GROUPE LA CERTITUDE

ORGANISATION DE TD, COURS DE RENFORCEMENT, REVISION AUX DIFFERENTS EXAMENS

Lieu : EPP GBEGAMEY SUD

DISCIPLINE – TRAVAIL - RIGUEUR

Tél : 96 38 92 49

EXAMENS BLANCS DEPARTEMENTAUX 2024

MATHS BAC C

Alibori

Atlantique

Borgou

Collines

Donga

Littoral

Ouémé

Réalisé par le penseur 96 38 92 49

COURS INTENSIFS juillet 2024

(COURS DE RENFORCEMENT 2024)

Classes ouvertes : 3ème – 1ères (C, D)

Tles (ABCD)

MODALITES DE PAIEMENT

Option 1 : Payez la totalité à l'inscription.

……………………………………………………………………………

Option 2 : Payez **10.000F** à l'inscription et le reste au plus tard le **lundi 10 juillet 2024**

Pour plus d'informations appeler :96 38 92 49 - 52 81 89 60
95 51 17 61

OBJECTIF VISE : PROGRAMMES DES CLASSES OUVERTES

$$\begin{cases} 3è \quad SA1 \quad - SA2 - SA3 - SA4 \\ Tle\ CD - \ SA1 - \ SA2 - SA3 \quad \text{en deux MOIS.} \\ 1ères - SA1 - \ SA2 - SA3 \end{cases}$$

LIEU : ***EPP GBEGAMEY SUD GROUPE ABC (après le CEG GBEGAMEY en face du Collège Notre-Dame des Apôtres de Cotonou)***

DEROULEMENT : Du 03 **Juillet** au **31 Août 2024**

DUREE DE FORMATION : 09 Semaines

JOURS ET HEURES : Du lundi **au** Jeudi de **8H30** à **13H00**

NB : Les inscriptions sont prévues du 01 mai au 17 juin 2024.

Au Groupe la Certitude, c'est l'expérience et le travail bien fait.

DDESTFP – ALIBORI **SESSION DE 2024**

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL – BAC

EPREUVE :MATHAMATIQUES

SERIE: C

DUREE: 4H

COEF:06

Situation d'évaluation

Contexte : Les mathématiques au service de l'architecture

Pour garder secrètes certaines informations confidentielles contenues dans ses dossiers de construction, l'architecte Comlan a recourt à l'outil mathématique pour les coder avant la réalisation des maquettes. Dans le cadre de l'appel d'offres relatif à la construction d'un nouveau centre de spectacle auquel il veut participer, Comlan a prévu, dans son offre technique, une grande salle polyvalente avec des salles annexes ainsi que des aménagements extérieurs comprenant les parkings et autres accès.

Rose, fille de Comlan et élève en classe de terminale C, s'intéresse particulièrement à la sécurité de la grande salle et à la représentation des salles annexes que Comlan prétend avoir réalisés à partir des considérations ci-après :

- L'ouverture de la grande salle est codée par un entier naturel de 4 chiffres
- Les salles annexes à la grande salle polyvalente peuvent être déduites les unes des autres par des transformations particulières de l'espace
- L'une des salles annexes à la forme d'un solide ABCDE. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct, on a : $A(0;4;-3), B(0;1;-2), C(-1;0;-1), D(0;-5;-5)$ et le point E vérifie $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$. Les transformations suivantes seront utilisées dans la réalisation d'autres salles annexes :
  La réflexion s_1 de plan (BCD)
  L'application h qui à tout point M de l'espace associe le point M'tel que M' soit le barycentre des points pondérés $(A;\alpha),(B;\beta),(M;1)$ avec $\alpha\ et\ \beta$ des nombres réels tels que $\alpha+\beta\neq-1$.
  Rose se préoccupe de connaître les transformations géométriques utilisées pour la réalisation des salles annexes, le code d'ouverture de la salle polyvalente, l'aire de la surface des parkings ainsi que les voies d'accès au centre de spectacle.

Tâche :Tu es invité(e) à répondre aux différentes préoccupations de Rose en résolvant les trois problèmes ci-après :

Problème 1 :

1) a- Démontre que BCDE est un rectangle.
   b- Démontre que ABCDE esr une pyramide et détermine sa hauteur.
2) Détermine l'expression analytique de s_1.
3) a- Détermine suivant les valeurs de $\alpha\ et\ \beta$ l'ensemble des points invariants par h.
   b- Détermine la nature de h suivant les valeurs de $\alpha\ et\ \beta$.

Problème 2 :

Le code d'ouverture de la salle polyvalente est un entier q de 4 chiffres dans le système décimal à la fois divisible par 6 et par 7 et qui s'écrit $\overline{126}$ dans le système de numération de base b avec b une solution de l'équation $x^2 + \bar{2}x + \bar{6} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

4) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \bar{2}x + \bar{6} = \bar{0}$.
5) Détermine toutes les valeurs possibles de b.
6) Détermine q sachant que $40 < b < 55$.

Problème 3

Dans le plan d'aménagement du site, les raccordements aux divers accès au centre de spectacle sont matérialisés par des courbes issues de la famille de courbes (C_m) représentant dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), les fonctions f_m définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = x + m(x+1)e^{-x}$; m étant un paramètre réel non nul.

Partie A

7) Démontre que toutes les courbes (C_m) passent par un point S dont les coordonnées ne dépendent pas de m.
8) Détermine les fonctions dérivées première et seconde de f_m .
9) a- Etudie , suivant les valeurs de m , le signe de la dérivée seconde de f_m. Tu distingueras deux cas : $m < 0$ et $m > 0$.
   b- Calcule les limites de la dérivée première de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$
   c- Dresse le tableau des variations de la dérivée première de f_m dans chacun des cas $m < 0$ et $m > 0$.

Partie B

On suppose dans la suite que $m < 0$

10) a- Démontre que l'équation $f'_m(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]-\infty; 1[$
    b- Déduis-en le sens de variation de f_m .
11) a- Calcule les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$.
    b- Dresse le tableau des variations de f_m .
12) Démontre que la droite d'équation y = x est asymptote à (C_m) en $+\infty$
13) Démontre que la solution x_0 de l'équation $f'_{-1}(x) = 0$ est telle que $-0{,}57 < x_0 < -0{,}56$.
14) Dresse les tableaux de variation des fonctions f_{-1} et f_{-2} .
15) a- Etudie la branche infinie en $-\infty$ de chacune des courbes (C_{-1}) et (C_{-2}) .
    b- Démontre que $-1{,}35 < f_{-1}(x_0) < -1{,}31$ et $-2{,}11 < f_{-2}(x_0) < -2{,}06$.
16) Démontre que (C_{-1}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse x_1 et x_2 telles que $-2 < x_1 < -1$ et $0 < x_2 < 1$.
17) Démontre que (C_{-2}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse x_3 et x_4 telles que $-2 < x_3 < -1$ et $1 < x_4 < 2$
18) Etudie la position relative des courbes (C_{-1}) et (C_{-2}).
19) Trace les courbes (C_{-1}) et (C_{-2}) dans le plan.
20) L'aire de la surface des parkings est assimilée à celle du domaine délimité par courbes (C_{-1}) et (C_{-2}) et les droites d'équations x = 0 et x = 2. Détermine en mètres carrés l'aire de la surface des parkings sachant que l'unité de longueur est 100 mètres.

FIN

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL :ALIBORI

EPREUVE : MATHEMATIQUES CLASSE : TleC

CLE ET GRILLE DE CORRECTION

N°	*Eléments de réponse*	***Ca :*** *Le candidat :*	***Cm :*** *Le candidat :*	***Co :*** *Le candidat :*	*Totaux*
1.	**Problème 1**($\mathbf{21}$$\boldsymbol{pts}$) a) Démontrons que BCDE est un rectangle On a : $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ équivaut successivement à : $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$; : $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$; : $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DC}$ Alors BCDE est un parallélogramme (1) $\overrightarrow{BC}(-1;-1;1)$; $\overrightarrow{CD}(1;-5;-4)$ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=(-1)\times 1+(-1)\times(-5)+1\times(-4)=-1+5-4=0$ Alors $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$. Par suite $(BC)\perp(CD)$.De plus $(BC)\cap(CD)=\{C\}$ Alors (BC) *est perpendiculaire* à (CD) (2) De (1) *et* (2) BCDE est un rectangle	*Identifie* • $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ • $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$ *0,5+0,5*	*Ecrit* • $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ équivaut à : $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ • $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=(-1)\times 1+(-1)\times(-5)+1\times(-4)=-1+5-4$ • $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$ *0,5+0,5+0,5*	Trouve • $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DC}$ • BCDE est un parallélogramme • $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$ • $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$ • BCDE est un rectangle ***0,5+0,5+0,5+0,5+0,5***	***5pts***
	b) Démontrons que ABCDE est une pyramide et déterminons sa hauteur BCDE est un rectangle alors les points B, C, D, E appartiennent au plan (BCD). Montrons que A $\notin(BCD)$ $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal au plan (BCD) $\overrightarrow{BC}(-1;-1;1)$; $\overrightarrow{CD}(1;-5;-4)$ $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{CD}$ $(9\,;-3\,;6)$ (BCD): $9x-3y+6z+d=0$ $(d\in\mathbb{R})$ B$\in(BCD)$ équivaut successivement à :$9\times 0-3\times 1+6(-2)+d=0$; d= 15. D'où (BCD): $9x-3y+6z+15=0$ Soit (BCD): $3x-y+2z+5=0$ A$(0;4;-3)$. Supposons que A $\in(BCD)$ A $\in(BCD)$ équivaut successivement à : $3\times 0-4+2(-3)+5=0$; -4-6+5 = 0 ; -5 = 0 $(absurde)$ alors A $\notin(BCD)$	*Identifie* • Les points B, C, D, E et le plan (BCD). • $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{CD}$ *1**pt***	• *Utilise une méthode pour calculer les coordonnées de* $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{CD}$ • *Ecrit* (BCD): $9x-3y+6z+d=0$ • *Ecrit* H= $d(A\,;(BCD))=\frac{[3\times 0-4+2(-3)+5]}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}$ *1,5pts*	Trouve . • (BCD): $3x-y+2z+5=0$ • A $\notin(BCD)$ • ABCDE est une pyramide de sommet A • H= $\frac{5}{\sqrt{14}}ul$ ***2pts***	***4,5pts***

	Les points B, C, D, E appartiennent au plan (BCD) *et* $A \notin (BCD)$ D'où ABCDE est une pyramide de sommet A Soit H la hauteur de cette pyramide H= $d(A\,;(BCD)) = \frac{\lvert 3\times0-4+2(-3)+5\rvert}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{\lvert -5\rvert}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}ul$ d'où H= $\frac{5}{\sqrt{14}}ul$				
2	Déterminons l'expression analytique de S_1 S_1 est la réflexion de plan (BCD) Soit M$(x;y;z)$ *et* M''$(x'';y'';z'')$ deux points de l'espace tels que $S_1\,(M) = M''$ Si M $\in (BCD)$ alors $S_1\,(M) = M$ Si M $\notin (BCD)$ alors le plan (BCD) est le plan médiateur de $[MM'']$.Ainsi le milieu I de $[MM'']$ appartient au plan (BCD) et $\overrightarrow{MM''} = k\vec{n}$ avec k un nombre réel et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan (BCD) I$\left(\frac{x+x''}{2};\frac{y+y''}{2};\frac{z+z''}{2}\right)$ *I*$\in (BCD)$ *équivaut successivement à :* $3\left(\frac{x+x''}{2}\right) - \left(\frac{y+y''}{2}\right) + 2\left(\frac{z+z''}{2}\right)+5 = 0$; $3x+3x''-(y+y'')+2z+2z''+10 = 0$; $3x-y+2z+3x''-y''+2z''+10 = 0$ (1) $\vec{n}(3;-1;2)$ $\overrightarrow{MM''} = k\vec{n}$ *équivaut successivement à :* $\begin{cases} x''-x = 3k \\ y''-y = -k \\ z''-z = 2k \end{cases};\begin{cases} x'' = 3k+x & (2) \\ y'' = -k+y & (3) \\ z'' = 2k+z & (4) \end{cases}$ $(2),(3),(4)$ *dans* (1) *donne successivement :* $3x-y+2z+3(3k+x)-(-k+y)+2(2k+z)+10 = 0$; $6x-2y+4z+14k+10 = 0$; $3x-y+z+7k+5 = 0$; $7k = -3x+y-2z-5$; $k = \frac{1}{7}(-3x+y-2z-5)$ (5) (5) *dans* $(2),(3),(4)$ *donne successivement :* $\begin{cases} x'' = \frac{3}{7}(-3x+y-2z-5)+x \\ y'' = \frac{-1}{7}(-3x+y-2z-5)+y \\ z'' = \frac{2}{7}(-3x+y-2z-5)+z \end{cases};\begin{cases} x'' = \frac{1}{7}(-2x+3y-6z-15) \\ y'' = \frac{1}{7}(3x+6y+2z+5) \\ z'' = \frac{1}{7}(-6x+2y+3z-10) \end{cases}$	*Identifie* • M $(x;y;z)$ *et* M'' $(x'';y'';z'')$ ***Et le plan*** (BCD) • le milieu I de $[MM'']$ *1pt*	*Ecrit* • $\overrightarrow{MM''} = k\vec{n}$ • *I*$\in (BCD)$ *équivaut successivement à :* $3\left(\frac{x+x''}{2}\right) - \left(\frac{y+y''}{2}\right) + 2\left(\frac{z+z''}{2}\right)+5 = 0$; $3x+3x''-(y+y'')+2z+2z''+10 = 0$; • $\overrightarrow{MM''} = k\vec{n}$ *équivaut à :* $\begin{cases} x''-x = 3k \\ y''-y = -k \\ z''-z = 2k \end{cases}$ *1,5pts*	Trouve • $\begin{cases} x'' = 3k+x & (2) \\ y'' = -k+y & (3) \\ z'' = 2k+z & (4) \end{cases}$ • $k = \frac{1}{7}(-3x+y-2z-5)$ • *l'expression analytique de* S_1 *1,5pts*	***4pts***

