

Série : D

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
 Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.
 Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 (2 points)

On donne les énoncés et les mots ou groupes de mots : une bijection, la puissance, dérivable, indépendants.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi du mot ou groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que l'énoncé soit vrai.

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P.
A et B sont ... si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K.
La fonction f réalise ... de K vers f(K).
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur un intervalle contenant f(K). La fonction composée g o f est ... sur K et on a :
 $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
- Pour tous p élément \mathbb{Z}^* , q élément de \mathbb{N}^* et x élément de $]0 ; +\infty[$.
On appelle x à ... $\frac{p}{q}$ le nombre réel, noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque énoncé quatre informations a, b, c et d sont proposées dont une seule est vraie.

Ecris le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre de l'information vraie.

- On lance successivement deux fois et de façon indépendante un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note chaque fois le numéro de la face supérieure.
La probabilité d'obtenir 6 deux fois est ...
 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{25}{36}$ c) $\frac{35}{36}$ d) $\frac{1}{36}$
- Soit f la bijection de $]0 ; +\infty[$ dans $]0 ; +\infty[$ définie par : $f(x) = x\sqrt{x}$. On note f^{-1} la bijection réciproque de f.

Pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, $f^{-1}(x)$ est ...

- a) $\sqrt[3]{x}$ b) $\sqrt{x^2}$ c) \sqrt{x} d) $\sqrt{x^3}$
3. On note (C) la courbe représentative de la fonction \ln dans le plan muni d'un repère.
Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ est ...
- a) $y = ex - 2$ b) $y = \frac{x}{e} - \frac{1}{e^2} - 1$ c) $y = ex$ d) $y = \frac{x}{e}$
4. La limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est ...
- a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $+\infty$

EXERCICE 3 (2 points)

1. On donne les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$
- a) Détermine les primitives de f sur \mathbb{R} .
- b) Détermine la primitive F de f sur \mathbb{R} telle que : $F(0) = 2$
2. On donne la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$
- Détermine une primitive H de h sur \mathbb{R} .

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \ln(U_n + 5)$.

1. On donne les fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \ln(x+5)$ et $g(x) = f(x) - x$.
Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0 ; 4]$.
- a) Justifie que la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 4]$.
- b) Justifie que l'équation : $f(x) = x$, a une unique solution α comprise entre 1,93 et 1,94.
2. Justifie que : $f([0 ; 3]) \subset [0 ; 4]$.
(On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0 ; 4]$)
3. a) Justifie que : $\forall x \in [0 ; 4], |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.
- b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, démontre par récurrence que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{4}{5^n}$$
4. Dédus de la consigne 3b) que la suite U est convergente et donne sa limite.

EXERCICE 5 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 1cm.

On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = (x-1)e^{x^2-2x+1}$.

La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J) .

1. a) Calcule la limite de f en $-\infty$ puis vérifie que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.
b) Interprète graphiquement l'ensemble des résultats précédents.
2. a) Justifie que pour tout nombre réel, $f'(x) = (2x^2 - 4x + 3)e^{x^2-2x+1}$.
b) Etudie le sens de variation de f .
3. On admet que pour tout nombre réel, $f''(x) = 2(x-1)(2x^2 - 4x + 5)e^{x^2-2x+1}$.
Justifie que le point I est un point d'inflexion de (C) .
4. On admet que le point I est un centre de symétrie de (C) et que la droite (T) d'équation $y = x-1$ est tangente à (C) au point I .
Trace (T) et (C) .

EXERCICE 6 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton établissement d'enseignement secondaire, un promoteur de jeu organise un jeu de tirage de boules d'un sac qui contient 10 boules indiscernables au toucher dont 5 vertes et 5 rouges.

Le jeu se déroule de la façon suivante :

Le joueur mise 800 FCFA non remboursables, prend au hasard une boule du sac, note sa couleur puis la replace dans le sac.

- Si la boule est rouge, le jeu s'arrête.
- Si la boule est verte, le joueur tire simultanément et au hasard 2 boules du sac.
 - Pour chaque boule verte obtenue, le joueur reçoit 2000 FCFA.
 - Pour chaque boule rouge obtenue, le joueur paye 1000 FCFA.

Ton professeur de mathématiques signale à l'administration de ton établissement que le jeu est favorable au promoteur.

