Fomesoutra.com
ça soutra !

MATHEMATIQUES

Durée : 02 heures
Coeff : 2

Série : A2

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque proposition, suivi de Vrai si la proposition est vraie ou de Faux si la proposition est fausse.

1. La limite en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \frac{3x^2+x-1}{5x^3-8x+4}$ est égale à $\frac{3}{5}$.

2. Si A et B sont deux évènements contraires d'un univers Ω, alors A et B sont incompatibles.

3. Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement positive sur $]1 ; +\infty[$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous les informations A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.

Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre qui donne l'affirmation vraie.

1. Si f est une fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ln(x^2 + x + 3)$, alors...

A) $f'(x) = \frac{1}{x^2+x+3}$ B) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ C) $f'(x) = 2x + 1$ D) $f'(x) = \frac{x^2+x+3}{2x+1}$

2. Le nombre de possibilités de tirer simultanément et au hasard 3 éléments parmi 2024 est...

A) A^3_{2024} B) 3^{2024} C) C^3_{2024} D) $(2024)^3$

3. Si A et B sont deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω telle que $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$ alors $P(A \cup B)$ est égal à...

A) 0,1 B) 0,7 C) 0,9 D) 0,8

4. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(lnx)^2 - 2lnx + 1 = 0$ est...

A) $\{1\}$ B) $\{-1\}$ C) $\{0\}$ D) $\{e\}$

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

1. Vérifie que : $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

2. a. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

   b. Déduis-en les solutions de l'équation : $P(x) = 0$.

3. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2(lnx)^3 + (lnx)^2 - 5lnx + 2 = 0$.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique : $OI = 2\ cm$ et $OJ = 1cm$.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -2x + 3 - lnx$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1.a) Justifie que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$.

b) Interprète graphiquement le résultat obtenu dans la question 1.a).

c) Justifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. a) Justifie que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -(2 + \frac{1}{x})$.

b) Justifie que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f.

3. a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1 ; 1{,}5[$.

b) Justifie que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = -3x + 4$.

EXERCICE 5 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton établissement d'enseignement secondaire, un promoteur organise un jeu de tirage de boules d'un sac qui contient 12 boules indiscernables au toucher dont 5 vertes, 4 jaunes et 3 rouges.

Le jeu se déroule de la façon suivante :

Le joueur tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

Si les trois boules tirées sont exactement de deux couleurs, alors le joueur gagne.

Si non, il perd.

Deux amis se disputent. L'un affirme que le joueur a plus de 70% de chance de gagner. Ce que conteste l'autre. Tu es sollicité pour les départager.

A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances mathématiques, départage les deux joueurs.

EXERCICE 1

1-

2. VRAI

3. FAUX

4. VRAI

$0,5 \times 4 = 02$ pts

EXERCICE 2

1. B

2. C

3. B

4. D

$0,5 \times 4 = 02$ pts

EXERCICE 3

1. Vérification

On a : $(x+2)(2x^2-3x+1)$

$= 2x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 - 6x + 2$

$= 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

$= P(x)$ (01)

Donc $\boxed{P(x) = (x+2)(2x^2-3x+1)}$

2. a. Résolution

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1$

$= 9 - 8$

$\Delta = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$

$x_1 = \frac{3-1}{2\times 2}$ $\quad x_2 = \frac{3+1}{2\times 2}$

$x_1 = \frac{2}{4}$ $\quad = \frac{4}{4}$

$x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad x_2 = 1$ (02)

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}}$

b. Déduisons les solutions de l'équation

$P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2-3x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x+2 = 0$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$

(d'après la question 2.a)

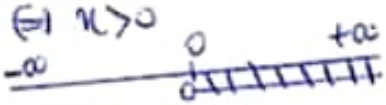
$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{-2; \frac{1}{2}; 1\right\}}$ (01)

3. Résolution de l'équation

(E) : $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$

* Ensemble de validité

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$



$\boxed{V =]0; +\infty[}$

* Résolution

Posons $X = \ln x$

on a : $2X^3 + X^2 - 5X + 2 = 0$

D'après la question 2b,

$X = -2$ ou $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 1$

$\Leftrightarrow \ln x = -2$ ou $\ln x = \frac{1}{2}$ ou $\ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e^{-2}$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$ ou $x = e^1$

$\Leftrightarrow x = e^{-2}$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$ ou $x = e$

* Solution

Pour $x \in]0; +\infty[$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{e^{-2}; e^{\frac{1}{2}}; e\right\}}$ (01)

EXERCICE 4

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = -2x+3-\ln x$

1-a- justification

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} -2x+3-\ln x$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} -2x+3 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} -\ln x = +\infty \end{cases}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty}$ (0,5)

b- Interprétation graphique

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$. (0,5)

c- justification

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x+3-\ln x$

on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -2x+3 = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x \\ \qquad\qquad\qquad\quad = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty \end{cases}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

2-a- justification

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = (-2x+3-\ln x)'$

$= -2-\frac{1}{x}$

$\boxed{f'(x) = -\left(2+\frac{1}{x}\right)}$ (0,5)

b- justification

le signe de $f'(x)$ est celui de -1

Car $2+\frac{1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$

or $-1<0$ donc $f'(x)<0$ alors (01)

f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

c- tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

(01)

3-a- Démonstration

$\forall x \in]0;+\infty[$, f est strictement décroissante

- $f(1) = -2\times 1+3-\ln 1 = 1$
- $f(1,5) = -2\times 1,5+3-\ln 3 = -1,097$

on a : $f(1)\times f(1,5) < 0$ (01)

donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]1;1,5[$.