	D'où S_1: $\begin{cases} x'' = \frac{1}{7}(-2x+3y-6z-15) \\ y'' = \frac{1}{7}(3x+6y+2z+5) \\ z'' = \frac{1}{7}(-6x+2y+3z-10) \end{cases}$				
3	**a-** Déterminons suivant les valeurs de α *et* β l'ensemble des points invariants par h On a : $\mathrm{h}(M) = M'$ avec M'= bar$\{(A,\alpha);(B,\beta);(M,1)\}$ Soit M un point de l''espace tel que $\mathrm{h}(M) = M$ $\mathrm{h}(M) = M$ équivaut successivement à : M = bar$\{(A,\alpha);(B,\beta);(M,1)\}$; :$\alpha\ \overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MM} = \vec{0}$; $\alpha\ \overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ Si $\alpha+\beta = 0$ alors pour tout point M de l'espace , $\alpha\ \overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ est constant $\alpha+\beta = 0$ équivaut à : $\alpha = -\beta$ Ainsi $\alpha\ \overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ équivaut successivement à : $\alpha\ \overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0}$; $\alpha\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0}$; $\alpha\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\right) = \vec{0}$; $\alpha\left(\overrightarrow{BA}\right) = \vec{0}$; *Si* $\alpha = \beta = 0$ alors l'espace est l'ensemble des points invariants par h *Si* $\alpha \neq 0$ *avec* $\alpha+\beta = 0$ alors l'ensemble des points invariants par h est un singleton *Si* $\alpha+\beta \neq 0$ alors $\mathrm{h}(M) = M$ équivaut à : M = bar$\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$. Dans ce cas l'ensemble des points invariants par h est le singleton $\{T\}$ avec T = bar$\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$	*Identifie* • $\mathrm{h}(M) = M'$ • $\mathrm{h}(M) = M$ • $\alpha+\beta = 0$ *et* $\alpha+\beta \neq 0$ *1,5pts*	***Ecrit*** • $\mathrm{h}(M) = M$ équivaut à : M = bar $\{(A,\alpha);(B,\beta);(M,1)\}$ • Si $\alpha+\beta = 0$ alors pour tout point M de l'espace , $\alpha\ \overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$ est constant • *Si* $\alpha+\beta \neq 0$ alors $\mathrm{h}(M) = M$ équivaut à : M = bar$\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ *1,5pts*	*Trouve* • *Si* $\alpha = \beta = 0$ alors l'espace est l'ensemble des points invariants par h • *Si* $\alpha \neq 0$ *avec* $\alpha+\beta = 0$ alors l'ensemble des points invariants par h est un singleton • *Si* $\alpha+\beta \neq 0$ alors l'ensemble des points invariants par h est le singleton $\{T\}$ avec T = bar$\{(A,\alpha) ; (B,\beta)\}$ *1,5pts*	***4,5pts***
	b- Déterminons la nature de h suivant les valeurs de α *et* β *Si* $\alpha = \beta = 0$ alors h est l'application identique de l'espace	*Identifie* • $\alpha+\beta$ =0 et $\alpha+\beta$	*Ecrit* • *Si* $\alpha+\beta \neq 0$ alors M'= bar	*Trouve* • *Si* $\alpha = \beta = 0$ alors h est l'application	***3pts***

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$Si\ \alpha\ \neq 0\ avec\ \ \alpha+\beta=0$ alors h est une application constante de l'espace
$Si\ \alpha+\beta\neq 0$ alors M'= bar$\{(A,\alpha);(B,\beta);(M,1)\}$ équivaut successivement à : $\alpha\,\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$; $\alpha\left(\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TB}\right)+\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TM}=\vec{0}$; $(1+\alpha+\beta)\,\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TM}=\vec{0}$ car $\alpha\,\overrightarrow{TA}+\beta\overrightarrow{TB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{TM'}=\frac{1}{1+\alpha+\beta}\overrightarrow{TM}$ car
$1+\alpha+\beta\neq 0$
Alors h est l'homothétie de centre T et de rapport
$\frac{1}{1+\alpha+\beta}$</td>
<td>$\neq 0$
• M'= bar
$\{(A,\alpha);(B,\beta);($</td>
<td>$\{(A,\alpha);(B,\beta);(M,1)\}$ équivaut successivement à :
$\alpha\,\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$; $\alpha\left(\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TB}\right)+\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TM}=\vec{0}$; $(1+\alpha+\beta)\,\overrightarrow{M'T}+\overrightarrow{TM}=\vec{0}$ car $\alpha\,\overrightarrow{TA}+\beta\overrightarrow{TB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{TM'}=\frac{1}{1+\alpha+\beta}\overrightarrow{TM}$ car
$1+\alpha+\beta\neq 0$

0,5pt</td>
<td>identique de l'espace
• $Si\ \alpha\ \neq 0\ avec\ \ \alpha+\beta=0$ alors h est une application constante de l'espace
• $Si\ \alpha+\beta\neq 0$ alors h est l'homothétie de centre T et de rapport $\frac{1}{1+\alpha+\beta}$

0,5pt+1pt</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>***4.***</td>
<td>**<u>Problème</u> 2** $(\mathbf{10{,}5}\boldsymbol{pts})$
Résolvons dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+\overline{2}x+\overline{6}=\overline{0}$
$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\ \overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\}$
$x^2+\overline{2}x+\overline{6}=\overline{0}$ équivaut successivement à : $(x+\overline{1})^2+\overline{5}=\overline{0}$;
$(x+\overline{1})^2=\overline{2}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$\overline{0}$</td><td>$\overline{1}$</td><td>$\overline{2}$</td><td>$\overline{3}$</td><td>$\overline{4}$</td><td>$\overline{5}$</td><td>$\overline{6}$</td></tr>
<tr><td>x^2</td><td>$\overline{0}$</td><td>$\overline{1}$</td><td>$\overline{4}$</td><td>$\overline{2}$</td><td>$\overline{2}$</td><td>$\overline{4}$</td><td>$\overline{1}$</td></tr>
</table>
D'après le tableau, $x^2+\overline{2}x+\overline{6}=\overline{0}$ équivaut successivement à : x+ $\overline{1}=\overline{3}\ ou\ x+\overline{1}=\overline{4}; x=\overline{2}\ ou\ x=\overline{3}$ d'où $\{\overline{2};\overline{3}\}$ est l'ensemble des solutions de l' équation $x^2+\overline{2}x+\overline{6}=\overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$</td>
<td>*Identifie*
• *L'équation*
• *Les éléments de* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
• *Les éléments de* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

1,5pts</td>
<td>• *Ecrit*
$x^2+\overline{2}x+\overline{6}=\overline{0}$ équivaut successivement à : $(x+\overline{1})^2+\overline{5}=\overline{0}$;
$(x+\overline{1})^2=\overline{2}$
• *Utilise le tableau de congruence modulo 7*

1pt</td>
<td>*Trouve*
• $x^2+\overline{2}x+\overline{6}=\overline{0}$ équivaut successivement à : x+ $\overline{1}=\overline{3}\ ou\ x+\overline{1}=\overline{4}; x=\overline{2}\ ou\ x=\overline{3}$
• $\{\overline{2};\overline{3}\}$ est l'ensemble des solutions de l' équation $x^2+\overline{2}x+\overline{6}=\overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
1 pt</td>
<td>***3,5pts***</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>5.</td>
<td>Déterminons toutes les valeurs possibles de b
On a : q = $\overline{126}^b = b^2 + 2b + 6$
L'entier naturel b étant une solution de l'équation $x^2 + \bar{2}x + \bar{6} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ alors b = 2 + 7k ou b = 3 + 7k' $(k, k' \in \mathbb{N} - \{0\})$car b ≥ 7
Prenons : b = 2 + 7k $(k \in \mathbb{N} - \{0\})$
On a : q = $(7k+2)^2 + 2(7k+2) + 6 = (48k^2 + 42k + 12) + k^2 + 2$
Comme q est divisible par 6 et $(48k^2 + 42k + 12) \equiv 0[6]$ alors q est divisible par 6 si et seulement si $k^2 + 2 \equiv 0[6]$.
$k^2 + 2 \equiv 0[6]$ équivaut à : $k^2 \equiv 4[6]$
<table>
<tr><td>x</td><td>$\bar{0}$</td><td>$\bar{1}$</td><td>$\bar{2}$</td><td>$\bar{3}$</td><td>$\bar{4}$</td><td>$\bar{5}$</td></tr>
<tr><td>x^2</td><td>$\bar{0}$</td><td>$\bar{1}$</td><td>$\bar{4}$</td><td>$\bar{3}$</td><td>$\bar{4}$</td><td>1</td></tr>
</table>
D'après le tableau, : $k^2 \equiv 4[6]$ équivaut à : k = $\bar{2}$ ou k = $\bar{4}$ Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Par suite k = $2 + 6l_1$ ou $k = 4 + 6l_2$ avec $(l_1, l_2 \in \mathbb{N})$ .Ainsi b = $2 + 7(2 + 6l_1)$ ou $b = 2 + 7(4 + 6l_2)$; ce qui donne b = $16 + 42l_1$ ou b = $30 + 42l_2$ avec $(l_1, l_2 \in \mathbb{N})$
Prenons b = 3 + 7k' $(k' \in \mathbb{N} - \{0\})$
Ainsi q = $(7k'+3)^2 + 2(7k'+3) + 6 = (48k'^2 + 54k' + 18) + k'^2 + 2k' + 3$
Comme q est divisible par 6 et $(48k'^2 + 54k' + 18) \equiv 0[6]$ alors q est divisible par 6 si et seulement si
$k'^2 + 2k' + 3 \equiv 0\ [6]$
$k'^2 + 2k' + 3 \equiv 0\ [6]$ équivaut successivement à :
$(k'+1)^2 \equiv 4\ [6]$; k' + $\bar{1}$ = $\bar{2}$ ou k' + $\bar{1}$= $\bar{4}$; k'= $\bar{1}$ ou k'= $\bar{3}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Par suite k' = $1 + 6t_1$ou k' = $3 + 6t_2$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{N})$. Ainsi b = $3 + 7(1 + 6t_1)$ ou b = $3 + 7(3 + 6t_2)$
Ce qui donne b = $10 + 42t_1$ ou b = $24 + 42t_2$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{N})$ d'où les nombres b cherchés sont les éléments de l'ensemble
$\{16 + 42t; 30 + 42t; 10 + 42t; 24 + 42t\}$ avec $(t \in \mathbb{N})$</td>
<td></td>
<td>Ecrit
• q = $\overline{126}^b = b^2 + 2b + 6$
• Utilise le tableau de congruence modulo 6

1pt</td>
<td>Trouve
• b = 2 + 7k ou b = 3 + 7k' $(k, k' \in \mathbb{N} - \{0\})$
• b = $2 + 7(2 + 6l_1)$ ou $b = 2 + 7(4 + 6l_2)$
• b = $16 + 42l_1$ ou b = $30 + 42l_2$
• b = $3 + 7(1 + 6t_1)$ ou b = $3 + 7(3 + 6t_2)$
b = $10 + 42t_1$ ou b = $24 + 42t_2$
• les nombres b cherchés sont les éléments de l'ensemble
$\{16 + 42t; 30 + 42t; 10 + 42t; 24 + 42t\}$ avec $(t \in \mathbb{N})$

2,5pt</td>
<td>3,5pts</td>
</tr>
<tr>
<td>6.</td>
<td>Déterminons q sachant que $40 < b < 55$</td>
<td>Identifie
• Les</td>
<td>Ecrit
• $40 < b <$</td>
<td>Trouve
• b ≠16 + 42t</td>
<td>3,5pts</td>
</tr>
</table>

	Prenons b = 16 + 42t ($t \in \mathbb{N}$) $40 < b < 55$ équivaut successivement à : $40 < 16 + 42t < 55$; 24< $42t < 39$; $\frac{24}{42} < t < \frac{39}{42}$; $\frac{8}{14} < t < \frac{13}{14}$; t ∈ { } donc b ≠16 + 42t Prenons b = 30 + 42t ($t \in \mathbb{N}$) $40 < b < 55$ équivaut successivement à : $40 < 30 + 42t <$ 55 ;10< $42t < 25$; $\frac{10}{42} < t < \frac{25}{42}$; $\frac{5}{21} < t < \frac{25}{42}$; t ∈ { } donc b ≠30 + 42t Prenons b = 24 + 42t ($t \in \mathbb{N}$) $40 < b < 55$ équivaut successivement à : $40 < 24 + 42t <$ 55 ;16< $42t < 31$; $\frac{16}{42} < t < \frac{31}{42}$; $\frac{5}{21} < t < \frac{25}{42}$; t ∈ { } donc b ≠24 + 42t Prenons b = 10 + 42t ($t \in \mathbb{N}$) $40 < b < 55$ équivaut successivement à : $40 < 10 + 42t <$ 55 ;30< $42t < 35$; $\frac{30}{42} < t < \frac{45}{42}$; $\frac{10}{14} < t < \frac{15}{14}$; t ∈ {1} donc b = 10 + 42× 1 = 52 d'où q = $52^2 + 2 \times 52 + 6 = 2814$	***valeurs possible s de b*** ***0,5pt***	55 équivaut successivement à : $40 < 16 + 42t < 55$; 24< $42t < 39$; $\frac{24}{42} <$ $t < \frac{39}{42}$; $\frac{8}{14} < t < \frac{13}{14}$; t ∈ { } • $40 < b < 55$ équivaut successivement à : $40 < 10 + 42t <$ 55 ;30< $42t < 35$; $\frac{30}{42} < t < \frac{45}{42}$; $\frac{10}{14} < t < \frac{15}{14}$; t ∈ {1} ***1pt***	• b ≠30 + 42t • b ≠24 + 42t • b = 52 • q = 2814 ***2 pts***	
7.	**<u>Problème 3(59*pts*)</u>** Partie A Démontrons que toutes les courbes (C_m) passent par un point un point S dont les coordonnées ne dépendent pas de m Soit M$(x;y)$ un point du plan M ∈ (C_m) équivaut successivement à : y = $f_m(x)$; y = x + m$(x+1)e^{-x}$; x – y + m$(x+1)e^{-x}$ = 0 ; $\forall\, m \in \mathbb{R}^*; \begin{cases} x - y = 0 \\ (x+1)e^{-x} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = y \\ x + 1 = 0 \; car \;\; e^{-x} > 0; \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$; $\begin{cases} x = y \\ x = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$ d'où toutes les les courbes (C_m) passent par le point S$(-1;-1)$ dont les	***Identifie*** • M $(x;y)$ • $f_m(x)$ ***1pt***	Ecrit • M ∈ (C_m) équivaut successivement à : y = $f_m(x)$; y = x + m$(x+1)e^{-x}$; x – y + m$(x+1)e^{-x}$ = 0 ; • $\forall\, m \in \mathbb{R}^*$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ (x+1)e^{-x} = 0 \end{cases}$	*Trouve* • $\begin{cases} x = y \\ x = -1 \end{cases}$; • $\begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$ • S$(-1;-1)$ ***1,5pts***	***3,5pts***