L'ordre est immédiatement donné au promoteur de changer la mise pour en faire un jeu équitable. Ce dernier te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances en mathématiques, détermine la mise pour laquelle le jeu est équitable.

SIMILI BAC D 2024 – DREN ABIDJAN 2

EXERCICE 1 (2 points = 4×0,5pt)

1. indépendants 2. une bijection 3. dérivable 4. la puissance

EXERCICE 2 (2 points = 4×0,5pt)

- 1.d) 2.b) 3.a) 4.c)

EXERCICE 3 (2 points)

1. $Df = \mathbb{R}$

a) Pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = 2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 2u'(x) \text{ où } u(x) = \sqrt{x^2+1}$$

D'où, les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x^2+1} + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

----- 0,5pt

b) Pour tout nombre réel x , $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + c$ et $F(0) = 0$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow 2 + c = 2$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

----- 0,25pt

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x^2+1}$ ----- 0,25pt

2. $Dh = \mathbb{R}$

Pour tout nombre réel x ,

$$h(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$= \frac{-2\cos x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$= \frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)}} \text{ où } v(x) = 1 + \cos^2 x$$

D'où, on peut prendre : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = 2\sqrt{1 + \cos^2 x}$ ----- 0,5pt

EXERCICE 4 (5 points)

Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0 ; 4]$.

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \ln(U_n + 5)$.

1. On donne les fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = \ln(x+5)$ et $g(x) = f(x) - x$.

a) $Df = Dg = [0 ; 4]$

Pour tout x élément de $[0 ; 4]$,

$$g'(x) = \frac{1}{x+5} - 1 = \frac{-x-4}{x+5} = -\frac{x+4}{x+5}$$

$$x+5 > 0 \text{ et } -(x+4) < 0$$

$$g'(x) < 0$$

D'où, la fonction g est strictement décroissante.

b) $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ ----- 0,25pt

* $g(1,93) \approx 0,005$ et $g(1,94) \approx -0,002$ (par défaut à 10^{-3} près) ----- 0,25pt

* g est continue et strictement décroissante sur $[0 ; 4]$ ----- 0,25pt

Et, $g(1,93) \times g(1,94) < 0$ ----- 0,25pt

D'où, l'équation $g(x) = 0$ ou encore $f(x) = x$ admet une unique solution α comprise entre 1,93 et 1,94.

2. * f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 4]$ ----- 0,25pt + 0,25pt

D'où, $f([0 ; 4]) = [f(0) ; f(4)] = [\ln 5 ; \ln 9]$ ----- 0,5pt

- * $\ln(5) \approx 1,6$ (par défaut à 0,1 près) et $\ln(9) \approx 2,2$ (par excès à 0,1 près)

D'où, $\ln(5) \in [0 ; 4]$ et $\ln(9) \in [0 ; 4]$ ----- 0,5pt

Donc, $f([0 ; 4]) \subset [0 ; 4]$.

3. a) $\forall x \in [0 ; 4]$,

$$0 \leq x \leq 4$$

$$5 \leq x+5 \leq 9$$

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{9} \leq f'(x) \leq \frac{1}{5} \text{ ----- } 0,25\text{pt}$$

$$\frac{1}{9} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{5} \quad |f'(x)| > 0 \text{ ----- } 0,25\text{pt}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$$

- b) $|U_0 - \alpha| = |0 - \alpha| = \alpha$ et $\frac{\alpha}{5^0} = \alpha$

Par suite : $|U_0 - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^0}$ ----- 0,25pt

Soit k un élément de \mathbb{N} , supposons $|U_k - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^k}$

$U_k \in [0 ; 4]$, $\alpha \in [0 ; 4]$ et $\forall x \in [0 ; 4]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$

D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{5} |U_n - \alpha| \text{ ----- } 0,25\text{pt}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} |U_n - \alpha| \quad |f(U_n) = U_{n+1} \text{ et } f(\alpha) = \alpha$$

$$|U_k - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^k} \Rightarrow |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} \times \frac{\alpha}{5^k}$$

$$\Rightarrow |U_{k+1} - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^{k+1}} \text{ ----- } 0,25\text{pt}$$

En définitive, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{\alpha}{5^n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{5^n} = 0$ ----- 0,25pt + 0,25pt

