

CORRIGE-BAREME Série D

CORRIGE	Barème
Exercice 1 (2 points)	
1-F] 2-F] 3-V] 4-V]	4×0,5 pts
Exercice 2 (2 points)	
1-B] 2-A] 3-B] 4-A]	4×0,5 pts
Exercice 3 (3 points)	
1- a) Je vérifie que 3i est solution de l'équation $P(z) = 0$	
$P(3i) = 0$ donc 3i est solution de l'équation $P(z) = 0$ ----->	0,25 pt
b) Je détermine les nombres complexes a et b tels que	
$P(z) = (z - 3i)(iz^2 + az + b)$	
Méthode des coefficients indéterminés ou division euclidienne correcte----->	0,25 pt
$a = 2 - 2i$ et $b = 2 - 3i$ ----->	2×0,25 pt
2- a) Je calcule $(2 + i)^2$	
$(2 + i)^2 = 3 + 4i$ ----->	0,25 pt
b) Je résous l'équation (E)	
$\Delta = -4(3 + 4i) = [2i(2 + i)]^2$ ----->	0,25 pt
$z_1 = -1$ et $z_2 = 3 + 2i$ ----->	2×0,25 pt
c) Je déduis de 1-a) et 2-b) les solutions de l'équation $P(z) = 0$	
D'après 1-a) et 2-b) les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont 3i, -1 et 3 + 2i----->	0,25 pt
3- a) Je détermine l'affixe du point K	
$z_K = \frac{(z_A + z_B)}{2} = 1 + i$ ----->	0,25 pt
b) Je justifie que B appartient à (Γ)	
On vérifie que $ z_B - 1 - i = \sqrt{5}$ ----->	0,25 pt
c) Je détermine (Γ)	
$ z - 1 - i = \sqrt{5} \Rightarrow KM = \sqrt{5}$, donc (Γ) est le cercle de centre K et de rayon $\sqrt{5}$ ----->	0,25 pt
Exercice 4 (4 points)	
1- a) Je justifie que f est croissante sur $[0 ; 1]$.	
Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$; $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.----->	0,5 pt
b) Je démontre par récurrence	
<ul style="list-style-type: none"> • $u_0 = 0$ or $u_0 \in [0 ; 1]$ • $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \in [0 ; 1] \Rightarrow f(u_k) \in [f(0) ; f(1)]$ }-----> 	0,25 pt

$\Rightarrow u_{k+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ or } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \subset [0; 1]$ <p>Pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$</p>	0,5 pt
<p>c) Je démontre que (u_n) est convergente.</p>	
$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$	0,5 pt
<p>or $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n + 2}{u_n + 4} > 0$ et $-(u_n - 1) > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.</p>	
<p>De plus (u_n) est majorée par 1 donc (u_n) est convergente.</p>	
<p>2-a) Je démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$:</p>	
$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ <p>Alors $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}$</p> $= \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1}{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}$ $= \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10}$ $= \frac{2}{5} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2} \right)$	0,5 pt
<p>$v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$ alors (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et 1^{er} terme</p>	
$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$	0,25 pt
<p>b) J'exprime v_n en fonction de n.</p>	
$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$ $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$	0,25 pt
<p>c) Expression de u_n</p>	
$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ $u_n = \frac{-\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$	0,5 pt
<p>d) Je calcule la limite de (u_n)</p>	
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$	0,25 pt

Exercice 5 (4 points)

1- a) Je calcule la limite de f en $+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{e^x} = 0$ -----> 0,25 pt

• La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ -----> 0,25 pt

b) Je démontre que (C) admet une branche parabolique en $-\infty$.

En posant $X = -x$,

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2 - 3}{2} e^X$ -----> 0,25 pt

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2 - 3}{2} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2 - 3}{-2X} e^X$ -----> 0,25 pt

$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{-2} e^X$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{2} = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{cases}$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) -----> 0,25 pt

2- a) Démonstration

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^{-x} + \left(\frac{x^2 - 3}{2}\right)(-e^{-x})$ -----> 0,25 pt

$= e^{-x} \left(x - \frac{x^2 - 3}{2}\right)$

$= e^{-x} \left(\frac{2x - x^2 + 3}{2}\right)$

$f'(x) = e^{-x} \left(\frac{3 + 2x - x^2}{2}\right)$

b) J'étudie le signe de $f'(x)$ et je dresse son tableau de variation

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^{-x}}{2} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $3 + 2x - x^2$ alors :

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[, f'(x) < 0$

$\forall x \in]-1; 3[, f'(x) > 0$ -----> 0,25 pt

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$	$+\infty$	$-e$	$3e^{-3}$	0

-----> 0,25 pt

3 - a) J'étudie la position relative de (C) et l'axe (OI).

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2} \geq 0$$

Alors

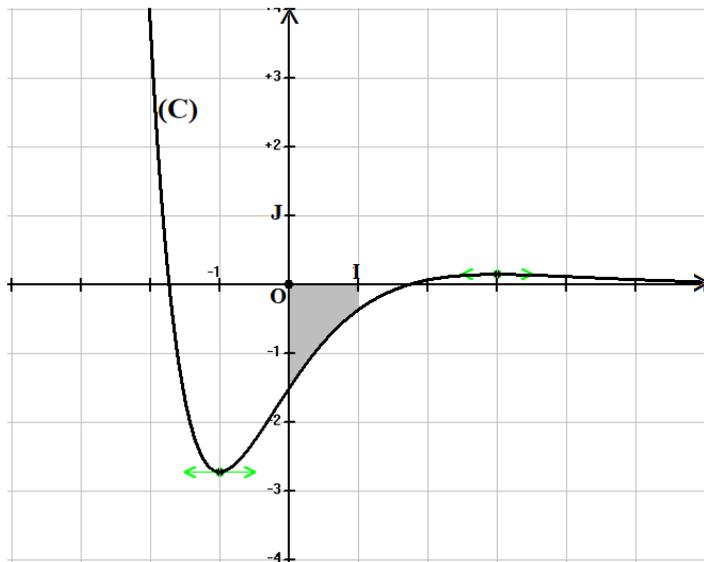
$\forall x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[, f(x) > 0$ alors (C) est au-dessus de (OI)