	coordonnées ne dépendent pas de m		***1pt***		
8.	Déterminons les fonctions dérivées première et seconde de f_m Les fonctions polynomes $q_1: x \mapsto x \; et \; q_2: x \mapsto m(x+1)$ sont définies et dérivables sur ℝ et la function $q_3: x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur ℝ or $f_m = q_1 + q_2 \, q_3$ donc f_m est dérivable sur ℝ . $\forall x \in \mathbb{R}; f'_m(x)$ = 1+ me^{-x} -e^{-x} $(mx+m)$ = 1-mxe^{-x} d'où $\forall x \in \mathbb{R}; f'_m(x)$ = 1-mxe^{-x} f'_m est dérivable sur ℝ comme somme et produit de fonctions dérivables sur ℝ qui sont $x \mapsto 1; x \mapsto -mx \; et \; x \mapsto e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}; f''_m(x)$ = -m$e^{-x} - e^{-x}(-mx) = m\,e^{-x}\;(x-1)$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}; f''_m(x) = m\,e^{-x}\;(x-1)$	*Identifie* • $f_m(x)$ ***0,5pt***	• Utilise les proprietés sur somme et produit de fonctions dérivables • Calcule les dérivées première et seconde de f_m ***1pt***	*Trouve* • *La dérivée première de* f_m • *la dérivée seconde de* f_m *1pt*	***2,5 pts***
9.	a) Etudions suivant les valeurs de m le signe de $f''_m(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}; f''_m(x) = m\,e^{-x}\;(x-1)$ <u>1er cas</u>: m > 0 m > 0 alors $\forall x \in \mathbb{R}$; $m\,e^{-x} > 0$ et le signe de $f''_m(x)$ est celui de x-1 Posons : x-1= 0 x-1= 0 équivaut à : x =1. $\forall x \in \{1\}$; $f''_m(x) = 0$; $\forall x \in \;]-\infty; 1[; f''_m(x) < 0$ et $\forall x \in \;]1 : +\infty[; f''_m(x) > 0$ 2e cas : m < 0 m < 0 alors $\forall x \in \mathbb{R}$; $m\,e^{-x} < 0$. Ainsi $\forall x \in \{1\}$; $f''_m(x) =$ 0; $\forall x \in \;]-\infty; 1[; f''_m(x) >$ 0 et $\forall x \in \;]1 : +\infty[; f''_m(x) <$ 0	***Identifie*** • $f''_m(x)$ • m > 0 et m < 0 ***1pt***	Ecrit • <u>1er cas</u>: m > 0 m > 0 alors $\forall x \in \mathbb{R}$; $m\,e^{-x} > 0$ et le signe de $f''_m(x)$ est celui de x-1.$\forall x \in \;]-\infty; 1[; f''_m(x) < 0$ *et* $\forall x \in \;]1 : +\infty[; f''_m(x) > 0$ • 2e cas : m < 0 alors $\forall x \in \mathbb{R}$; $m\,e^{-x} <$ 0 . Ainsi $\forall x \in \;]-\infty; 1[; f''_m(x) >$ 0 et $\forall x \in \;]1 : +\infty[; f''_m(x) <$ 0 ***1pt***	*Trouve* • le signe de $f''_m(x)$ lorsque m > 0 et m < 0 ***0,5pt***	***2,5pts***

	b- Calculons les limites de f'_m en $-\infty$ $et\ en$ $+\infty$ $\forall\, x \in \mathbb{R};\ f'_m(x) = 1\text{-mx}e^{-x}$ <u>1er cas</u>: m > 0 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-\text{mx}e^{-x})$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(-\text{mx}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\text{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{u\to+\infty}(e^{u}) = +\infty\ avec\ u = -x \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f'_m(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\text{mx}e^{-x})$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-\text{x}) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty}(te^{t}) = 0\ avec\ t = -x \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x) = 1$ 2e cas : m < 0 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-\text{mx}e^{-x})$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} m = m \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\text{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty}(te^{t}) = +\infty\ \ avec\ t = -x \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f'_m(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\text{mx}e^{-x})$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-\text{x}) = -\infty \\ \lim\limits_{u\to-\infty}(ue^{u}) = 0\ avec\ u = -x \end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x) = 1$	***Identifie*** • f'_m ; $-\infty$ et $+\infty$ • m > 0 et m < 0 ***1pt***	Ecrit • Utilise les propriétés sur les limites usuelles • Utilise la propriété sur la limite de la composée de deux fonctions 1pt	*Trouve* <u>1er cas</u>: m > 0 • $\lim\limits_{x\to-\infty} f'_m(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x) = 1$ 2e cas : m < 0 • $\lim\limits_{x\to-\infty} f'_m(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x) = 1$ ***2pts***	***4pts***

C) Dressons le tableau de variation de f'_m dans chacun des cas : $m < 0$ et $m > 0$

1er cas: $m < 0$

$\forall x \in]-\infty; 1[; f''_m(x) > 0$ alors f'_m est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$.

$\forall x \in]1 : +\infty[; f''_m(x) < 0$ alors f'_m est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''_m(x)$		+		-	
$f'_m(x)$	$-\infty$	↗	$f'_m(1)$	↘	1

$f'_m(1) = 1 - me^{-1}$

2è cas: $m > 0$

$\forall x \in]-\infty; 1[; f''_m(x) < 0$ alors f'_m est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$.

$\forall x \in]1 : +\infty[; f''_m(x) > 0$ alors f'_m est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Ideentifie

- $m > 0$ et $m < 0$
- $f''_m(x)$
- *Le sens de variation de f'_m*

1,5pts

- *Dresse le tableau de f'_m lorsque* $m < 0$
- *Dresse le tableau de f'_m lorsque* $m > 0$

1pt

Trouve

1pt

2,5pts

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''_m(x)$	-		+
$f'_m(x)$	$+\infty$ ↘	$f'_m(1)$	↗ 1
			1

$f'_m(1) = 1 - me^{-1}$

</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1 0.</td>
<td>
<u>Partie B</u>
a) Démontrons que l'équation $f'_m(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]-\infty; 1[$
La fonction f'_m est continue et strictement croissante sur
</td>
<td>Identifie
• Le sens de variatio</td>
<td>Ecrit
• $f'_m(]-\infty; 1[) = \left]\lim_{x\to-\infty} f'_m(x);\ f'_m(1)\right[$</td>
<td>Trouve
• $f_m(]-\infty; 1[) =]-\infty; 1 - me^{-1}[$
• $f'_m(]1; +\infty[) =$</td>
<td>3,5pts</td>
</tr>
</table>

	$]-\infty;1[$ *alors* $f'_m(]-\infty;1[) = \left]\lim_{x\to-\infty} f'_m(x);\ f'_m(1)\right[$ $= \ ]-\infty; 1-me^{-1}[$ m < 0 alors $1-me^{-1} > 0$. Ainsi $0 \in]-\infty;1-me^{-1}[$ donc *l'équation* $f'_m(x) = 0$ *admet une solution unique* x_0 *dans* $]-\infty;1[$ *La fonction* f'_m *est continue et strictement décroissante sur* $]1;+\infty[$ *alors* $f'_m(]1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f'_m(x);\ f'_m(1)\right[$ $=]1; 1-me^{-1}[$ *Or* $0 \notin]1;1-me^{-1}[$ *donc l'équation* $f'_m(x) = 0$ *n'admet pas de solution dans* $]1;+\infty[$ <u>*Conclusion :*</u> *L'équation* $f'_m(x) = 0$ *admet une solution unique* x_0 *appartenant à* $]-\infty;1[$	***n et la continuité de*** f'_m • $]-\infty;1[$ *et* $]1;+\infty[$ ***1pt***	• $f'_m(]1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f'_m(x);\ f'_m(1)\right[$ *1pt*	$]1;1-me^{-1}[$ • *l'équation* $f'_m(x) = 0$ *admet une solution unique* x_0 *appartenant à* $]-\infty;1[$ ***1,5pt***	
	b) Déduisons-en le sens de variation de f_m *La fonction* f'_m *est continue et strictement croissante sur* $]-\infty;1[$ *et* $f'_m(x_0) = 0$ *alors on a :* $\forall x \in]-\infty;x_0[;$ x < $x_0 \Rightarrow f'_m(x) < f'_m(x_0) \Rightarrow f'_m(x) < 0$ $\forall x \in]x_0;1[;$ x > $x_0 \Rightarrow f'_m(x) > f'_m(x_0) \Rightarrow f'_m(x) > 0$ *La fonction* f'_m *est continue et strictement décroissante sur* $]1;+\infty[$ *alors* $f'_m(]1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f'_m(x);\ f'_m(1)\right[$ $=]1; 1-me^{-1}[$ *Par suite* $\forall x \in]1;+\infty[\ ;\ f'_m(x) > 0$ car 1> 0 *et* $1-me^{-1} > 0$ <u>Conclusion :</u> $\forall x \in]-\infty;x_0[;\ f'_m(x) < 0$ $\forall x \in]x_0;+\infty[\ ;\ f'_m(x) > 0$ $\forall x \in \{x_0\};\ f'_m(x) = 0$ $\forall x \in]-\infty;x_0[;\ f'_m(x) < 0$ alors f_m *est strictement décroissante sur* $]-\infty;x_0]$	*Identifie* • *La continuité et le sens de variation de* f'_m • *Le signe de* $f'_m(x)$ ***1pt***	*Ecrit* • f'_m *est continue et strictement croissante sur* $]-\infty;1[$ *et* $f'_m(x_0) = 0$ *alors on a :* $\forall x \in]-\infty;x_0[;$ x < $x_0 \Rightarrow f'_m(x) < f'_m(x_0) \Rightarrow f'_m(x) < 0$ $\forall x \in]x_0;1[;$ x > $x_0 \Rightarrow f'_m(x) > f'_m(x_0) \Rightarrow f'_m(x) > 0$ • f'_m *est continue et strictement décroissante sur*	*Trouve* • $\forall x \in]-\infty;x_0[;$ $f'_m(x) < 0$ • $\forall x \in]x_0;+\infty[\ ;$ $f'_m(x) > 0$ • f_m *est strictement décroissante sur* $]-\infty;x_0]$ • f_m *est strictement croissante sur* $[x_0;+\infty[$ ***2pts***	***4pts***

	$\forall\, x \in]x_0;+\infty[\,;\, f'_m(x) > 0$ alors f_m *est strictement croissante sur* $[x_0;+\infty[$		$]1;+\infty[$ *alors* $f'_m(]1;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f'_m(x);\, f'_m(1)\right[$ ***1pt***		
1 1.	a) Calculons les limites de f_m en $-\infty$ et en $+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[x + m(x+1)e^{-x}]$ $= \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\left(\frac{x}{x+1} + me^{-x}\right)$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 \\ \lim\limits_{t\to-\infty}(me^{-x}) = -\infty \; car\; m<0 \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x + m(x+1)e^{-x}] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x + m\left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\right]$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0 \end{cases}$ *Alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$	*Identifie* • $f_m(x)$	• *Utilise les propriétés sur les limites usuelles* ***1pt***	*Trouve* • $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$ ***1pt***	***3pts***
	b Dressons le tableau de variation de f_m	*Identifie* • *Le signe de 0,5pt* $f'_m(x)$	• *Dresse le tableau de* variation de f_m ***0,5pts***	 ***1pt***	***2pts***

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'_m(x)$	-		+
$f_m(x)$	$+\infty$ ↘	$f_m(x_0)$	↗ $+\infty$

$f_m(x_0) = x_0 + m(x_0+1)e^{-x_0}$

1 2.	Démontrons que la droite d'équation y = x est asymptote à (C_m) en $+\infty$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $f_m(x) - y = x + m(x+1)e^{-x}$ -x = $m(x+1)e^{-x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_m(x)-y) = \lim\limits_{x\to+\infty} m(x+1)e^{-x}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[m\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)\right]$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_m(x)-y) = 0$ d'où la droite	*Identifie* • $f_m(x)$ *et* $y = x$ ***0,5pt***	*Ecrit* • $f_m(x) - y = x + m(x+1)e^{-x}$ -x ***0,5pts***	*Trouve* • $f_m(x) - y = m(x+1)e^{-x}$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_m(x)-y) = 0$ • la droite d'équation y = x est asymptote à (C_m) en $+\infty$.	***2,5pts***

<table>
<tr>
<td></td>
<td>d'équation y = x est asymptote à (C_m) en $+\infty$.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>0,5pt+1pt</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1
3.</td>
<td>Démontrons que la solution x_0 de l'équation $f'_{-1}(x_0) = 0$ est telle que : $-0{,}57 < x_0 < -0{,}56$
$-0{,}57 < x_0 < -0{,}56$ équivaut à : $x \in]-0{,}57;-0{,}56[$
f'_{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]-0{,}57;-0{,}56[$
$f'_{-1}(x) = 1 + xe^{-x}$
$f'_{-1}(-0{,}57) = 1 - 0{,}57e^{0,57} \approx -0{,}0079$
$f'_{-1}(-0{,}56) = 1 - 0{,}56e^{0,56} \approx 0{,}019$
$f'_{-1}(-0{,}57) < 0$ et $f'_{-1}(-0{,}56) > 0$ alors $-0{,}57 < x_0 < -0{,}56$</td>
<td>Identifie
$]-0{,}57;-0{,}56[$ et
$f'_{-1}(-0{,}57)$; $f'_{-1}(-0{,}56)$

0,5pt</td>
<td>Ecrit
• $f'_{-1}(-0{,}57) < 0$ et $f'_{-1}(-0{,}56) > 0$

0,5pt</td>
<td>Trouve
• $f'_{-1}(-0{,}57) = 1 - 0{,}57e^{0,57}$
• $f'_{-1}(-0{,}57) \approx -0{,}0079$
• $f'_{-1}(-0{,}56) = 1 - 0{,}56e^{0,56}$
• $f'_{-1}(-0{,}56) \approx 0{,}019$
• $-0{,}57 < x_0 < -0{,}56$
2,5pts</td>
<td>3,5pts</td>
</tr>
<tr>
<td>1
4.</td>
<td>Dressons les tableaux de variation des fonctions f_{-1} et f_{-2}
Tableau de variation de f_{-1}
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'_{-1}(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f_{-1}(x)$</td><td>$+\infty$ ↘</td><td>$f_{-1}(x_0)$</td><td>↗ $+\infty$</td></tr>
</table>
$f_{-1}(x_0) = x_0 - (x_0 + 1)e^{-x_0}$</td>
<td>Identifie
• f_{-1} et f_{-2}

