « le motocycliste contrôlé est en règle »

C l'événement : « le motocycliste contrôlé porte un casque ».

- 1- a) Détermine $P_R(C)$ et $P_{\bar{R}}(C)$.
b) Justifie que $P(C) = \frac{2}{5}$.
c) Calcule la probabilité de l'événement « le motocycliste contrôlé n'est pas en règle et ne porte pas de casque ».
- 2- A l'issue d'un contrôle, le motocycliste paye une amende d'un montant de :
 - 2000 FCFA s'il est en règle et ne porte pas de casque.
 - 7000 FCFA s'il n'est pas en règle et porte un casque.
 - 15000 FCFA s'il n'est pas en règle et ne porte pas de casque.

Soit X la variable aléatoire qui associe le montant de l'amende payée à l'issue du contrôle.

- a) Justifie que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{0; 2000; 7000; 15000\}$.
- b) Détermine la loi de probabilité de X .
- c) Démontre que l'amende moyenne payée par un motocycliste est 8280 FCFA.

EXERCICE 5 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1 + e^{2-x})$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Unité graphique : 2 cm.

- 1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$.
 - a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = (x - 2)e^{2-x}$.

- b) Étudie les variations de h sur $\mathbb{R}$ puis dresse son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites de h).
- c) Dédus-en que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$.
- 2) On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- a) Démontre que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) .
- b) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.
Démontre que la droite (Δ) est une asymptote à (C) en $+\infty$.
- d) Justifie que (C) est au-dessous de (Δ) sur $]-\infty; 0[$ et au-dessus de (Δ) sur $]0; +\infty[$.
- 3) a) Démontre que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = h(x)$.
- b) Dédus des questions précédentes le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresse son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
- c) Justifie que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K que l'on déterminera.
On note f^{-1} la bijection réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative.
- d) Calcule $f(2)$ puis justifie que f^{-1} n'est pas dérivable en 4.
- e) Construis la courbe (C) et la droite (Δ) puis la courbe (Γ) dans le même repère.

EXERCICE 6 (5 points)

Pendant la coupe d'Afrique des nations 2023 (CAN 2023), le remplissage des stades par les spectateurs a été l'un des défis du comité d'organisation de la CAN (COCAN). Dans le stade AMADOU GON COULIBALY DE KORHOGO de 20000 places, le comité a constaté que la première journée a enregistré 13875 spectateurs et chaque spectateur occupe une seule place au stade. A la faveur d'une tournée de mobilisation faite par les autorités, ce nombre a augmenté de 3% à la seconde journée. Monsieur Silué, un passionné de football, ayant participé à cette mobilisation, voudrait savoir à partir de quelle journée toutes les places de ce stade devraient être occupées par les spectateurs si les mêmes conditions de mobilisations restaient identiques à chaque journée. Pour cela, il te sollicite. A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Silué.