$\forall x \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[, f(x) < 0$ alors (C) est au-dessous de (OI)

}-----> 0,5 pt

b) Représentation graphique

-----> 0,5 pt



4 - a) Je calcule A

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$
 $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}
 A &= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\
 &= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 \\
 &= -e^{-1} - e^{-1} + e^0 \\
 A &= -2e^{-1} + 1
 \end{aligned}$$

0,5 pt

b) Justification

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, -f'(x) + xe^{-x} &= \frac{-(3 + 2x - x^2)e^{-x}}{2} + xe^{-x} \\
 &= \frac{(-3 - 2x + x^2 + 2x)}{2} e^{-x} \\
 &= \frac{(x^2 - 3)}{2} e^{-x} \\
 -f'(x) + xe^{-x} &= f(x)
 \end{aligned}$$

0,25 pt

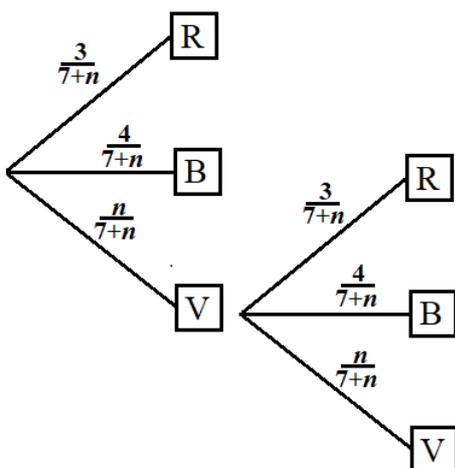
c) Calcul de l'aire \mathcal{A}

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \left(-\int_0^1 f(x) dx\right) \times ua \\
 &= \left(\int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 xe^{-x} dx\right) \times 8cm^2 \\
 &= ([f(x)]_0^1 - A) \times 8cm^2 \\
 &= \left(-e^{-1} + \frac{3}{2} + 2e^{-1} - 1\right) \times 8cm^2 \\
 &= \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\right) 8cm^2
 \end{aligned}$$

0,5 pt

Exercice 6 (5 points)

Arbre de probabilité



VALEURS DE X : -2400; -600; -500; 1600; 3200

$$P(X = -2400) = \frac{4}{7+n}$$

$$P(X = -600) = \frac{n}{7+n} \times \frac{4}{7+n} = \frac{4n}{(7+n)^2}$$

$$P(X = -500) = \frac{n}{7+n} \times \frac{n}{7+n} = \frac{n^2}{(7+n)^2}$$

$$P(X = 3200) = \frac{3}{7+n}$$

$$P(X = 1600) = \frac{n}{7+n} \times \frac{3}{7+n} = \frac{3n}{(7+n)^2}$$

$$E(X) = \frac{-2400 \times 4}{7+n} + \frac{-600 \times 4n}{(7+n)^2} + \frac{-500n^2}{(7+n)^2} + \frac{1600 \times 3n}{(7+n)^2} + \frac{3200 \times 3}{7+n}$$

$$E(X) = \frac{-500n^2 + 2400n}{(7+n)^2}$$

Le signe de $E(X)$ est celui de $-500n^2 + 2400n$.

Donc $E(X) = 0 \Leftrightarrow -500n^2 + 2400n = 0$. On obtient $n = 0$ ou $n = 4,8$

Par conséquent $E(X) > 0$ pour $n \in]0; 4,8[$.

Conclusion : pour que la loterie soit favorable aux femmes de l'association, il faut que $E(X) > 0$, donc le nombre de boules vertes à introduire au minimum est : 1.

GRILLE DE CORRECTION CRITERIEE

CM1	<ul style="list-style-type: none"> • Leçon probabilité • Choix des évènements • Calculs des probabilités • Valeurs de la variables X • Espérance mathématiques E(X) • Signe de E(X) • conclusion 	<p>0,75 pt</p> <p>2 indic sur 8 → 0,25 pt 4 indic sur 8 → 0,5 pt 5 indic sur 8 → 0,75 pt</p>
CM2	<ul style="list-style-type: none"> • Traduction exacte des données • Calculs exact des probabilités • Valeurs prises par X • Calcul exact de E(X) • Étude correcte du signe de E(X) • Valeur exacte de n • réponse correcte 	<p>2,5 pts</p> <p>1 indic sur 7 → 0,25 pt 2 indic sur 7 → 0,75 pt 3 indic sur 7 → 1 pt 4 indic sur 7 → 1,25 pt 5 indic sur 8 → 2,5 pt</p>
CM3	<ul style="list-style-type: none"> • Démarche correcte • Précision • réponse correcte 	<p>1,25 pts</p> <p>1 indic sur 3 → 0,75 pt 2 indic sur 3 → 1,25 pt</p>
CP	<ul style="list-style-type: none"> • Concision • Originalité • présentation 	<p>0,5 pt</p> <p>1 indic sur 3 → 0,25 pt 2 indic sur 3 → 0,5 pt</p>