0,5pt</td>
<td>• Dresse les tableaux de variation des fonctions f_{-1} et f_{-2}

0,5pt</td>
<td></td>
<td>1pt</td>
</tr>
</table>

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'_{-2}(x)$	-		+
$f_{-2}(x)$	$+\infty$ ↘	$f_{-2}(x_0)$	↗ $+\infty$

$$f_{-2}(x_0) = x_0 - 2(x_0 + 1)e^{-x_0}$$

1 5.	a-Etudions la branche infinie en $-\infty$ de chacune des courbes (C_{-1}) *et* (C_{-2}) $\forall\, x \in \mathbb{R};\ f_{-1}(x) = x-(x+1)e^{-x}$ $f_{-2}(x) = x-2(x+1)e^{-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x) = +\infty$; calculons alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-1}(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-(x+1)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x}-\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}\right]$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(1)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-\left(\frac{x+1}{x}\right) = -1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}) = +\infty\end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-1}(x)}{x} = -\infty$. Par suite (C_{-1}) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{-2}(x) = +\infty$; calculons alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-2}(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-2}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2(x+1)e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x}-2\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-2\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x}\right]$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(1)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-2\left(\frac{x+1}{x}\right) = -2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}) = +\infty\end{cases}$ Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-2}(x)}{x} = -\infty$. Par suite (C_{-2}) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $-\infty$	*Identifie* $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x) = +\infty$ ***0,5pt***	*Ecrit* • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-1}(x)}{x}$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-2}(x)}{x}$ ***1pt***	*Trouve* • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-1}(x)}{x} = -\infty$ • (C_{-1}) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $-\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f_{-2}(x)}{x} = -\infty$ • (C_{-2}) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $-\infty$ *2pts* ***1pt***	***3,5pts***

	b- Démontrons que : $-1,35 < f_{-1}(x_0) < -1,31$ et $-2,11 < f_{-2}(x_0) < -2,06$ $f_{-1}(x_0) = x_0 - (x_0+1)e^{-x_0}$ $f_{-2}(x_0) = x_0 - 2(x_0+1)e^{-x_0}$ On a : $-0,57 < x_0 < -0,56$ (a) $-0,57 < x_0 < -0,56$ équivaut à : $0,43 < x_0 + 1 < 0,44$ (1) $-0,57 < x_0 < -0,56$ équivaut successivement à : $0,56 < -x_0 < 0,57$; $1,75 < e^{-x_0} < 1,76$ (2) De (1) et (2) on a : $0,75 < (x_0+1)e^{-x_0} < 0,77$ (3) (3) équivaut à : $-0,77 < -(x_0+1)e^{-x_0} < -0,75$ (4) De (a) et (4) on a : $-1,34 < f_{-1}(x_0) < -1,31$ or $-1,35 < -1,34$ D'où $-1,35 < f_{-1}(x_0) < -1,31$ (4) équivaut à : $-1,54 < -2(x_0+1)e^{-x_0} < -1,50$ (5) De (5) et (a) on a : $-2,11 < f_{-2}(x_0) < -2,06$	*Identifie* • $f_{-1}(x_0)$; $f_{-2}(x_0)$ *et* $-0,57 < x_0 < -0,56$ ***05pt***	***Ecrit*** • $-0,57 < x_0 < -0,56$ équivaut à : $0,43 < x_0 + 1 < 0,44$ • $0,75 < (x_0+1)e^{-x_0} < 0,77$ • $-1,54 < -2(x_0+1)e^{-x_0} < -1,50$ *1,5pt*	*Trouve* • $-1,35 < f_{-1}(x_0) < -1,31$ • $-2,11 < f_{-2}(x_0) < -2$ ***1pt***	***3pts***

16.	Démontrons que (C_{-1}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2 telles que : $-2 < x_1 < -1$ et $0 < x_2 < 1$ *La fonction f_{-1} est continue et strictement décroissante sur* $]-\infty;x_0[$ *alors* $f_{-1}(]-\infty;x_0[) = \left]f_{-1}(x_0); \lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x)\right[$ $=]f_{-1}(x_0);+\infty[$ *Or* $-1{,}35 < f_{-1}(x_0) < -1{,}31$ donc $f_{-1}(x_0) < 0$ $0 \in]f_{-1}(x_0);+\infty[$ alors l'équation $f_{-1}(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty;x_0[$ *La fonction f_{-1} est continue et strictement croissante sur* $]x_0;+\infty[$ *alors* $f_{-1}(]x_0;+\infty[) = \left]f_{-1}(x_0); \lim\limits_{x\to+\infty} f_{-1}(x)\right[$ $=]f_{-1}(x_0);+\infty[$ $0 \in]f_{-1}(x_0);+\infty[$ alors l'équation $f_{-1}(x) = 0$ admet une solution unique dans $]x_0;+\infty[$ Conclusion : l'équation $f_{-1}(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_1 *et* x_2 dans $\mathbb{R}$ avec $x_1 \in]-\infty;x_0[$ et $x_2 \in]x_0;+\infty[$ D'où (C_{-1}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2 Vérifions que $-2 < x_1 < -1$ et $0 < x_2 < 1$ $-2 < x_1 < -1$ équivaut à : $x_1 \in]-2;-1[$ $0 < x_2 < 1$ *équivaut* à : $x_2 \in]0;1[$ *La fonction f_{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur* $]-2;-1[$ *et sur* $]0;1[$ $f_{-1}(-2)$ = -2-$(-2+1)e^2 \approx 4{,}66$; $f_{-1}(-1) = -1$ $f_{-1}(-2) > 0$ et $f_{-1}(-1) < 0$ alors $-2 < x_1 < -1$ $f_{-1}(0) = -1$; $f_{-1}(1)$ = 1-$(1+1)e^{-1}$= 1-2e^{-1} $f_{-1}(1) > 0$ et $f_{-1}(0) < 0$ alors $0 < x_2 < 1$	*Identifie* • *Continuité et sens de variation De f_{-1} ;* *0,5*	*Ecrit* • $f_{-1}(]-\infty;x_0[) = \left]f_{-1}(x_0); \lim\limits_{x\to-\infty} f_{-1}(x)\right[$ • $f_{-1}(]x_0;+\infty[) = \left]f_{-1}(x_0); \lim\limits_{x\to+\infty} f_{-1}(x)\right[$ • $f_{-1}(-2) > 0$ et $f_{-1}(-1) < 0$ ***1,5pts***	*Trouve* • $f_{-1}(]-\infty;x_0[) =]f_{-1}(x_0);+\infty[$ • $f_{-1}(]x_0;+\infty[) =]f_{-1}(x_0);+\infty[$ • l'équation $f_{-1}(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_1 *et* x_2 dans $\mathbb{R}$ avec $x_1 \in]-\infty;x_0[$ et $x_2 \in]x_0;+\infty[$ • (C_{-1}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2 • $-2 < x_1 < -1$ et $0 < x_2 < 1$ ***2,5pts***	***4,5pts***
17.	Démontrons que (C_{-2}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_3 et x_4 telles que : $-2 < x_3 < -1$ et $1 < x_4 < 2$ *La fonction f_{-2} est continue et strictement décroissante sur* $]-\infty;x_0[$ *alors* $f_{-2}(]-\infty;x_0[) = \left]f_{-2}(x_0); \lim\limits_{x\to-\infty} f_{-2}(x)\right[$ $=]f_{-2}(x_0);+\infty[$	*Identifie* • *Continuité et sens de variation de f_{-2}* *0,5pt*	*Ecrit* • $f_{-2}(]-\infty;x_0[) = \left]f_{-2}(x_0); \lim\limits_{x\to-\infty} f_{-2}(x)\right[$ • $f_{-2}(]x_0;+\infty[) = \left]f_{-2}(x_0); \lim\limits_{x\to+\infty} f_{-2}(x)\right[$ • $f_{-2}(-2) > 0$ et	*Trouve* • $f_{-2}(]-\infty;x_0[) =]f_{-2}(x_0);+\infty[$ • $f_{-2}(]x_0;+\infty[) =]f_{-2}(x_0);+\infty[$ • l'équation $f_{-2}(x) =$	***5pts***

	Or $-2{,}11 < f_{-2}(x_0) < -2{,}06$ donc $f_{-2}(x_0) < 0$ $0 \in]f_{-2}(x_0)\,;+\infty[$ alors l'équation $f_{-2}(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty;x_0[$ *La fonction f_{-2} est continue et strictement croissante sur* $]x_0;+\infty[$ *alors* $f_{-2}(]x_0;+\infty[\,) = \left]f_{-2}(x_0);\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_{-2}(x)\right[$ $=]f_{-2}(x_0)\,;+\infty[$ $0 \in]f_{-2}(x_0)\,;+\infty[$ alors l'équation $f_{-2}(x) = 0$ admet une solution unique dans $]x_0;+\infty[$ Conclusion : l'équation $f_{-2}(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_3 *et* x_4 dans ℝ avec $x_3 \in]-\infty;x_0[$ et $x_4 \in]x_0;+\infty[$ D'où (C_{-2}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_3 et x_4 Vérifions que $-2 < x_3 < -1$ et $1 < x_4 < 2$ $-2 < x_3 < -1$ équivaut à : $x_1 \in]-2;-1[$ $1 < x_4 < 2$ *équivaut* à : $x_2 \in]1;2[$ *La fonction f_{-2} est continue sur ℝ et en particulier sur* $]-2;-1[$ *et sur* $]1;2[$ $f_{-2}(x) = x - 2(x+1)e^{-x}$ $f_{-2}(-2) = -2 - 2(-2+1)e^{2} = -2 + 2e^{2}$ $f_{-2}(-1) = -1 - 2(-1+1)e^{1} = -1$ $f_{-2}(-2) > 0$ et $f_{-2}(-1) < 0$ alors $-2 < x_3 < -1$ $f_{-2}(1) = 1 - 2(1+1)e^{-1} = 1 - 4e^{-1} = \frac{e-4}{e}$ $f_{-2}(2) = 2 - 2(2+1)e^{-2} = 2 - 6e^{-2} = \frac{2e^2-6}{e^2}$ $f_{-2}(2) > 0$ et $f_{-2}(1) < 0$ alors $1 < x_4 < 2$	***1pt***	$f_{-2}(-1) < 0$ ***1,5pts***	0 admet exactement deux solutions x_1 *et* x_2 dans ℝ avec $x_3 \in]-\infty;x_0[$ et $x_4 \in]x_0;+\infty[$ • (C_{-2}) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_3 et x_4 • $-2 < x_3 < -1$ et $1 < x_4 < 2$ ***2,5pts***	

18.	Etudions la position relative des courbes (C_{-1}) *et* (C_{-2}) $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $f_{-1}(x) = x - (x+1)e^{-x}$ $f_{-2}(x) = x - 2(x+1)e^{-x}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $f_{-1}(x)$ -$f_{-2}(x)$ = $x - (x+1)e^{-x}$- $x + 2(x+1)e^{-x}$ = $(x+1)e^{-x}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $e^{-x} > 0$ alors le signe de $f_{-1}(x)$ -$f_{-2}(x)$ est celui de x+1 Posons : x+1= 0 x+1= 0 équivaut à : x = -1 $\forall\, x \in \{-1\}$; $f_{-1}(x)$ -$f_{-2}(x)$ = 0 alors (C_{-1}) *et* (C_{-2}) se coupent au point $S(-1;-1)$ $\forall\, x \in \,]-\infty\,;-1[$: $f_{-1}(x)$ -$f_{-2}(x) < 0$ alors (C_{-1}) *est en* dessous de (C_{-2}) sur $]-\infty\,;-1[$ $\forall\, x \in \,]-1;+\infty[$: $f_{-1}(x)$ -$f_{-2}(x) > 0$ alors (C_{-1}) *est au* dessus de (C_{-2}) sur $]-1;+\infty[$	*Identifie* • $f_{-1}(x)$ *et* $f_{-2}(x)$ ***0,5pt***	*Ecrit* • $\forall\, x \in \,]-\infty\,;-1[$ $f_{-1}(x)$ - $f_{-2}(x) < 0$ • $\forall\, x \in \,]-1;+\infty[$: $f_{-1}(x)$ -$f_{-2}(x) > 0$ *1pt*	*Trouve* • $f_{-1}(x)$ -$f_{-2}(x)$=$(x+1)e^{-x}$ • (C_{-1}) *et* (C_{-2}) se coupent au point $S(-1;-1)$ • (C_{-1}) *est en* dessous de (C_{-2}) sur $]-\infty\,;-1[$ • (C_{-1}) *est au* dessus de (C_{-2}) sur $]-1;+\infty[$ ***2pts***	***3,5pts***
19.	Traçons les courbes (C_{-1}) *et* (C_{-2}) dans le plan	*Identifie Les tableaux de variation de* f_{-1} et f_{-2} *0,5pt*	• *Trace le repère* (O,I,J) • *Trace la droite d'équation y = x* • *Construis les* courbes (C_{-1}) *et* (C_{-2}) *1,5pt*		***2 pts***

2 0.	Déterminons en mètres carrés l'aire de la surface des parkings Soit A cette aire	*Identifie* • $f_{-1}(x)$ *et* $f_{-2}(x)$	***Ecrit*** •	*Trouve* • $\mathrm{A} = \big(-3e^{-2} + 1 -$	***3pts***

	A = $\left(\int_0^2 f_{-1}(x) - f_{-2}(x)\ dx\right) \times 10000m^2$ = $\left(\int_0^2 (x+1)e^{-x}\ dx\right) \times 10000m^2$ Posons : t(x) = x+1 et m'(x) = e^{-x} $t'(x) = 1$; on peut prendre m(x) = $-e^{-x}$ A = $\left(-3e^{-2} + 1 - \int_0^2 -e^{-x}\ dx\right) \times 10000m^2$ = $(-3e^{-2} + 1 - e^{-2} + e^0) \times 10000m^2$ = $(-4e^{-2} + 2) \times 10000m^2$ A = $(-40000e^{-2} + 20000)m^2$	• t(x) *et* m'(x) *1pt*	A = $\left(\int_0^2 f_{-1}(x) - f_{-2}(x)\ dx\right) \times 10000m^2$ • A= $\left(\int_0^2 (x+1)e^{-x}\ dx\right) \times 10000m^2$ 1pt	$\int_0^2 -e^{-x}\ dx\Big) \times 10000m^2$ • A = $(-40000e^{-2} + 20000)m^2$ 1pt	
		$40C_a \rightarrow 20pts$ 0,5pt→ C_a	*60*C_m →*30pts* *0,5pt*→ C_m	*80*C_0 →*40pts* *0,5pt*→ C_0	

On désigne par N la note sur 90 et p la note de perfectionnement sur 10.

