BACCALAUREAT BLANC REGIONAL **Coefficient : 4**
SESSION DE MARS 2024 **Durée : 4 h**

MATHEMATIQUES

SERIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.
Chaque candidat recevra deux(2) feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation du tableau ci-dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Soit f et g deux fonctions telles que $f \geq g$ sur un intervalle $]\beta; +\infty[$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2	La fonction $x \mapsto x^{\sqrt{5}}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3	Soit f et g deux fonctions telles que f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors la fonction gof est dérivable en a et $(gof)'(a) = g'(a) \times f'[g(a)]$.
4	Une primitive sur $]-\infty; 1[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est la fonction $x \mapsto \ln(x-1)$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, les informations des lignes **A ; B** et **C** permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne correspondant à la bonne réponse.

N°	ENONCES INCOMPLETS	REPONSES	
1	f est une fonction dérivable sur $[2; 6]$ et $5 \leq f'(x) \leq 6$. Alors d'après l'inégalité des accroissements finis, on a…..	**A**	$5 \leq f(6) - f(2) \leq 6$
		B	$20 \leq f(6) - f(2) \leq 24$
		C	$4 \leq f(6) - f(2) \leq 5$
2	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2} = \ldots\ldots.$	**A**	$-\infty$
		B	$+\infty$
		C	-1
3	On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est …….	**A**	$y = \frac{1}{2}x + 1$
		B	$y = 2x + 1$
		C	$y = -\frac{1}{2}x + 1$
4	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 5\sin x \cos^4 x$ est la fonction ……..	**A**	$x \mapsto \cos^5 x$
		B	$x \mapsto -\cos^5 x$
		C	$x \mapsto \sin^5 x$

EXERCICE 3 (3 points)

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2 - \frac{3}{2+U_n} \end{cases}$

1. a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < U_n < 1$.
   b) Démontre que la suite (U_n) est croissante.
   c) Déduis-en que la suite (U_n) est convergente.
2. Soit la suite (V_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{U_n - 1}{1+U_n}$.
   a) Justifie que (V_n) est une suite géometrique de raison $\frac{1}{3}$ et précise son premier terme.
   b) Exprime V_n puis U_n en fontion de n.
   c) Justifie que la suite (V_n) est convergente et déduis-en la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 4 (4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z. (E): $P(z) = 0$
avec $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1. a) Vérifie que $2i$ est une solution de (E).
   b) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$.
2. a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   b) Déduis-en les solutions de l'équation (E).
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité **2 cm**.
   On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $\sqrt{3} - i$; $1 + i$; $\sqrt{3} + i$ et $2i$.
   a) Place les points A, B, C et D dans le repère.
   b) Détermine le module et l'argument principal de z_A et z_B.
4. On pose $Z = \frac{z_B}{z_A}$
   a) Ecris Z sous forme algébrique.
   b) Ecris Z sous forme trigonométrique.
   c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 5 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = 4e^{-x}\ln(x - 1)$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : **2 cm**

1. Justifie que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et interprète graphiquement le résultat.
2. Calcule $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.
3. Soit g la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x - 1)$.
   On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle $]2,7 ; 2,8[$ tel que
   $g(\alpha) = 0$ et $\begin{cases} \forall x \in]1; \alpha[, & g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, & g(x) < 0 \end{cases}$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

a- Justifie que $\forall x \in]1 ; +\infty[: f'(x) = 4e^{-x}g(x)$.

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c- Justifie que $f(\alpha) = \frac{4e^{-\alpha}}{(\alpha-1)}$

4. Trace les éventuelles asymptotes et construis (C). On prendra $\alpha = 2,75$ et $f(\alpha) = 0.14$.

EXERCICE 3 (3 points)

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2 - \frac{3}{2+U_n} \end{cases}$

1. a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < U_n < 1$.
   b) Démontre que la suite (U_n) est croissante.
   c) Déduis-en que la suite (U_n) est convergente.
2. Soit la suite (V_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{U_n - 1}{1+U_n}$.
   a) Justifie que (V_n) est une suite géometrique de raison $\frac{1}{3}$ et précise son premier terme.
   b) Exprime V_n puis U_n en fontion de n.
   c) Justifie que la suite (V_n) est convergente et déduis-en la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 4 (4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, (E): $P(z) = 0$
avec $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1. a) Vérifie que $2i$ est une solution de (E).
   b) Détermine les nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$.
2. a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   b) Déduis-en les solutions de l'équation (E).
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité **2 cm**.
   On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $\sqrt{3} - i$; $1 + i$; $\sqrt{3} + i$ et $2i$.
   a) Place les points A, B, C et D dans le repère.
   b) Détermine le module et l'argument principal de z_A et z_B.
4. On pose $Z = \frac{z_B}{z_A}$
   a) Ecris Z sous forme algébrique.
   b) Ecris Z sous forme trigonométrique.
   c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 5 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]1\,; +\infty[$ par $f(x) = 4e^{-x}\ln(x-1)$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : **2 cm**

1. Justifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et interprète graphiquement le résultat.
2. Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.
3. Soit g la fonction définie sur $]1\,; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x-1)$.
   On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle $]2{,}7\,; 2{,}8[$ tel que
   $g(\alpha) = 0$ et $\begin{cases} \forall x \in]1; \alpha[, & g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, & g(x) < 0 \end{cases}$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

a- Justifie que $\forall x \in]1\,; +\infty[\,: f'(x) = 4e^{-x}g(x)$.

b- Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c- Justifie que $f(\alpha) = \frac{4e^{-\alpha}}{(\alpha-1)}$

4. Trace les éventuelles asymptotes et construis (C). On prendra $\alpha = 2{,}75$ et $f(\alpha) = 0.14$.

EXERCICE 6 (5 points)

Dans le cadre de son activité de Noël, le club Mathématique d'un lycée de la région du Cavally projette d'organiser un jeu dont les bénéfices serviront à l'achat de manuels et matériels mathématiques pour les élèves dudit club. Ce jeu consiste à tirer au hasard, successivement et sans remise deux boules d'une urne qui contient 6 boules vertes et n boules rouges, toutes indiscernables au toucher. Pour chaque boule verte tirée, le joueur gagne 300 fcfa, et pour chaque boule rouge tirée, il perd 100 fcfa.

Les organisateurs discutent du nombre maximum de boules rouges à disposer dans l'urne pour que le gain moyen après un nombre de parties soit strictement positif.

L'un des organisateurs, élève en terminale affirme que le nombre de boules rouges à disposer dans l'urne est égale à 8.

Surpris par cette affirmation certains membres du club te sollicitent.

A l'aide de tes connaissances mathématiques, vérifie si l'affirmation de cet organisateur est exacte.