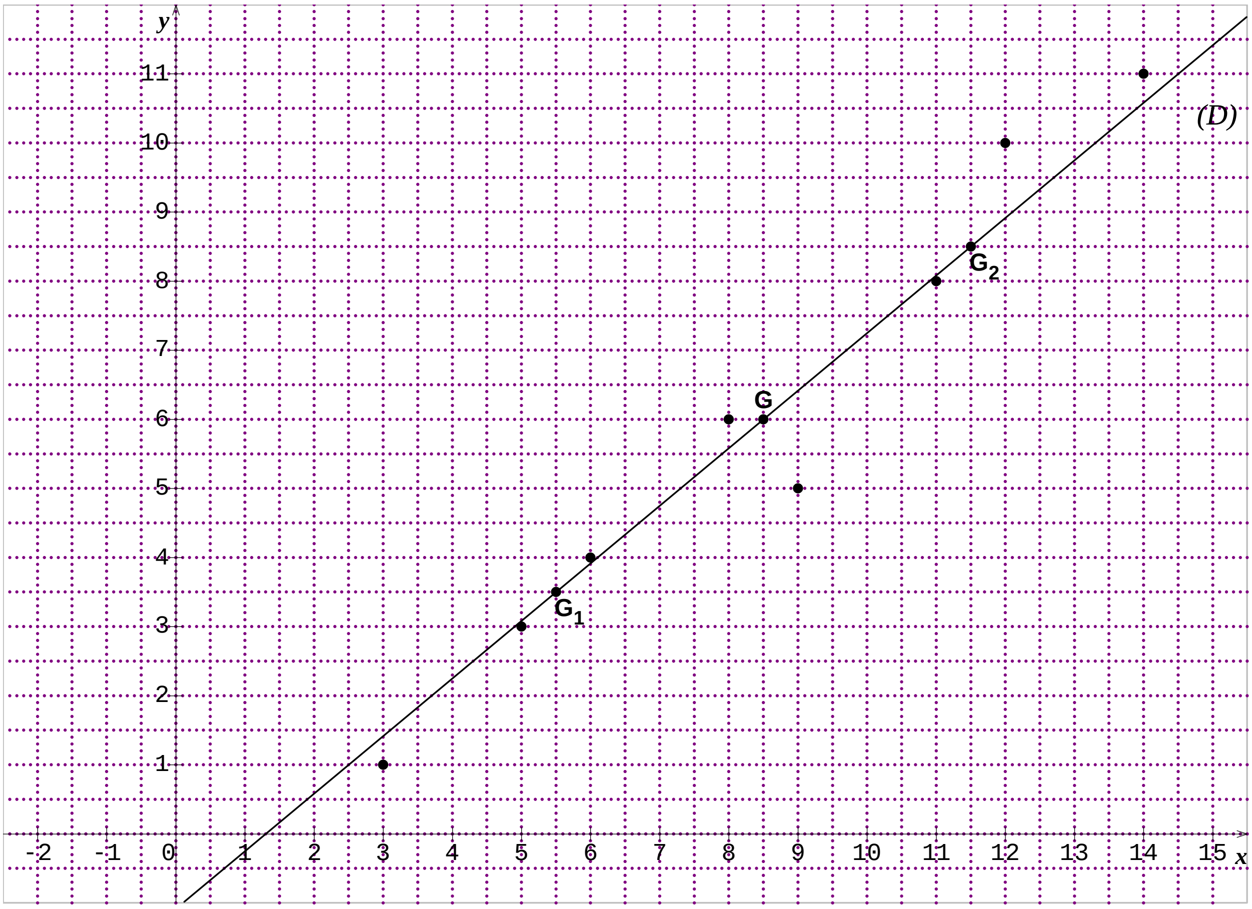
CORRIGE – BAREME Série A1

CORRIGE	Barème
Exercice 1 (2 points) 1- F 2- V 3- V 4- V	4×0,5 pts
Exercice 2 (2 points) 1- B 2- A 3- B 4- B	4×0,5 pts
Exercice 3 (5 points) **1- Je représente le nuage de points** 	1 pt
2- a) Je justifie que le couple de coordonnées du point moyen G est G(8,5 ;6) On sait que : les coordonnées de G sont $(\bar{x};\bar{y})$ avec $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i$	
On a : $\bar{x} = \frac{1}{8}(3+5+6+8+9+11+12+14) = \frac{68}{8} = 8{,}5$	0,25 pt
Et $\bar{y} = \frac{1}{8}(1+3+4+6+5+8+10+11) = \frac{48}{8} = 6$ Donc : $G(8{,}5;6)$	0,25 pt

b) Je place le point G dans le repère $(O; I; J)$.