- Si N $<$ 40 alors p = 0
- Si 40$\leq N <$ 60 alors p varie de 0 à 5
- Si N $\geq$ 60 alors p varie de 0 à 10
- Pour le deuxième et le troisième cas, l'enseignant appréciera la copie du candidat en tenant compte des indicateurs($propriété, originalité, lisibilité$) $pour\ attribuer\ la\ valeur\ de\ p$

REPUBLIQUE DU BENIN

****

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE,

TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL DE L'OUEME

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classe : TC

Durée : 2h

Contexte

Gérard un entrepreneur a une société chargée de construire un hôtel à cinq étoiles à l'opérateur économique Parfait.

Les nombres de tonnes de ciment et de fers utilisés pour la réalisation de l'hôtel sont les entiers naturels respectifs a et b vérifient le système : $(S)\begin{cases} a^3 + b^3 = 2953125 \\ PGCD(a,b) = 25 \end{cases}$ tels que :

$a > b$ et $120 \leq a \leq 135$

Les nombres respectifs de femmes et d'hommes responsables à plusieurs niveaux pour la finition de l'hôtel sont les entiers naturels x et y, vérifiant : $\overline{26x3}^{8} + \overline{3yx}^{16} = 2434$ où l'entier naturel y est plus que 8.

Certaines applications utilisées pour les réalisations de son chef d'œuvre sont les applications h et s de l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ définies respectivement comme ci-après :

- ✓ $(h(M) = M')$ équivaut à :
  $\left[\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM'} - \left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{CM}\right) + 2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}\right]$ où le point J est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(C;2)$
- ✓ $S = S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)}$ où (D_1); (D_2) sont les droites définies par :
  $(D_1): \frac{x+1}{2} = 2 - y = z + 2$ et $(D_2): \begin{cases} x = -\alpha + 3 \\ y = 2\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases} \quad (\alpha \epsilon \mathbb{R})$

Certaines décorations sur les façades des murs sont représentées à l'aide des carrés dont l'un est ABCD de centre O tel que : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k\epsilon\ \mathbb{Z})$ et $OA = 1$. Une des types de décorations est obtenue à partir de l'ensemble (Γ_t) des points M du plan (P) tels que :
$-MA^2 + 2MB^2 - MC^2 + 2MD^2 = lnt + 2$, pour certaines valeurs de t qui donneront à (Γ_t) une figure précise.

La voie à emprunter par les agents de la société au chantier est assimilable à une portion de la courbe représentative (C) d'une fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

Gerard, sollicite l'aide de son fils Honoré, élève en classe de terminale scientifique pour l'aider à trouver les valeurs des entiers naturels x, y a et b ; préciser la forme des figures des décorations. Honoré est invité par son père à donner l'allure de (C) dans le plan

Tâche : Tu es invité(e) comme Honoré à résoudre les trois problèmes suivants

Problème :1

1) Détermine les valeurs de a et b
2) Détermine les entiers naturels x et y

Problème : 2

3) a- Démontre que le point O est barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B; -2)$, $(C, 1)$ et $(D, -2)$
   b- Détermine t pour que (Γ_t) soit une figure précise et détermine la nature de (Γ_t)
4) a- Démontre que $(h(M) = M) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = -7\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
   c- Démontre que h admet un point invariant Ω.
   d- Déduis-en que h est une homothétie de centre Ω dont tu préciseras son rapport.
5) a- Démontre que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.
   b- Détermine l'équation du plan (P) les contenant
   b- Détermine un système paramétrique de la droite (Δ) qui est la perpendiculaire commune à (D_1) et à (D_2)
   e- Détermine l'expression analytique du demi-tour : S_Δ d'axe (Δ).
   f- Précise la nature et l'expression analytique de : ${S_P}^{-1} \circ S_\Delta$

Problème : 3

La fonction f est définie ℝ vers ℝ par : $f(x) = \begin{cases} e^x + \sqrt{x^2 - x} \; si \; x \geq 1 \\ \left(\frac{xln|x|}{x-1}\right) e; \;\; si]-\infty; 1[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

6) a-Étudie les variations de la fonction u définie de ℝ vers ℝ par: $u(x) = ln|x| - x + 1$

   b- Démontre que l'équation : $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0[$ et que :$-0{,}3 < \alpha < -0{,}2$

   c-Déduis-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
7) a- Détermine le domaine de définition de f
   b- Étudie la continuité de f en 0 et en 1.
   c- Étudie la dérivabilité de f en 0 et en 1. Interprèter les résultats obtenus.
8) a- Étudie la continuité et la dérivabilité de f sur ensemble de dérivabilité.
   b- Détermine la fonction dérivée f'
9) Achève l'étude des variations de f.
10) On pose $K = [1\,;\, +\infty[$ et soit g la fonction définie par : $\begin{array}{l} g{:}K\to f(K) \\ x\mapsto g(x)=f(x) \end{array}$
   a- Détermine $f(K)$
   b- Justifie que g admet une bijection réciproque g^{-1}
   c- Détermine le domaine de dérivabilité de g^{-1}
   d- Justifie le point $N(e; 1) \in (C')$ où (C') est la courbe représentation de la fonction g^{-1}
   e- Détermine le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C') en N
11) a- Détermine les branches infinies de la courbe (C).
   b- Construis (C)

CLE ET GRILLE DE CORRECTION DE L'EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL DU BACCALAUREAT (2023-2024)

MATIERE : MATHEMATIQUES **CLASSE** : Terminale C

N°	Eléments de réponses	Capacité « analyser » $1ca = 0,5pt$ Le candidat….	Capacité « mathématiser » $1cm = 0,5pt$ Le candidat….	Capacité « opérer » $1co = 0,5pt$ Le candidat….	Total
1-	**Problème I** **Déterminons les valeurs de a et b** $(S)\begin{cases} a^3+b^3=2953125 \\ PGCD(a,b)=25 \end{cases}$ avec $a>b$ et $120 \le a \le 135$ $PGCD(a,b)=25 \Leftrightarrow \exists(a',b') \in \mathbb{N}^2$: a = 25a', b = 25b' et PGCD(a', b') = 1. $a^3+b^3=2953125 \Leftrightarrow a'^3+b'^3=189$ $120 \le a \le 135 \Leftrightarrow \frac{120}{25} \le a' \le \frac{135}{25}$ $\Leftrightarrow a'=5$ car $a' \in \mathbb{N}$ $a'^3+b'^3=189$ et $a'=5$, alors b' = 4. Et on a bien PGCD(5 , 4) = 1. D'où a = 125 et b = 100.	**Identifie** Le système (S) et les conditions sur a et b. | | 1pt	**Traduit** $PGCD(a,b)=25$. | | **Utilise** Une méthode convenable | | 2pts	**Trouve** a = 125 et b = 100 | | 1pt	4pts
2-	**Déterminons x et y** On sait que $\overline{26x3}^{8}+\overline{3yx}^{16}=2434$ Cette écriture n'a de sens que si $0 \le x \le 7$ et $0 \le y \le 15$ On a : $\overline{26x3}^{8}+\overline{3yx}^{16}=2434 \Leftrightarrow$ $22\times 8^3+6\times 8^2+8x+3+3\times 16^2+16y+x=2434 \Leftrightarrow$ $9x+16y=255 \Rightarrow 7y \equiv 3[9]$ A l'aide d'une table de congruence, on obtient $y \equiv 3[9]$. Alors $\exists\, k \in \mathbb{Z} : y=9k+3$.	**Identifie** L'équation $\overline{26x3}^{8}+\overline{3yx}^{16}=2434$ 8 et 16 | |	**Ecrit** $\overline{26x3}^{8}+\overline{3yx}^{16}=2434$ $\Leftrightarrow 9x+16y=255$ | **Utilise**	**Trouve** $x=23-16k$ et $y=9k+3$. | | | | $x = 7$ et $y = 12$ | |	6pts

	De plus, on a $9x + 16 \times 9k + 16 \times 3 = 255 \Leftrightarrow x = 23 - 16k$. Or $x > 0$ et $y > 0$, donc $-\frac{1}{3} < k < \frac{23}{16}$. Ainsi $k = 0$ ou $k = 1$. Si $k = 0$, $y = 3$ et $x = 23$ impossible Si k = 1, y = 12 et x = 7. D'où $x = 7$ et $y = 12$.	1pt	une méthode de résolution de l'équation $9x + 16y = 255$ ||| 2pts	3pts	
	Récapitulatif (Problème 1)	2pts	4pts	4pts	10 points
	Problème 2				
3-a)	**Démontre que le point O est barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B\,;-2)$, $(C,1)$ et $(D,-2)$** ABCD étant un carré de centre O, alors $\begin{cases} \text{O milieu de } [AC] \\ \text{O milieu de } [BD] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ -2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ Par ailleurs 1+1-2-2 = -2 et $-2 \neq 0$ D'où le point O est barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B\,;-2)$, $(C,1)$ et $(D,-2)$.	Identifie O comme centre du carré ABCD | 0,5pt	Ecrit ABCD étant un carré de centre O, alors $\begin{cases} \text{O milieu de } [AC] \\ \text{O milieu de } [BD] \end{cases}$ | 0,5pt	Trouve $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = \vec{0}$ | Conclut O est barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B\,;-2)$, $(C,1)$ et $(D,-2)$. | 1pt	2pts
b-	**Déterminons t pour que (Γ_t) soit une figure précise et détermine la nature de (Γ_t)** $M \in (\Gamma_t) \Leftrightarrow -MA^2 + 2MB^2 - MC^2 + 2MD^2 = \ln t + 2$ O = bar{ $(A,1)$, $(B\,;-2)$, $(C,1)$, $(D,-2)$}, alors O = bar{ $(A,-1)$, $(B\,;2)$, $(C,-1)$, $(D,2)$}. Donc $M \in (\Gamma_t) \Leftrightarrow 2MO^2 - OA^2 + 2OB^2 - OC^2 + 2OD^2 = \ln t + 2$ On montre que OA = OB = OC = OD = 1. D'où $2MO^2 = \ln t \Leftrightarrow MO^2 = \frac{\ln t}{2}$	Identifie (Γ_t) | O = bar{ $(A,1)$, $(B\,;-2)$, $(C,1)$, $(D,-2)$},	Utilise Une méthode correcte pour démontrer que $M \in (\Gamma_t) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{\ln t}{2}$ || Le signe de lnt |	Trouve La nature de (Γ_t) suivant les valeurs de t || Conclut	4pts

	- Si $t \in]-\infty; 0[$, lnt n'existepas. Alors $(\Gamma_t) = \emptyset$ - Si $t \in]0; 1[$, $lnt < 0$. Donc $(\Gamma_t) = \emptyset$. - Si $t \in]1, +\infty[$, $lnt > 0$. Alors (Γ_t) est le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2lnt}}{2}$. - Si $t = 1$, alors $(\Gamma_t) = \{O\}$ Conclusion : *Pour* $t \in]1, +\infty[$, (Γ_t) est le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2lnt}}{2}$.	**1pt**	**1,5pt**	*Pour* $t \in]1, +\infty[$, (Γ_t) est le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2lnt}}{2}$. **1,5pt**	
4- a)	**Démontrons que $(h(M) = M) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = -7\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$** $h(M) = M' \Leftrightarrow$ $[\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM'} - (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}) \wedge (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{CM}) + 2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}]$ Donc $h(M) = M \Leftrightarrow$ $[\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} - (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}) \wedge (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{CM}) + 2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}]$ $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AM} - (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) \wedge (3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CA}) + 2\overrightarrow{CM} = \vec{0}]$ $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = -7\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ car J est le barycentre des points pondérés (A,1), (C,2).	**Identifie** L'application h J = bar{(A,1), (C,2)} **0,5pt**	**Utilise** Une méthode de démonstration correcte $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ **1pt**	**Conclut** $h(M) = M' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = -7\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ **1pt**	**2,5pts**
b-	**Démontre que h admet un point invariant Ω.** Soit M un point du plan. M est un point invariant par h, alors h(M) = M $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = -7\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.	**Identifie** $h(M) = M' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MJ} = -7\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ J et $-7\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$	**Utilise** Une propriété convenable	**Conclut** h admet un seul point invariant Ω du plan tel que $\Omega\vec{J} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.	**2,5pts**

	J est un point fixe et $-\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ un vecteur fixe . Alors il existe un unique point Ω du plan tel que $\overrightarrow{\Omega J} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. D'où h admet un seul point invariant.	1pt	1pt	0,5pt	
c-	**Déduis-en que h est une homothétie de centre Ω dont tu préciseras son rapport.** $h(M) = M' \Leftrightarrow$ $[\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM'} - (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}) \wedge (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{CM}) + 2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}]$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM'} - \overrightarrow{BM} - (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}) \wedge (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{CM}) = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MM'} - 7\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MM'} + 3\overrightarrow{\Omega J} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ $-2 \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$. Alors h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -2	**Identifie** L'application h et le point Ω. I 0,5pt	**Utilise** La définition d'une homothétie Une démarche correcte II 1pt	**Trouve** $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ II **Conclut** h est l'homothétie de centre Ω et de rapport* -2 I 1,5pt	3pts
5-a)	**Démontre que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.** $(G, \vec{u})$ et $(H, \vec{v})$ sont des repères respectifs des droites (D_1) et (D_2) avec G(-1,2,-2), H(3,0,0), $\vec{u}(2,-1,1)$ et $\vec{v}(-1,2,4)$ $\vec{u}.\vec{v} = -2 - 2 + 4 = 0$. $\vec{u}\wedge\vec{v}(-6,-9,3)$; $\overrightarrow{GH}(4,-2,2)$; $\overrightarrow{GH}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$ On a : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\overrightarrow{GH}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$. Alors les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.	**Identifie** Les droites (D_1) et (D_2) I 0,5pt	**Utilise** Une méthode de démonstration correcte Une méthode pour trouver un repère de (D_1) II 1pt	**Trouve** $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\overrightarrow{GH}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$ II **Conclut** (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires. I 1,5pt	3pts
	Détermine une équation du plan (P) les contenant	**Identifie** Le plan (P)	**Utilise** Une propriété convenable	**Trouve**	

