CORRIGE SERIE D

CORRIGE (EXERCICE 3)

1. $U_1 = \frac{3}{4}$ et $U_2 = \frac{18}{20}$ (on peut simplifier ou non)

2.a) On a $U_0 > 0$; . $U_1 > 0$; $U_2 > 0$ (on peut se limiter à U_1 ou en faire davantage plus de vérifications) la propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2.
Soit n un entier naturel tel que $U_n > 0.$ Démontrons que $U_{n+1} > 0.$
$U_n > 0$ donc U_{n+1} qui est un quotient de termes positifs l'est également.
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n > 0$

2.b) On a : $U_0 < 1$; . $U_1 < 1$; $U_2 < 1$ (on peut se limiter à U_1 ou en faire davantage plus de vérifications) la propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2.
Soit n un entier naturel tel que $U_n < 1.$ Démontrons que $U_{n+1} < 1.$
$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 1}{1+2U_n}$. $U_n - 1 < 0$ *et* $1 + 2U_n > 0$ donc $U_{n+1} - 1 < 0$. Par conséquent, $U_{n+1} < 1.$
Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n < 1$
3.a) Démontrons que la suite (U_n) est croissante
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{1+2U_n} - U_n = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$. $U_n > 0$ et $U_n < 1$
donc $U_{n+1} - U_n > 0.$ Par conséquent $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} > U_n$. La suite ((U_n) est croissante.
3.b) La suite (U_n) est croissante et majorée (majorée par 1) donc converge. (U_n) est donc convergente.
4.a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n$ *existe et* $U_n \neq 1$ puisque $U_n < 1.$ *Donc* $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n$ existe.
b) Démontre (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{1-U_{n+1}} = \frac{\frac{3U_n}{1+2U_n}}{1-\frac{3U_n}{1+2U_n}} = \frac{3U_n}{1-U_n} = 3\,V_n$
Conclusion : (V_n) est une suite géométrique de raison 3.
c) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n = 3^n V_0$. Or $V_0 = \frac{U_0}{1-U_0} = 1$ Par conséquent, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n = 3^n$
d) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{U_n}{1-U_n} = 3^n$. Alors $3^n = (1+3^n)U_n$. On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{3^n}{1+3^n}$
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{1+3^n} = 1.$

CORRIGE (EXERCICE 4)

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

1.a) Détermination de Df
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df} \iff \boldsymbol{1 - e^{2x} > 0} \iff \boldsymbol{x < 0}.$ D'où Df $=]-\infty\,;\ 0[$.
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car qd $x \to -\infty$, $e^{2x} \to 0$
$\lim\limits_{x\to 0^\circ} f(x) = +\infty$ car $e^{2x} \to 1$ et $\sqrt{1-e^{2x}} \to 0^+$
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$: donc la droite des abscisses est une asymptote horizontale
$\lim\limits_{x\to 0^\circ} f(x) = +\infty$: donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale

2a) $\forall x < 0; f'(x) = \frac{e^x}{(1-e^{2x})\sqrt{1-e^{2x}}}$

b) $\forall x < 0; f'(x) > 0$; par conséquent, f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

c) Tenant compte des limites préalablement calculées, et prenant en compte que f est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$, puisque dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$, alors f réalise une bijection de $]-\infty\ ;\ 0[$ vers $]0\ ;\ +\infty[$. Donc K = $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Soit $y > 0$. Déterminons l'élément unique x élément de $]-\infty\ ;\ 0[$ tel que f(x) = y.

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} = y^2 - e^{2x}y^2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(1+y^2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right) \quad \text{ou } x = \ln\left(\sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}}\right).$$

Conclusion : pour tout x appartenant à K, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$.

3. Calculons $(f^{-1})'(x)$ pour tout x élément de K.

Pour tout x élément de K, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)'}{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$

CORRIGE (EXERCICE 5)

1. Probabilité que la boule tirée soit rouge :

Soit p cette probabilité :

La boule tirée est rouge et porte le numéro 1 ou la boule tirée est rouge et porte le numéro 2. Ce sont deux évènements incompatibles.