D'où, la suite U est convergente et $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \alpha$ ----- 0,25pt

EXERCICE 5 (4 points)

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1. a) $Df = \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} * \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-2x+1} = +\infty \end{array} \right\} \text{-----} 0,25\text{pt} + 0,25\text{pt}$$

par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$* \text{ Pour tout } x \text{ de }]-\infty ; 0[, \frac{f(x)}{x} = (1 - \frac{1}{x})e^{x^2-2x+1} \text{-----} 0,25\text{pt}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-2x+1} = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{-----} 0,25\text{pt}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

D'où, (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) ----- 0,5pt

2. a) Pour tout nombre réel x ,

$$f'(x) = (1 + 2(x-1)(x-1))e^{x^2-2x+1}$$

$$f'(x) = (1 + 2(x^2 - 2x + 1))e^{x^2-2x+1} \text{-----} 0,25\text{pt}$$

$$f'(x) = (2x^2 - 4x + 3)e^{x^2-2x+1}$$

$$\text{b) } * \Delta = 16 - 24 = -8$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 4x + 3 > 0 \text{-----} 0,5\text{pt}$$

$$* \forall x \in \mathbb{R},$$

$$2x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ et } e^{x^2-2x+1} > 0$$

$$f'(x) > 0 \text{-----} 0,5\text{pt}$$

D'où, f est strictement croissante.

3. Pour tout nombre réel x ,

$$f''(x) = 2(x-1)[(2x-1)^2 + 4]e^{x^2-2x+1}$$

$$2[(2x-1)^2 + 4]e^{x^2-2x+1} > 0$$

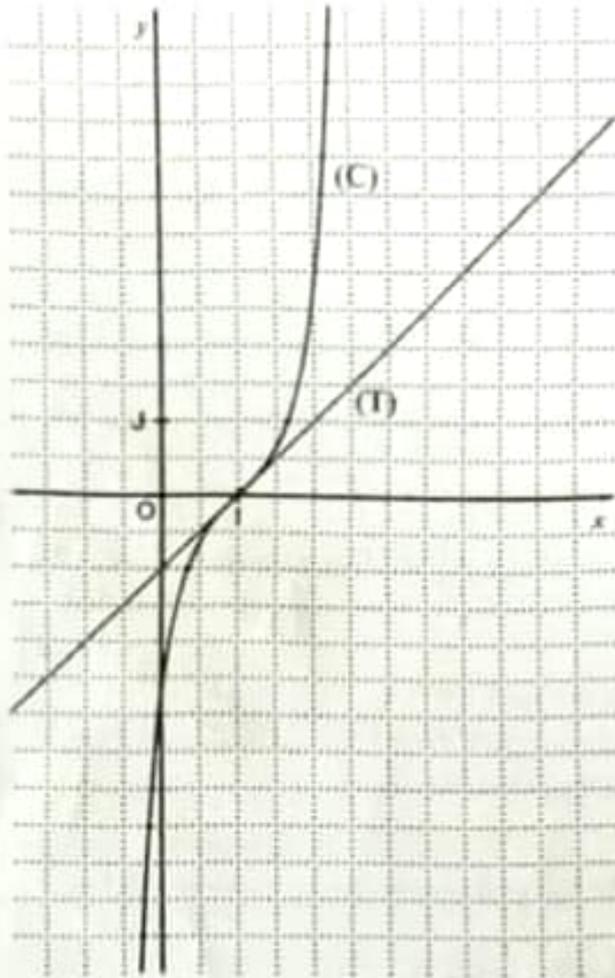
$$f''(x) \text{ a le même signe que } x-1$$

D'où, f'' s'annule en 1 et change de signe ----- 0,25pt + 0,25pt

$$\text{Or, } f(1) = 0$$

Donc, le point I est un point d'inflexion de (C).

4. On admet que le point I est un centre de symétrie de (C) et que la droite (T) d'équation $y = x-1$ est tangente à (C) au point I.