Voir graphique ---→ 0,5 pt

3- **a) Je calcule $V(Y)$ la variance du caractère Y.**

On sait que : $V(Y) = \frac{1}{n}\sum_1^n {y_i}^2 - \bar{y}^2$

On a : $V(Y) = \frac{1}{8}(1^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 5^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2) - 6^2$ ------------------→ 0,5 pt

Donc : $V(Y) = 10{,}5$ ------------------------------------→ 0,25 pt

b) Je démontre que la covariance de la série statistique $(X; Y)$ est $Cov(X; Y) = 11{,}125$.

On sait que : $Cov(X; Y) = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i \, . \, y_i - \bar{x}.\bar{y}$

On a:

$$Cov(X; Y) = \frac{1}{8}(3 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 4 + 8 \times 6 + 9 \times 5 + 11 \times 8 + 12 \times 10 + 14 \times 11) - 8{,}5 \times 6$$ --→ 0,5 pt

Donc : $Cov(X; Y) = 11{,}125$ ------------------------------------→ 0,25 pt

4- **a) Je détermine une équation de (D) la droite d'ajustement linéaire de Y en X par la méthode des moindres carrés**

Puisque $r = 0{,}98$ et $0{,}87 \leq r < 1$, alors la corrélation linéaire entre Y et X est forte, et il existe (D) la droite d'ajustement linéaire de Y en X dont une équation est de la forme :

$y = ax + b$ ------------------------------------→ 0,25 pt

avec $a = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{11{,}125}{12{,}25} = 0{,}9$ ------→ 0,25 pt et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 6 - 0{,}9 \times 8{,}5 = -1{,}65$ ------→ 0,25 pt

Alors : $y = 0{,}9x - 1{,}65$ ------------------------------------→ 0,25 pt

b) Je trace (D)

Voir figure nuage de points ------------------------------------→ 0,5 pt

EXERCICE 4 (6 points)

<u>Partie A</u>

1- **Je calcule l'image de 0 par f.**

On a : $f(x) = x + 1 - e^x$ alors $f(0) = 0 + 1 - e^0$ avec $e^0 = 1$ ------------------→ 0,25 pt

Donc : $f(0) = 0$ ------------------------------------→ 0,25 pt

2- **Je détermine la limite de f en $-\infty$.**

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}(x + 1 - e^x)$ avec $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty}(x + 1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$ ------------------→ 0,25 pt

Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ------------------------------------→ 0,25 pt

3- **On suppose que pour tout nombre réel x différent de 0 : $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$.**

Je calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$ avec $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \; et \; \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{e^x}{x} = -\infty \end{cases}$ ------------------→ 0,25 pt

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ------------------------------------→ 0,25 pt

4- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

a) Je démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - e^{x}$.

On sait que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,, f'(x) = (x + 1 - e^{x})'$

On a : $(x+1)' = 1$ — 0,25 pt

Et : $(e^{x})' = e^{x}$ d'où $(-e^{x})' = -e^{x}$ — 0,25 pt

Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}\,, f'(x) = 1 - e^{x}$

b) Je justifie que f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,, f'(x) = 1 - e^{x}$

On sait que : $\forall\, x \in]-\infty; 0[\,, e^{x} - 1 < 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[\,, e^{x} - 1 > 0$

Alors : $\forall\, x \in]-\infty; 0[\,, 1 - e^{x} > 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[\,, 1 - e^{x} < 0$

Donc : $\forall\, x \in]-\infty; 0[\,, f'(x) > 0$ et $\forall\, x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) < 0$ — 0,25 pt

Alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. — 0,25 pt

c) Je dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

— 0,25 pt

Partie B

1- Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$.

a) **Je justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = 0$.**

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = \lim\limits_{x \to -\infty} \big((x + 1 - e^{x}) - (x+1)\big)$

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-e^{x})$ — 0,25 pt

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x}) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} (-e^{x}) = 0$

Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = 0$ — 0,25 pt

b) **J'interprète graphiquement ce résultat.**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$. — 0,25 pt

c) **J'étudie la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite (D).**

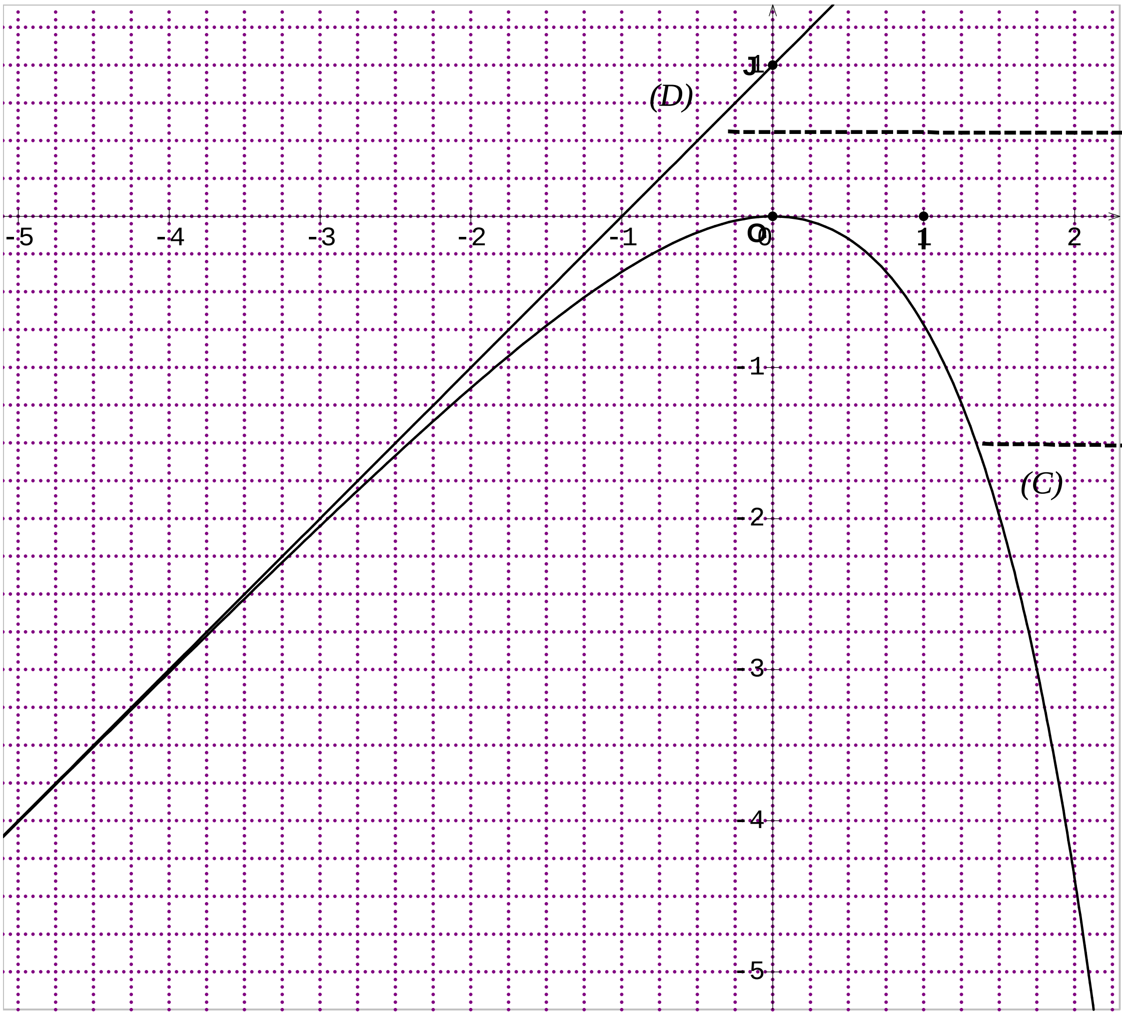
On sait que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+1) = -e^x$
Or : $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}, -e^x < 0$
Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) - (x+1) < 0$ 0,25 pt
Par conséquent : la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur $\mathbb{R}$. 0,25 pt

2 - a) Je reproduis puis je complète le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-4	-3	-2	1	$1{,}5$	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	-4	-3	-2	$-1{,}1$	$-0{,}7$	-2	$-4{,}4$

0,75 pt

b) Je construis (D) et (C) sur l'intervalle $[-5; 2]$.



0,25 pt
0,25 pt

3- Je calcule $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses (OI) et, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On sait que : $f \leq 0$ sur $[0; 1]$
Alors : $\mathcal{A} = \int_0^1 -f(x)\,dx . u.a$ avec $u.a = 2 \times 2\, cm^2$ 0,25 pt
D'où : $\mathcal{A} = 4\int_0^1 -(x + 1 - e^x)\,dx\, cm^2 = 4\int_0^1 (-x - 1 + e^x)\,dx\, cm^2$

et : $\mathcal{A} = 4\left[-\frac{1}{2}x^2 - x + e^x\right]_0^1 cm^2 = 4\left(\left(-\frac{1}{2}\times 1^2 - 1 + e^1\right) - \left(-\frac{1}{2}\times 0^2 - 0 + e^0\right)\right) cm^2$ ---------→	0,25 pt
Donc : $\mathcal{A} = 4\left(-\frac{1}{2} - 1 + e - 1\right) cm^2 = 4\left(e - \frac{5}{2}\right) cm^2$	
$\mathcal{A} = 4 \times \frac{2e-5}{2}\ cm^2 = 2(2e-5) cm^2 = (4e-10)\ cm^2$ ---------------------------------→	0,25 pt

Exercice 5 (5 points)

Dans cette situation, il s'agit de vérifier si le jeu est favorable au joueur.