Scanned by CamScanner

	$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à (P). De plus G ∈ (P). Alors on a : (P) : $2x + 3y - z - 6 = 0$	I 0,5pt	I 0,5pt	(P): $2x + 3y - z - 6 = 0$ II 1pt	2pts
c-	**<u>Détermine un système paramétrique de la droite (Δ) qui est la perpendiculaire commune à (D_1) et à (D_2)</u>** On montre que H(3,0,0) est le point d'intersection des droites (D1) et (D2). De plus le vecteur $\overrightarrow{u'}(2,3,-1)$ est un vecteur directeur de (Δ). D'où on a : $(\Delta): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$	Identifie Un repère de (Δ) I 0,5pt	Détermine le point d'intersection des droites (D1) et (D2). I Utilise Une propriété convenable I 1pt	Trouve H(3,0,0) est le point d'intersection des droites (D1) et (D2). I $(\Delta): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ I 1pt	2,5pts
d-	**<u>Détermine l'expression analytique du demi-tour : S_Δ d'axe (Δ).</u>** Soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ deux points de l'espace et I le milieu du segment [MM']. On a : $S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u'} = 0 \\ I \in (\Delta) \end{cases}$ On montre que $S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4t + 6 - x \\ y' = 6t - y \\ z' = -2t - z \end{cases}$ avec $t = \frac{1}{14}(2x + 3y - z - 6)$ D'où l'expression analytique de S_Δ est	Identifie La droite (Δ) I	Utilise Une méthode correcte II	Trouve $t = \frac{1}{14}(2x + 3y - z - 6)$ I l'expression analytique de S_Δ est $\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-3x + 6y - 2z + 30) \\ y' = \frac{1}{7}(6x + 2y - 3z - 18) \\ z' = \frac{1}{7}(-x - 3y - 6z + 6) \end{cases}$ III	3,5pts

	$\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-3x + 6y - 2z + 30) \\ y' = \frac{1}{7}(6x + 2y - 3z - 18) \\ z' = \frac{1}{7}(-x - 3y - 6z + 6) \end{cases}$	**0,5pt**	**1pt**	2pts	
e-	**Précise la nature et l'expression analytique de : $S_P^{-1} \circ S_\Delta$** $S_P^{-1} \circ S_\Delta = S_P \circ S_\Delta$ La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) en H. Alors $S_P^{-1} \circ S_\Delta$ est la symétrie centrale de centre H. Soit $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ deux points de l'espace. $S_P^{-1} \circ S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{x+x'}{2} \\ 0 = \frac{y+y'}{2} \\ 0 = \frac{z+z'}{2} \end{cases}$ D'où l'expression analytique de $S_P^{-1} \circ S_\Delta$ est $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$	**Identifie** Les applications S_P^{-1} et S_Δ II 1pt	**Utilise** Une propriété convenable I 0,5pt	**Trouve** $S_P^{-1} \circ S_\Delta$ est la symétrie centrale de centre H. I l'expression analytique de $S_P^{-1} \circ S_\Delta$ est $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$ II 1,5pt	**3pts**
	Récapitulatif (problème 2)	**6,5pts**	**9pts**	**12,5pts**	**28 points**
	Problème 3				
6-a	**Étudions les variations de la fonction u définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par: $u(x) = \ln\|x\| - x + 1$** $D_u = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ $\lim_{x \to -\infty} u(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{\ln\|x\|}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} u(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} u(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln\|x\|}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$	Identifie La fonction u	Utilise des propriétés pour -Calculer les limites aux bornes de Du II -Calculer $u'(x)$	Trouve $D_u = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ I Les limites de u aux bornes de Du II	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto -x+1$ sont continues et dérivables en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $|x| > 0$ donc la fonction $x \mapsto \ln|x| - x + 1$ est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a : $u'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$
$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; $u'(x) < 0$
$\forall x \in]0; 1[$; $u'(x) > 0$
u est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$ et strictement croissante sur $]0; 1[$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$u'(x)$</td><td>$-$</td><td>$\|$ $+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$u(x)$</td><td>$+\infty \searrow -\infty$</td><td>$\|$ $-\infty \nearrow$</td><td>0</td><td>$\searrow -\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>0,5pt</td>
<td>-Etudier le sens de variation de u

Utilise la forme d'un tableau de variation

2,5pts</td>
<td>$u'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

Le tableau de variation de u

2,5pts</td>
<td>5,5pts</td>
</tr>
<tr>
<td>b-</td>
<td><u>Démontrons que l'équation : $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0[$ et que $-0,3 < \alpha < -0,2$.</u>
La fonction u est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $u(]-\infty; 0[) =]-\infty; +\infty[$. Or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]-\infty; 0[$ notée α
$u(-0,3) = \ln 0,3 + 0,3 + 1 = 0,09$
$u(-0,2) = \ln 0,2 + 0,2 + 1 = -0,41$
$u(-0,3).u(-0,2) < 0$
Donc $-0,3 < \alpha < -0,2$</td>
<td>Identifie
Le sens de variation de u sur $]-\infty; 0[$

0,5pt</td>
<td>Utilise
Une propriété convenable

0,5pt</td>
<td>Trouve
$u(-0,3) = 0,09$
$u(-0,2) = -0,41$

Conclut
$u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0[$ et que $-0,3 < \alpha < -0,2$.

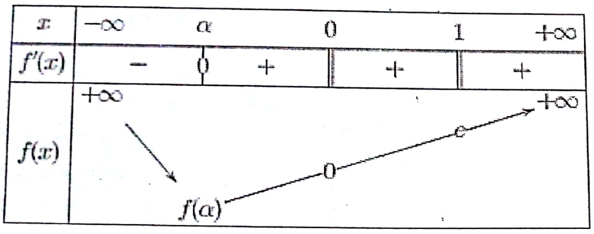
1pt</td>
<td>2pts</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td><u>Déduisons-en le signe de $u(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.</u>
$\forall x \in]-\infty; \alpha[$; $u(x) > 0$
$\forall x \in]\alpha; 0[$; $u(x) < 0$</td>
<td>Identifie
Le tableau de variation de u</td>
<td>Utilise
Une méthode appropriée pour déterminer le signe de u(x)</td>
<td>Trouve
Le signe de u(x)</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\,; u(x) < 0$ $u(1) = 0$ et $u(\propto) = 0$	I 0,5pt	0,5pt	0,5pt	1,5pt
7- a)	**<u>Déterminons le domaine de définition de f</u>** $D_f = \{x \in [1;+\infty[/ x^2 - x \geq 0\} \cup \{x \in]-\infty;1[/ x \neq 1\} \cup \{0\}$ $D_f = [1;+\infty[\cup]-\infty;1[\cup\{0\}$. Soit $D_f = \mathbb{R}$ Donc $D_f = \mathbb{R}$	**Identifie** f comme fonction définie par intervalles I 0,5pt	**Ecrit** $D_f = \left\{\begin{matrix} x \in [1;+\infty[\\ /x^2 - x \geq 0 \end{matrix}\right\} \cup$ $\{x \in]-\infty;1[/ x \neq 1\} \cup \{0\}$ II 1pt	**Trouve** $D_f = [1;+\infty[\cup]-\infty;1[\cup\{0\}$ $D_f = \mathbb{R}$ II 1pt	2,5pts
b-	**<u>Étudions la continuité de f en 0 et en 1.</u>** - **Continuité de f en 0** $0 \in D_f$; $f(0) = 0$. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\ln\|x\|}{x-1}$ Or $\lim\limits_{x \to 0} x\ln\|x\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (On peut le faire à gauche et à droite) . $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0. - **Continuité de f en 1** $1 \in D_f$; $f(1) = e$. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left(\frac{x\ln\|x\|}{x-1}\right) e = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) e = e$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{\ln x}{x-1} = 1$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = e$. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(e^x + \sqrt{x^2 - x}\right) = e$	**Identifie** La fonction f sur chacun des intervalles les nombres 0 et 1 II	**Utilise** La propriété de la continuité d'une fonction en un point II	**Trouve** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ I $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = e$ I $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = e$ I **Conclut** f est continue en 0 I f est continue en 1 I	4,5pts

	On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = e$ Donc f est continue en 1.	1pt	1pt	2,5pts	
c-	**<u>Étudions la dérivabilité de f en 0 et en 1. Interprétons les résultats obtenus.</u>** **Dérivabilité de f en 0** $0 \in D_f$; $f(0) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{ln(-x)}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{ln(x)}{x-1} = +\infty$ Donc f n'est pas dérivable en 0. **Dérivabilité de f en 1** $1 \in D_f$; $f(1) = e$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} \left(\frac{(t+1)\ln(t+1)-t}{t^2}\right) e$ $v(t) = \ln(1+t)$ $v(t) = v(0) + tv'(0) + \frac{t^2}{2}v^2(0) + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ $v'(t) = \frac{1}{1+t}$; $v^2(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$ $v(t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(t+1)\left(t-\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t)-t\right)}{t^2} e$ $= \lim\limits_{t \to 0} \frac{\left(t^2 - \frac{t^3}{2} + t^3\varepsilon(t) + t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) - t\right)}{t^2} e$ $= \lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}t + (1+t)\varepsilon(t)\right) e$	**Identifie** La fonction f Les nombres 0 et 1	**Utilise** La propriété de la dérivabilité d'une fonction en un point **Détermine** Le développement limité de v au voisinage de 0	**Trouve** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ **Conclut** f n'est pas dérivable en 0 **Trouve** $v(t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{e}{2}$ puis conclut	**7pts**

$= \frac{e}{2}$ $\frac{e}{2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 1. . $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\frac{e^x-e}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}\right)$ $= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\frac{e^x-e}{x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-x}}\right) = +\infty$ Car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\frac{e^x-e}{x-1}\right) = e$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}\right) = +\infty$ D'où f n'est dérivable à droite en 1. Par conséquent f n'est pas dérivable en 1. **Interprétation géométrique** - La courbe (C) admet au point d'abscisse 1 deux demi tangentes, l'une définie par $\begin{cases} x \leq 1 \\ y = \frac{e}{2}(x+1) \end{cases}$ et l'autre définie par $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq e \end{cases}$ - La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 deux demi tangentes, l'une définie par $\begin{cases} x = 0 \\ y = \leq 0 \end{cases}$ et l'autre définie par $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$	1pt	**Utilise** Une méthode pour l'interprétation des nombres dérivés. | 1,5pt	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ puis conclut | **Conclut** f n'est pas dérivable en 1 | **Trouve** Les systèmes définissant les demi-tangentes à la courbe (C). || 4,5pts	
<u>Étudions la continuité et la dérivabilité de f sur ensemble de dérivabilité.</u> *Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2 - x$ sont continues et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ en particulier en tout point de $]1;\ +\infty[$ et $\forall\ x \in\ ]1;\ +\infty[\ ;\ x^2 - x > 0$ Donc $x \mapsto \sqrt{x^2-x}$ est continue en tout point de $[1;\ +\infty[$ et dérivable en tout point de $]1;\ +\infty[$. Par conséquent f est continue en tout point de $[1;\ +\infty[$ et dérivable en tout point de $]1;\ +\infty[$.	**Identifie** La fonction f sur chaque intervalle | f est continue en 0 et en 1 et n'est pas	**Utilise** Des propriétés relatives à la continuité et la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	**Conclut** f est continue sur $\mathbb{R}$ | f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ |	3pts

	*Les fonctions $x \mapsto \ln\lvert x\rvert$ et $x \mapsto x-1$ sont continues et dérivables en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en particulier en tout point de $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$ et $\forall\, x \in\,]-\infty; 0[\cup]0\,; 1[\,; \lvert x\rvert > 0$ et $x-1 \neq 0$ Donc f est continue et dérivable en tout point de $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$. *De plus f est continue en 0 et en 1 et n'est pas dérivable en 0 et en 1. D'où f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$	dérivable en 0 et en 1. I **1pt**	II **1pt**	**1pt**	
b-	**Déterminons la fonction dérivée f'** $\forall\, x \in\,]-\infty; 0[\cup]0\,; 1[\,$; on a : $f'(x) = \left(\frac{\ln\lvert x\rvert + x - 1}{(x-1)^2}\right) e$ Soit $f'(x) = -e\left(\frac{u(x)}{(x-1)^2}\right)$ Et $\forall\, x \in\,]1; +\infty[\,; f'(x) = e^x + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$	**Identifie** f sur chaque intervalle I **0,5pt**	**Utilise** Des propriétés permettant de calculer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, et de lno|u| IIII **2pts**	**Trouve** $\forall\, x \in\,]-\infty; 0[\cup]0\,; 1[\,; f'(x) = \left(\frac{\ln\lvert x\rvert + x - 1}{(x-1)^2}\right) e$ II $\forall\, x \in\,]1; +\infty[\,;$ $f'(x) = e^x + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ I **1,5pt**	**4pts**
9-	**Achevons l'étude des variations de f.** $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x\ln\lvert x\rvert}{x+1}\right) e = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln\lvert x\rvert}{1+\frac{1}{x}}\right) e = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\lvert x\rvert = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x + \sqrt{x^2 - x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$ f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $\forall\, x \in\,]1; +\infty[\,; f'(x) = e^x + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$	Identifie Les éléments d'étude des variations d'une fonction à savoir *les bornes de D_f *l'expression de f sur chacun des intervalles	Utilise Une méthode appropriée pour étudier le sens de variation de f II Une méthode appropriée pour calculer les limites II	Trouve $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ II $\forall\, x \in\,]\infty; \alpha[\,;$ $f'(x) < 0$ $\forall\, x \in\,]\alpha\,; 0[\cup]0; 1[$ $; f'(x) > 0$. $f(\alpha) = 0$.	