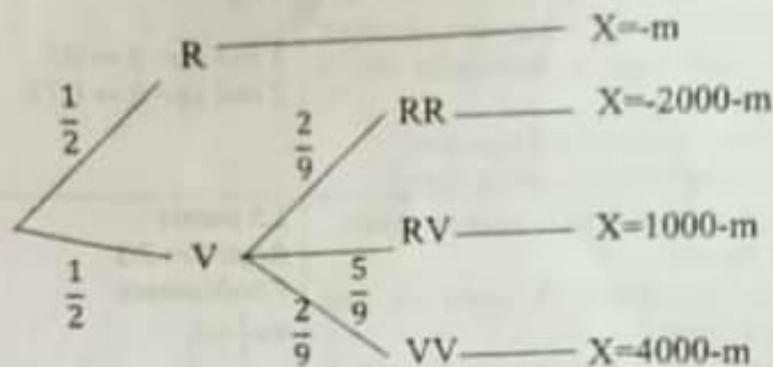


(C) 0,5pt
 (T) 0,25pt

EXERCICE 6 (5 points)

Corrigé succinct

Notons m ($m \geq 0$) la mise en FCFA et X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.



$$P_V(RR) = \frac{C_1^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$$

$$P_V(RV) = \frac{5 \times 5}{C_{10}^2} = \frac{5}{9}$$

$$P_V(VV) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}$$

| x_i | $-m$ | $-2000-m$ | $1000-m$ | $4000-m$ |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{9}{18}$ | $\frac{2}{18}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{2}{18}$ |

$$E(X) = \frac{1}{18}(9000 - 18m)$$

$$E(X) = 500 - m$$

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow m = 500$$

| Critères | Indicateurs | Barème de notation |
|--|---|---|
| CM1 (Le critère minimal 1) : • La pertinence | <ul style="list-style-type: none"> - Annonce de la leçon probabilité et variable aléatoire, annonce de la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, ... - Annonce des calculs de probabilités des valeurs respectives de la variable aléatoire, calcul de l'espérance mathématique de la variable aléatoire - Annonce de la résolution de l'équation l'espérance mathématique égale à zéro | 0,75 point : <i>Règle des 2/3</i> 3 indicateurs $3 \times \frac{2}{3} = 2$ 1 ind sur 3 → 0,5 2 ind sur 3 → 0,75 |
| CM2 (Le critère minimal 2) : • L'utilisation correcte des outils mathématiques en situation | <ul style="list-style-type: none"> - Présence de la notation de la mise inconnue (par exemple : m) - Présence de la variable X égale au gain algébrique du joueur - Présence d'un arbre pondéré qui traduit la situation - Présence d'un tableau qui présente la loi de probabilité de X - Présence du calcul de E(X) - Présence de la résolution de l'équation : E(X) = 0 - Présence de la réponse de l'apprenant - Exactitude des formules - Justesse de l'argumentation | 2,5 points : <i>Règle des 2/3</i> 9 indicateurs $9 \times \frac{2}{3} = 6$ 1 ind sur 9 → 0,25 2 ind sur 9 → 0,5 3 ind sur 9 → 1 4 ind sur 9 → 1,25 5 ind sur 9 → 1,5 6 ind sur 9 → 2,5 |
| CM3 (Le critère minimal 3) : • La cohérence de la réponse | <ul style="list-style-type: none"> - Les résultats de calculs sont conformes à ce qui est attendu, la réponse au problème est égale à ce qui est attendu - La réponse, les résultats sont en adéquation avec la démarche (le résultat produit, qu'il soit juste ou faux est le produit parfait des calculs effectués, de opérations posées, ...) - La qualité des enchaînements de la démarche (les conjonctions de coordination, chaque partie est à la bonne place, ...) | 1,25 point : <i>Règle des 2/3</i> 3 indicateurs $3 \times \frac{2}{3} = 2$ 1 ind sur 3 → 0,75 2 ind sur 3 → 1,25 |
| CP (Les critères de perfectionnement) : • La concision • L'originalité • La bonne présentation | <ul style="list-style-type: none"> - Production juste en peu de mots, esprit de synthèse, calcul en peu d'étape - Démarche correcte non classique au-delà de la production attendue - Présence des titres, d'étapes, d'espacement des parties, absence de rature, absence de surcharge, de blanco, absence de tache | 0,5 point : <i>Règle des 2/3</i> 3 indicateurs $3 \times \frac{2}{3} = 2$ 1 ind sur 3 → 0,25 2 ind sur 3 → 0,5 |