- Pour résoudre ce problème je me réfère à ma leçon sur les probabilités, précisément je vais utiliser les variables aléatoires.

Pour ce faire :

- Je définie une variable aléatoire X
- Je définie la loi de probabilité de la variable aléatoire X
- Je calcul l'expérience Mathématique E(X).
- Je compare E(X) à 0
- Je conclu.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain algébrique du joueur.

. Je détermine l'ensemble des valeurs prises par X :

- $X(\Omega) = \{-1000; 0; 1000; 2000; 3000\}$

. Je définie la loi de probabilité de X.

P(x= -1000) $= \frac{C_5^2 \times C_5^0}{C_{10}^2}$

P(x= -1000) $= \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

P(x= 0) $= \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_{10}^2}$

P(x= 0) $= \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

P(x= 1000) $= \frac{C_3^2 \times C_7^0 + C_2^1 \times C_5^1}{C_{10}^2}$

P(x= 1000) $= \frac{3+2\times 5}{45} = \frac{13}{45}$

P(x= 2000) $= \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

P(x= 3000) $= \frac{C_2^2 \times C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

- La loi de probabilité de X est :

x_i	-1000	0	1000	2000	3000
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{45}$

- Je calcule l'Espérance mathématique de $E(X)$ de la variable X:

$$\mathbf{E}(X) = -1000 \times \frac{2}{9} + 0 \times \frac{1}{3} + 1000 \times \frac{13}{45} + 2000 \times \frac{2}{15} + 3000 \times \frac{1}{45}$$

$$\mathbf{E}(X) = \frac{18000}{45}$$

E(X) = 400

- $\mathbf{E}(X) > 0$: le Jeu est donc avantageux pour l'élève de 2nde A qui est joueur à ce jeu.

<table>
<tr><th>CRITERES</th><th>INDICATEURS</th><th>BAREME</th></tr>
<tr><td>CM1</td><td>Dans cette situation, il s'agit de vérifier si le jeu est favorable au joueur.
-Pour résoudre ce problème je me réfère à ma leçon sur les probabilités, précisément je vais utiliser les variables aléatoires.
Pour ce faire :
- Je définie une variable aléatoire X
- Je définie la loi de probabilité de la variable aléatoire X
- Je calcul l'expérience Mathématique E(X).
- Je compare E(X) à 0
- Je conclu.</td><td>1 pt

1 indic sur 6→0,25

2 indic sur 6 → 0,5

4 indic sur 6 → 0,75

5 indic sur 6→ 1</td></tr>
<tr><td>CM2</td><td>- Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain algébrique du joueur
- $X(\Omega) = \{-1000; 0; 1000; 2000; 3000\}$
- La loi de probabilité de X est :
<table>
<tr><td>x_i</td><td>-1000</td><td>0</td><td>1000</td><td>2000</td><td>3000</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$\frac{2}{9}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{13}{45}$</td><td>$\frac{2}{15}$</td><td>$\frac{1}{45}$</td></tr>
</table>- L'Espérance mathématique de X est :
E(X) = 400
- $\mathbf{E}(X) > 0$
- Jeu est donc avantageux pour l'élève de 2^{nde} A.</td><td>2,5 pts

1 indic sur 6→0,5 pt

2 indic sur 6→1,5 pt

3 indic sur 6 → 2 pt

4 indic sur 6→ 2,5</td></tr>
<tr><td>CM3</td><td>- Le résultat produit est conforme au résultat attendu : E(X) = 400
- Le résultat produit est en adéquation avec la démarche.
- La qualité des enchainements est excellente.</td><td>0,5 pt

1 indic sur 3 → 0,25
2 indic sur 3→ 0,5</td></tr>
<tr><td>CP</td><td>- Concision de la production
- Originalité de la production
- Bonne présentation</td><td>0,5 pt
1indic sur 3⟶ 0,25 pt
2 indic sur 3⟶ 0,5 pt</td></tr>
</table>