P= 0,20 + 0,80$\times$ 0,10 = 0,28

2. Soit R « l'évènement, la boule tirée est rouge » et D « l'évènement, la boule tirée porte le numéro2 ».

Nous sommes dans un cas de probabilité conditionnelle : la probabilité d'avoir une boule portant le numéro 2 sachant qu'elle est rouge.

$$p_R(\mathbf{D}) = \frac{p(R\cap D)}{P(R)} = \frac{0{,}8\times 0{,}1}{0{,}28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

3.a) Probabilité de n'obtenir aucune boule rouge ne portant pas le numéro1 :

p = $(0,8)^n$

Donc $1-(0,8)^n$ est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

b) pour déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99, nous allons résoudre l'inéquation $\mathbf{1-(0,8)^n \geq 0,99}$.

On obtient n≥ $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ soit n≥ 20,6377…. On prend n = 21

CORRIGE SITUATION COMPLEXE SERIE D

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser nos compétences sur les fonctions.
En effet, connaissant le coût de fabrication de x bibliothèques, et le prix de vente unitaire des bibliothèques, nous pouvons définir la fonction B (si elle n'est négative) égale au bénéfice réalisé sur la vente des x bibliothèques de la manière suivante :
B(x) = 32.000x − C (x).Cette fonction devrait admettre un maximum absolu en un point $m_O$appartenat à l'intervalle [10 ; 40]. Ce point m_O va être le nombre de bibliothèques à fabriquer dans le mois pour dégager un bénéfice maximal.

$B(x) = 30.000x - C(x).$

$B(x) = -10x^3 - 5000x + 32000x - 20.000 = -10x^3 + 27000x - 20000$

B est la restriction de la fonction polynôme F : $x \mapsto -10x^3 + 27000x - 20000$

B est donc dérivable sur l'intervalle [10 ; 40] et on a : ∀ x ∈ [10 ; 40], B'(x) = - 30x² +27000

$B'(x) = 30(-x^2 + 900) = -30(x-30)(x+30).$

La fonction B admet un maximum absolu au point m_O $te\ que$ m_O =30.

Le chef de l'ébénisterie peut vendre et réaliser un bénéfice maximal égal à B(30) ;
et B(30) 520.000.

Grille de correction critériée

Critères	Indicateurs	Barèmes
CM1 : Pertinence Identification du modèle correspondant au problème posé (Interprétation correcte de la situation complexe, pertinence des choix opérés sur les données de la situation)	Pour résoudre ce problème : -je vais définir la fonction B, Bénéfice - je vais rechercher le maximum de la fonction B s'il existe - Présence de calcul de la dérivée d'une fonction ; - Présence de recherche du signe de la dérivée ; - Présence d'un tableau de variation	**1poin**t 1 indic sur 4→ **0,25** 2 indic sur⟶ 4 **0,5** 3 indic sur 4⟶ **0,75** 4 indic sur 4⟶**1**pt
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation	- B(x) = B(x) = 30.000x—C(x) -Calcul de la dérivée - Détermination du signe de la dérivée -Détermination du maximum - Exactitude des formules	**2,5 points** : 1 indic sur 6 → 0,5 pt 2 indic sur 6 → 1, pt 3 indic sur 6 → 1,5 pt 4 indic sur 6→ 2,5 pt

(Concerne les étapes de la démarche) - Choix des outils appropriés - Application correcte des propriétés, règles et définitions	- Justesse de l'argumentation (détermination du nombre de bibliothèques)	
CM3 : Cohérence de la réponse – Cohérence entre les étapes de la démarche – Cohérence dans la démonstration	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche - La qualité des enchaînements de la démarche	**1 point :** 1 indic sur 3 $\rightarrow$ 0,25 pt 2 indic sur 3 $\rightarrow$0,5, pt 3 indic $\rightarrow$ 1pt
CP : Critère de perfectionnement	- Concision - Originalité - Bonne présentation	**0,5 point :** 1 indic sur 3 $\rightarrow$ 0,25 pt 2 indic sur 3 $\rightarrow$ 0,5 p

Exercice 4 SERIE D

Courbe de la fonction f de la série D : f(x) = $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$