BACCALAURÉAT BLANC
MARS 2024

SÉRIE D – Coefficient 4
Durée : 4 h

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1 / 3, 2 / 3 et 3 / 3
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (*2 points*)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si elle est fausse.

1. Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $arg(z \times z') = arg(z) \times arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Si α est un nombre réel strictement positif, alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^{\alpha}}{\ln x}\right) = +\infty$.
3. f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, m et M deux nombres réels. Si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$.
4. Si (U_n) est une suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 5U_n \end{cases}$, alors (U_n) est une suite arithmétique.

EXERCICE 2 (*2 points*)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à l'affirmation juste.

1. Soit g une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et g^{-1} sa bijection réciproque.
   Si $g(1) = 0$ et $g'(1) = -1$, alors $(g^{-1})'(0)$ est égal à …..

   A) 1. B) 0. C) -1. D) $\frac{1}{2}$.

2. La limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 1} + x$ est égale à …..

   A) $-\infty$. B) 0. C) 2. D) $+\infty$.

3. Soit x est un nombre réel. L'expression $\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$ est égale à …..

   A) -1. B) 0. C) 1. D) e.

4. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.
   La fonction de répartition de X est une application de….

   A) $X(\Omega) \to [0; 1]$. B) $\mathbb{R} \to [0; 1]$. C) $\Omega \to \mathbb{R}$. D) $X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (3,5 *points*)

1. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (4 + 2i)z + 7 + 4i = 0$.
2. Soit P le polynôme définie dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z + 4 - 7i$.
   a) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
   b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v}\,)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = i$; $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 2 - i$.
   a) Détermine $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$ et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   b) Déduis de 3. a) la nature du triangle ABC. Isocelle
4. Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v}\,)$, on considère l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que : $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 7$.
   a) On pose : $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontre que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 7$.
   b) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

EXERCICE 4 (3,5 *points*)

Un lycée propose des candidats au baccalauréat blanc dans trois séries différentes: $A2, C$ et D.
On sait que les candidats de la série $A2$ et ceux de la série C représentent respectivement $\frac{3}{10}$ et $\frac{1}{10}$ de l'effectif total des candidats proposés.
Parmi les candidats de la série $A2$, 45% réussissent à l'examen blanc, quant à ceux de la série C, 60% y réussissent et enfin on note 40% de réussite pour les candidats de la série D.
On choisit au hasard un candidat et on note les évènements suivants :

A : « le candidat choisi est issu de la série $A2$ » ;
C : « le candidat choisi est issu de la série C » ;
D : « le candidat choisi est issu de la série D » ;
R : « le candidat choisi réussit au baccalauréat blanc ».

1. Construis l'arbre pondéré correspondant à la situation décrite dans l'énoncé et remplis-le en y inscrivant les probabilités des différentes branches.

2. a) Calcule la probabilité que le candidat réussisse au baccalauréat blanc et soit issu de la série D.
   b) Justifie que : $P(R) = 0{,}435$.
   c) Calcule la probabilité d'être candidat de la série D sachant que le candidat a réussi au baccalauréat blanc (*Tu donneras l'arrondi d'ordre 2 du résultat.*)

3. On choisit au hasard n candidats. On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats de la série D et qui ont réussi au baccalauréat blanc.
   a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
   b) Démontre que : $P(X \geq 1) = 1 - (0{,}76)^n$.
   c) Détermine la valeur de n pour que la probabilité d'avoir au moins un candidat de la série D admis parmi les candidats choisis au hasard soit égale 0,855.

EXERCICE 5 (4 *points*)

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 1)e^{-x} - 1$.

On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty; 1 - \sqrt{2}[$ telle que: $-1{,}15 < \alpha < -1{,}14$.

De plus : $\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$.

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x} + x - 1$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

d'unité graphique 2 cm.

1. Justifie que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. a) Calcule la limite de $f(x)$ et celle de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.
3. a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -g(x)$.
   b) Déduis-en le sens de variation de f, puis dresse son tableau de variation.
4. Justifie que la droite (D) d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.
5. Démontre que $f(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\alpha - 1}$.
6. a) Détermine les réels a, b et c tels que la fonction P définie par : $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto (x + 1)^2 e^{-x}$.
   b) On admet que (C_f) est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.
   Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), la droite (D), les droites d'équation : $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 6 (5 *points*)

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles à acheté 5000 tonnes de noix de cajou aux paysans en 2011. La société décide d'augmenter de 5% ses achats chaque année par rapport à l'année précédente.

Le comptable de la société veut connaitre l'année à partir de laquelle la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à 10.000 tonnes.

A l'aide de tes connaissances mathématiques et un raisonnement cohérant, réponds à la préoccupation du comptable.