<table>
<tr>
<td>Or $x \in]1;\ +\infty[\Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow 2x - 1 > 1$ et
$\forall x \in]1;\ +\infty[\ ;\ e^x > 0$ et $2\sqrt{x^2 - x} > 0$
D'où $\forall x \in]1;\ +\infty[\ ;\ f'(x) > 0$
Donc f est strictement croissante sur $]1;\ +\infty[$.
$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0\ ; 1[$; on a : $f'(x) = -e\left(\frac{u(x)}{(x-1)^2}\right)$
On a: $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0\ ; 1[\ -\frac{e}{(x-1)^2} < 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$ sur $]-\infty; 0[\cup]0\ ; 1[$.
Or $\forall x \in]-\infty; \propto[\ ;\ u(x) > 0; \forall x \in]\propto; 0[\ ;\ u(x) < 0\ ; \forall x \in]0; 1[\ ;\ u(x) < 0; u(1) = 0$ et $u(\propto) = 0$.
On déduit donc que : $\forall x \in]\infty;\ \propto[\ ;\ f'(x) < 0$
$\forall x \in]\propto\ ; 0[\cup]0; 1[\ ;\ f'(x) > 0$.
Alors f est strictement décroissante sur $]\infty;\ \propto]$ et strictement $[\propto; 0]$.
On obtient ainsi le tableau de variation suivante :
</td>
<td>*le sens de variation et le tableau des variations

1,5pt</td>
<td>La forme d'un tableau de variation

2,5pts</td>
<td>Le sens de variation de f

Le tableau des variations de f

3pts</td>
<td>7pts</td>
</tr>
<tr>
<td>Déterminons $f(K)$
f est continue et strictement croissante sur $K = [1;\ +\infty[$ alors
$f(K) = f([1;\ +\infty[) = [\,f(1);\ \lim_{x \to +\infty} f(x)\,[$
Donc $f(K) = [e\ ; +\infty[$</td>
<td>Identifie
K

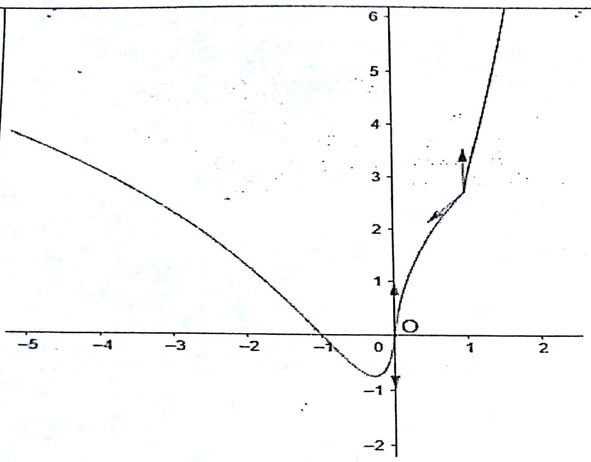
0,5pt</td>
<td>Utilise
Une propriété convenable

0,5pt</td>
<td>Trouve
$f(K) = [e\ ; +\infty[$

0,5pt</td>
<td>1,5pt</td>
</tr>
</table>

b-	**Justifions que g admet une bijection réciproque g^{-1}.** g est continue et strictement croissante sur $K = [1;\ +\infty[$ car g restriction de f sur $[1;\ +\infty[$. Donc g est bijective. D'où elle admet une bijection réciproque g^{-1} définie de $[e\ ;+\infty[$dans $[1;\ +\infty[$	Identifie La fonction g 0,5pt	Utilise Une propriété convenable 0,5pt	Conclut g admet une bijection réciproque g^{-1} 0,5pt	1,5pt
c-	**Déterminons le domaine de dérivabilité de g^{-1}** $\forall\, x\ \in [1;\ +\infty[\ ; g'(x) \neq 0$ De plus f n'est pas dérivable en 1 mais $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} \frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(e)}{x-e} = \lim\limits_{\substack{y \to e \\ y>e}} \frac{y-1}{f(y)-f(e)} = \lim\limits_{\substack{y \to e \\ y>e}} \frac{1}{\frac{f(y)-f(e)}{y-1}} = 0$ Car $\lim\limits_{\substack{y \to 1 \\ y>1}} \frac{f(y)-f(1)}{y-1} = +\infty$ Donc g^{-1} est dérivable en e. Ainsi le domaine de dérivabilité de g^{-1} est : $[e;\ +\infty[$.	Identifie L'application g^{-1} 0,5pt	Utilise Une méthode appropriée 0,5pt	Trouve le domaine de dérivabilité de g^{-1} est : $[e;\ +\infty[$ 0,5pt	1,5pt
d-	**Justifions le point $N(e; 1) \in (C')$** $g(1) = f(1) = e \Leftrightarrow N(1; e) \in (C')$ $\Leftrightarrow N(e; 1) \in (C')$ Donc le point $N(e; 1) \in (C')$	Identifie les coordonnées de N 0,5pt	Calcule $g(1)$ 0,5pt	Trouve $T(1; e) \in (C')$ puis conclut que $N(e; 1) \in (C')$ 0,5pt	1,5pt
e-	**Déterminons le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C') en N.** La fonction g^{-1} est dérivable sur $[e;\ +\infty[$. De plus	Identifie L'abscisse du point N	Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} \frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(e)}{x-e}$	Trouve $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} \frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(e)}{x-e} = 0$	

	$\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} \frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(e)}{x-e} = \lim\limits_{\substack{y \to e \\ y>e}} \frac{y-1}{f(y)-f(e)} = \lim\limits_{\substack{y \to e \\ y>e}} \frac{1}{\frac{f(y)-f(e)}{y-1}} = 0$ Car $\lim\limits_{\substack{y \to 1 \\ y>1}} \frac{f(y)-f(1)}{y-1} = +\infty.$ Donc le coefficient directeur de la courbe (C') en N est :0	0,5pt	0,5pt	Conclut Le coefficient directeur est 0 **1pt**	**2pts**
11-a)	**<u>Déterminons les branches infinies de la courbe (C).</u>** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln\lvert x\rvert}{x-1}\right) e = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{(-x)}\right)\left(\frac{-x}{x-1}\right) e = 0$ Car $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{(-x)}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{-x}{x-1}\right) = -1$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} = +\infty$ Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.	**Identifie** Les limites de f aux bornes de Df **1pt**	**Utilise** Des propriétés relatives à l'étude des branches infinies de la courbe d'une fonction **1pt**	**Trouve** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ **Conclut** la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées **2pts**	**4pts**
b-	**<u>Construisons (C)</u>**	Identifie Le repère (O,I,J). Les branches infinies de (C).	Utilise Le tableau des variations de f Les branches infinies et les demi-tangentes	Construit Les demi-tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 1	

	II 1pt	II 1pt	La courbe (C). I 1pt	3pts
Récapitulatif(Problème 3)	12pts	17pts	23pts	52 points
Récapitulatif des trois problèmes	20,5pts	30pts	39,5pts	90 points
Note relative au critère de perfectionnement **Soit P la note du critère de perfectionnement**	-Si $N < 40$, alors $P = 0$ -Si $40 \leq N < 60$, alors $0 \leq P \leq 5$ -Si $N \geq 60$, alors $0 \leq P \leq 10$			10 points

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL DU BORGOU

Année scolaire : 2023 - 2024

Matière : MATHEMATIQUES *Niveau : BAC*

Série : C *Durée : 04 HEURES*

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Les mathématiques au service de l'architecture

Luciano est un grand architecte de son pays. Il est désigné pour concevoir et réaliser un grand bâtiment administratif, qui regroupera plusieurs ministères de son pays. Le domaine sur lequel sera érigé le bâtiment a une forme triangulaire dont deux des sommets sont P(16,-13) et Q(-1,-2) dans le plan du sol muni du repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). L'architecte dans sa conception a retenu réaliser des arcs de béton sur lesquels reposera le bâtiment. Ces arcs seront disposés en des points M de coordonnées entières (x, y) du plan tels que le triangle PQM soit rectangle en Q et que $PGCD\ (x; y) = 5$ avec $0 \leq x \leq 200$; $0 \leq y \leq 200$.

Pour rendre solide la structure et y apporter du beau, il a utilisé certaines applications de l'espace. Mékiol, fils de l'architecte et élève en terminale C ayant vu le plan, voudrait identifier la position des arcs, déterminer les applications à utiliser et représenter les voies qui traverseront le domaine.

Tâche : Tu es appelé(e) à aider Mékiol à participer aux divers travaux de l'architecte en résolvant chacun des trois problèmes suivants.

Problème 1

1) a- Démontre que (x, y) vérifie l'équation : $17x - 11y = 5$.

   b- Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $17x - 11y = 5$.

2) Soit $(x\ , y)$ un couple solution de (E). On note δ=PGCD (x, y).

   a- Détermine les valeurs possibles de δ.

   b - Montre que δ=5 ⇔ 5 divise x.

   c - Déduis-en les entiers x et y solutions du système : $\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD\ (x; y) = 5 \end{cases}$

3) Donne les coordonnées des emplacements des arcs en béton.

Problème 2

Selon le plan proposé par Luciano, le toit du bâtiment a la forme d'un tétraèdre $ABCE$ tel que dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on a: $A(1\,;1\,;1)$; $B(-1\,;3\,;1)$; $C(1\,;3\,;0)$; $E(1\,;0\,;0)$. Une caméra de surveillance sera placée en un point $D(0\,;1\,;\ 0)$. L'application g de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \\ z' = -z + 2 \end{cases}$ servira à contrôler la solidité du bâtiment.

4) **a.** Détermine l'ensemble (Δ_1) des points invariants par g.

b. Démontre que g est un demi-tour.

5) Démontre qu'il existe un et un seul demi-tour f tel que $f(\Omega) = \Omega$ et $f(E) = D$.

Précise l'axe (Δ_2) de f.

6) On pose $t = g \circ f$ et $h = s \circ g$, où s est la réflexion de plan (π) d'équation cartésienne $2x+2y-1=0$

Détermine la nature et l'élément caractéristique de t et de h.

Problème 3

Luciano décide de faire passer dans le domaine des clothoïdes qui sont des courbes obtenues à partir des intégrales. Celle retenue est une portion de la courbe de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = [ln(1-x) - x]^{0,2} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \int_x^{2x} v(t)dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

où v est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$

7) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

8) a) Etudie le sens de variation de la fonction v.

b) Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[, xv(2x) \leq f(x) \leq xv(x)$.

c) Déduis-en les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.

d) Etudie la continuité de f en 0.

9) Soit V une primitive de v sur $]0; +\infty[$.

a-Exprime $f(x)$ à l'aide de V pour $x \in]0; +\infty[$.

b-Déduis-en que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^{-x}[(2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1]}{(4x^2+1)(x^2+1)}$

10)a- Justifie que $\forall x \in]0; +\infty[, -2e^{-x}(x^2 - 2x + 1) - 8x < 0$.

b- Démontre que l'équation $2e^{-x}(x^2 + 1) - 4x^2 - 1 = 0$, admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique α avec $0,36 < \alpha < 0,38$.

c-Déduis-en le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

11)Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$

12)a- Ecris le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.

b- Déduis-en que f n'est pas dérivable à gauche en 0.

c- En utilisant les inégalités obtenues en 9-b), justifie que f est dérivable à droite en 0.

13)Dresse le tableau des variations de f.

14) En prenant $\alpha = 0,37$ et en utilisant la méthode des rectangles, calcule une valeur approchée de $f(\alpha)$. (Tu subdiviseras l'intervalle $[0,37; 0,74]$ en deux intervalles de même amplitude).

15)Donne une allure de la courbe représentant f dans un repère orthogonal. (Unité graphique : $6cm$ sur l'axe des abscisses et $10cm$ sur l'axe des ordonnées.)

EXAMEN BLANC MARS 2024 DU BORGOU
CLE ET GRILLE DE CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES SERIE C

	Eléments de réponses	Capacité « Analyser » $1CA = 0{,}5pt$ Le candidat ….	Capacité « Mathématiser » $1CM = 1pt$ Le candidat….	Capacité « Opérer » $1CO = 1pt$ Le candidat…..	
	<u>**Problème 1**</u>	07 CA	06 CM	8 CO	**17,5 pts**
1)	a- <u>Démontre que (x, y) vérifie l'équation : $17x - 11y = 5$</u> Le triangle PQM est rectangle en Q si et seulement si $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QM} = 0$ $\overrightarrow{PQ}(-17; 11)$, $\overrightarrow{QM}(x+1; y+2)$ $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QM} = -17(x+1) + 11(y+2) = -17x + 11y + 5$ $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{QM} = 0 \Leftrightarrow -17x + 11y + 5 = 0$ $\Leftrightarrow 17x - 11y = 5$ D'où (x, y) vérifie l'équation : $17x - 11y = 5$	-Identifie le triangle PQM I	**-**Traduis que le triangle PQM est rectangle en Q I	**-**Trouve que (x, y) vérifie l'équation : $17x - 11y = 5$ I	**2,5pts**
	b- Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $17x - 11y = 5$. On a 17=11+6 11=6+5 6=5+1 donc 1= 6-5 =6-(11-6) =6(2)-11(1) =(17-11)(2)-11(1) =17(2)-11(2)-11(1) =17(2)-11(3) alors 5=17(10)-11(15) ainsi une solution particulière de (E) est (10;15). pgcd(17;11)=1 et 1 divise 5 alors (E) admet de solution. Une solution particulière de (E) est : (10,15). Soit (x, y)	-identifie l'équation (E). I	**-**utilise une méthode de résolution I	**-**Trouve une solution particulière. -Trouve $S = \{(11k + 10; 17k + 15); k \in \mathbb{Z}\}$ II	**3,5pts**

	solution de (E). 17x-11y=17(10)-11(15) 17x-17(10)=11y-11(15) 17(x-10)=11(y-15) alors 11 divise 17 (x-10) or 11 et 17 sont premiers entre eux, D'après le théorème de Gauss ;11 divise $x-10$ $11\ divise\ x-10 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x-10=11k$ alors $x=11k+10\ (k \in \mathbb{Z})$ $x=11k+10$ dans (E) donne : 17k=y-15 alors y=17k+15 soit S l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$. $S=\{(11k+10;17k+15);k\in\mathbb{Z}\}$				
2	a- <u>Déterminons les valeurs possibles de δ</u> (x,y) est solution de (E) alors $x=11k+10$; y=17k+15 $\delta=pgcd(11k+10,17k+15)$ =pgcd(11k+10,6k+5) =pgcd(6k+5,5k+5) =pgcd(5k+5,k) =pgcd(k, 4k+5)) =pgcd(k,3k+5) =pgcd(k,2k+5) =pgcd(k,k+5) =pgcd(k,5) $\delta=pgcd(k,5)$alors δ divise 5 donc $\delta\in\{1,5\}$	-identifie les solutions de (E). **I**	-utilise une méthode pour simplifier $pgcd(11k+10,17k+15)$ **I**	-trouve $\boldsymbol{\delta}$ =pgcd(k,5) -trouve $\delta\in\{1,5\}$ **II**	**3,5pts**
	b) **<u>Montrons $\boldsymbol{\delta=5\Leftrightarrow 5 divise x}$</u>** Supposons que $\delta=5$ $\delta=5\Leftrightarrow pgcd(k,5)=5$ $\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/k=5k'$ $x=11k+10$ $x=11(5k')+10$ $x=5(11k'+2)\ donc\ 5\ divise\ x$	-identifie **<u>$\boldsymbol{\delta=5}$</u>** **I**	-écrit $\delta=5\Leftrightarrow pgcd(k,5)=5$ **I**	-trouve le résultat **I**	**2,5pts**

	réciproquement, supposons que 5 divise x on a :$x \equiv 0[5] \Leftrightarrow 11k + 10 \equiv 0[5]$ $x \equiv 0[5] \Leftrightarrow 11k \equiv 0[5]$ car $10 \equiv 0[5]$comme 5 et 11 sont premiers entre eux alors $k \equiv 0[5]$donc k=5p ($p \in \mathbb{Z}$) vu que $\delta = pgcd(k, 5)$ alors $\delta = pgcd(5p, 5) = 5pgcd(p, 1) = 5$ d'où $\delta = 5 \Leftrightarrow 5 divise\ x$				
	c- **Déduisons les entiers x et y solutions du système** :$\begin{cases} 17x - 11y = 5 \\ PGCD\ (x; y) = 5 \end{cases}$ 17x-11y = 5 $\Leftrightarrow x = 11k + 10\ ; y = 17k + 15, k \in \mathbb{Z}$ $pgcd(x, y) = 5 \Leftrightarrow 5\ \ divise\ \ \ x$ $\Leftrightarrow 5\ \ divise\ k$ Donc il existe alors $u \in \mathbb{Z}$ tel que k= 5u donc x=55u+10 et y=85u+15 Soit S' l'ensemble des solution du système dans $\mathbb{N}^2$ $S' = \{(55u + 10; 85u + 15); u \in \mathbb{N}\}$	**-**identifie les solutions de 17x-11y = 5 -identifie l'équivalence $pgcd(x, y) = 5 \Leftrightarrow 5\ \ divise\ \ \ x$ II	**-**traduit 5 divise x I	**-**trouve le résultat I	**3pts**

3	**<u>Donnons les coordonnées des emplacements des arcs en béton</u>**. Le triangle PQM est rectangle en Q si et seulement si $x = 11k + 10 \; et \; y = 17k + 15$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus $PGCD(x; y) = 5$ alors $x = 55u + 10$ et $y = 85u + 15$ avec u un entier On a : $0 \leq x \leq 200 \; et \; 0 \leq y \leq 200$ $0 \leq x \leq 200 \Leftrightarrow -10 \leq 55u \leq 190$ $\Leftrightarrow \frac{-10}{55} \leq u \leq \frac{190}{55}$ $\Leftrightarrow u \in \{0; 1; 2; 3\}$car $u \in \mathbb{Z}$ $0 \leq y \leq 200 \Leftrightarrow 0 \leq 85u + 15 \leq 200$ $\Leftrightarrow -15 \leq 85u \leq 185$ $\Leftrightarrow \frac{-15}{85} \leq u \leq \frac{185}{85}$ $\Leftrightarrow u \in \{0; 1; 2\}$car $u \in \mathbb{Z}$ En conclusion $u \in \{0; 1; 2\}$ pour $u = 0$ on a $x = 10$ et $y = 15$ pour $u = 1$ on a $x = 65$ et y = 100 pour $u = 2$ on a $x = 120 \; et \; y = 185$ Donc les arcs en béton seront placés aux points $M_1(10; 15)$,$M_2(65; 100)$ et $M_3(120; 185)$	**-**identifie $x = 55u + 10$ et $y = 85u + 15$ avec u un entier **|**	**-** Cherche l'encadrement de u **|**	-trouve $M_1(10; 15)$, $M_2(65; 100)$ et $M_3(120; 185)$ **|**	**2,5pts**
	<u>Problème 2</u>	6 CA	6 CM	6CO	**15pts**
4	**a- <u>Déterminons l'ensemble des points par g</u>** Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace $M \in (\Delta_1) \Leftrightarrow g(M) = M$	-Identifie l'expression analytique de g **|**	-pose $M \in (\Delta_1) \Leftrightarrow g(M) = M$ **|**	-Trouve le résultat **|**	**2,5 pts**

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y = x + 1 \\ z = -z + 2 \end{cases}$ $(\Delta_1) \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = \alpha \quad (\alpha \in R) \\ z = 1 \end{cases}$ d'où l'ensemble des points invariants par g est la droite (Δ_1)				
	b- <u>Démontrons que g est est un demi-tour</u> **L**'ensemble des points invariants par g est la droite (Δ_1) **:** $\begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = \alpha \quad (\alpha \in R) \\ z = 1 \end{cases}$ **Soit** $M(x;y;z)$ **un point et** $M'(x';y';z')$ **son image par g** $\overrightarrow{MM'}(y - x - 1; x - y + 1; -2z + 2)$ et $\vec{u}(1;1;0)$ un vecteur directeur de (Δ_1) $\overrightarrow{MM'} \bullet \vec{u} = 0$ d'où $(\Delta_1) \perp (MM')$ **Soit le milieu de** $[MM']$ **avec** $I(\frac{x+y-1}{2}; \frac{x+y+1}{2}; 1)$ $\begin{cases} x_I = \alpha - 1 \\ y_I = \alpha \\ z_I = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{x+y+1}{2}$ d'où $I \in (\Delta_1)$ **De tout ce qui précède on conclut que g est le demi-tour d'axe** (Δ_1)	-Identifie g et (Δ_1) II	-utilise $\overrightarrow{MM'} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow$ $(\Delta_1) \perp (MM')$ **-**Traduis l'appartenance de I à (Δ_1)**.** II	Conclut **-**$(\Delta_1) \perp (MM')$ Et $I \in (\Delta_1)$ **-**conclut que g est le demi-tour d'axe (Δ_1) II	**5 pts**

5)	**Démontrons qu'il existe un et un seul demi-tour f tel que $f(\Omega)=\Omega$ et $f(E)=D$ Précisons l'axe (Δ_2) de f.** $\Omega(0\,;0\,;0)\,;\ D(0\,;1\,;0)$ et $E(1\,;0\,;0)$ $\Omega E=\Omega D=1$ alors le point Ω appartient à la médiatrice du segment [DE] d'où il existe un unique demi-tour f qui laisse invariant Ω et transformant E en D	-Identifie f(Ω)=Ω et f(E) =D I	-Ecrit $\Omega E=\Omega D=1$ I	-Il conclut alors que le point Ω appartient à la médiatrice du segment [DE] d'où il existe un unique demi-tour f qui laisse invariant Ω et transformant E en D I	**2,5pts**
6	**On pose t $=g\circ f$ et $h=s\circ g$, où s est la réflexion de plan (π) d'équation cartésienne $2x+2y-1=0$ Détermine la nature et l'élément caractéristique de t et de h** $(\Delta_1)\perp(\pi)$ **et** $(\Delta_2)\perp(\pi)$ **les droites** (Δ_1) **et** (Δ_2) **sont parallèles par suite t est une translation .** $t=t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$ **où** Ω(0 ;0 :0) est un point (Δ_1) **et** Ω' son projeté orthogonal sur (Δ_2) **. Posons** $\Omega'(a\,;b\,;c)$ $\{\Omega'\in(\Delta_2)$ **et** $\overrightarrow{\Omega\Omega'}\bullet\vec{v}=0$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a=\alpha-1\\b=\alpha\\c=1\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{2}\\c=1\end{cases}$	**-**identifie (Δ_1)**,** (π) **et** (Δ_2)**.** II	**-**utilise une méthode pour trouver le vecteur de t -utilise une méthode pour trouver l'élément caractéristique de h II	Trouve: - la nature de t et son l'élément caractéristique. -la nature de h et l'élément caractéristique de h. II	**5pts**

	Le vecteur de translation est $\vec{w}$ =2$\overrightarrow{\Omega\Omega'}(-1\ ;1\ :2)$ est le vecteur de la translation t **Nature et élément caractéristique de h** $(\Delta_1)\perp(\pi)$ alors h = s$\circ$g est une symétrie centre de centre $\{$H$\}$ = $(\pi)\cap(\Delta_1)$ $\begin{cases} x_H=\alpha-1 \\ y_H=\alpha \\ z_H=1 \\ 2x_H+2y_H-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=\frac{3}{4} \\ c=1 \end{cases}$				
	<u>**Problème 3**</u>	**27 CA**	**18 CM**	**26 CO**	**57,5pts**
7)	<u>**Justifions que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$**</u> **D=**$D_1\cup D_2\cup\{0\}$ D_1**={ x $\in$]-∞, 0[; 1-x>0 et ln(1-x)-x>0 }** $\forall$**x $\in$]-∞, 0[, on a 1-x >0** $\forall$**x $\in$]-∞, 0[-x >0** $-x>0\Leftrightarrow 1-x>1$ $-x>0\Leftrightarrow ln(1-x)>0$ **donc**$\boldsymbol{ln(1-x)-x>0}$ $\forall\boldsymbol{x}\in\ ]-\infty,\mathbf{0}[$ D_1**=]-∞, 0[**	**-Identifie f** **I**	**Ecrit en extension** -D_1 -D_2 **II**	**Trouve** **-D_1=]-∞, 0[** -D_2**=]0 ,+∞[** **- D=$\mathbb{R}$** **III**	**5,5pts**

<table>
<tr><td></td><td>D_2={$x \in$]0 ,+∞[; t→ $v(t)$ est continue sur [x; $2x$]}

D_v={ $x \in$]0 ,+∞[; $x^2+1 \neq 0$}

∀x €]0 ,+∞[; $x^2+1 \neq 0$donc D_v=]0 ,+∞[

v est continue sur]0 ,+∞[or ∀ x ∈]0 ,+∞[; $[x , 2x]$ est contenue dans]0 ,+∞[alors v est continue sur $[x , 2x]$

D_2=]0 ,+∞[

d'où D=$\mathbb{R}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8)</td><td><u>a- Etudie le sens de variation de la fonction v</u>
D_v=]0 ,+∞[

v est continue et dérivable sur]0 ,+∞[

∀x ∈]0 ,+∞[; $v'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1)+2xe^{-x}}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-(x^2+1-2x)e^{-x}}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-(x-1)^2e^{-x}}{(x^2+1)^2}$

∀x ∈]0 ,+∞[$v'(x) \leq 0$ alors v est décroissante sur

]0 ,+∞[</td><td>-Identifie v

I</td><td>- utilise la formule de dérivation du quotient de deux fonctions

I</td><td>Trouve
- $v'(x)$
-le sens de variation de v

II</td><td>3,5 pts</td></tr>
<tr><td></td><td>b- <u>Démontrons que ∀x ∈]0 ,+∞[; $xv(2x) \leq f(x) \leq xv(x)$</u>

soit x ∈]0 ,+∞[

on a : $f(x) = \int_x^{2x} v(t)dt$

t ∈ $[x; 2x] \Leftrightarrow x \leq t \leq 2x$</td><td>-Identifie f sur

]0 ,+∞[

-identifie le sens de variation de v</td><td>-écrit t ∈ $[x; 2x]$

I</td><td>Trouve le résultat
I</td><td>3 pts</td></tr>
</table>

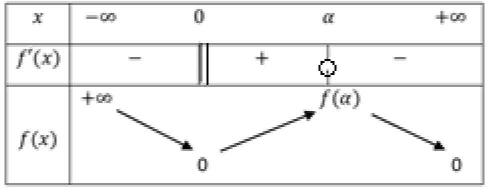
	$\Leftrightarrow v(2x) \leq v(t) \leq v(x)$ **car** v **est décroissante sur]0;+∞[** $\Leftrightarrow \int_x^{2x} v(2x)dt \leq \int_x^{2x} v(t)dt \leq \int_x^{2x} v(x)dt$ $\Leftrightarrow xv(2x) \leq f(x) \leq xv(x)$ **d'où** **∀x ∈]0 ,+∞[;** $xv(2x) \leq f(x) \leq xv(x)$	**II**			
	c- <u>Déduisons les limites de f à droite en 0 et en +∞</u> **∀x ∈]0 ,+∞[;** $xv(2x) \leq f(x) \leq xv(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} x\, v(2x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{-2x}}{4x^2+1}$ **et** $\lim\limits_{x\to 0} x\, v(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$ $\lim\limits_{x\to 0} x\, v(2x) = 0$ **car** $\lim\limits_{x\to 0} x\, e^{-2x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x\, v(x) = 0$ **car** $\lim\limits_{x\to 0} x\, e^{-x} = 0$ **donc d'après le théorème des gendarmes** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ***x*>0** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\, v(2x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{xe^{-2x}}{4x^2+1}$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\, v(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{xe^{-x}}{x^2+1}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x\, v(2x) = 0$ **car** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\, e^{-2x} = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x\, v(x) = 0$ **car** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\, e^{-x} = 0$ **d'où** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$	-identifie l'encadrement $xv(2x) \leq f(x) \leq xv(x)$ **I**	-utilise une méthode pour calculer les limites de $xv(2x)\ et\ de\ \ xv(x)$ en 0 et en +∞. **I**	Trouve $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ **II**	**3,5pts**
	d**<u>- Etudions la continuité de f en 0.</u>** $0 \in \mathbb{R}$, $f(0)$=0. (1) D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$**($x > 0$)** **(2)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[ln(1-x) - x]^{0.2}$ **($x < 0$)** **=** $\lim\limits_{x\to 0} 0.2\, exp[ln(ln(1-x) - x)]$	**-**identifie f -identifie $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ **($x > 0$)** **II**	-utilise la propriété sur la continuité en un point. **I**	**-**Trouve $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[ln(1-x) - x]^{0.2} = 0$ **($x < 0$)** **-**Trouve que f est continue en	**4pts**

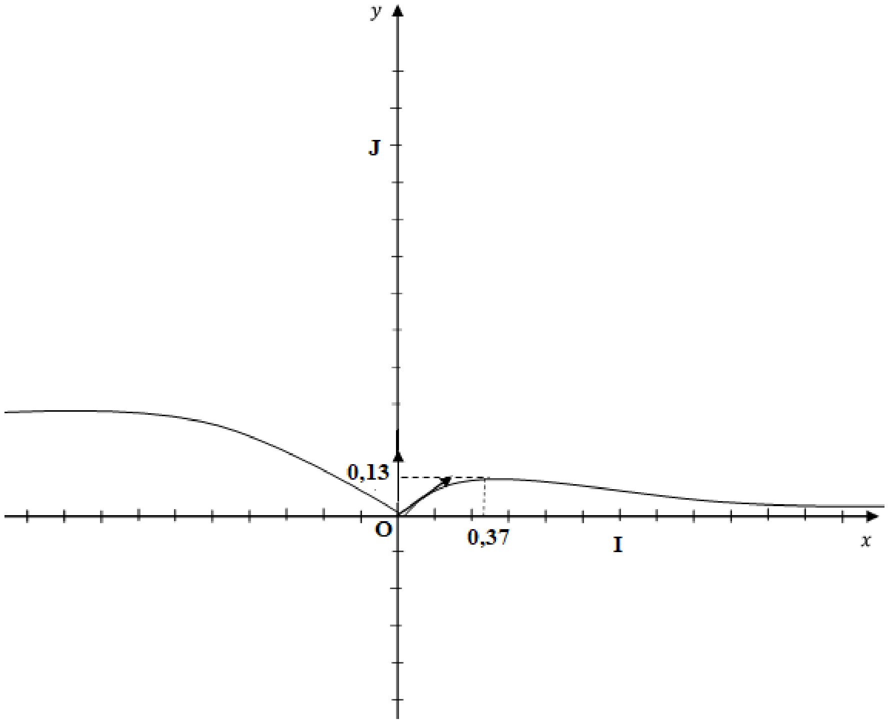
	= 0 **(3) car** $\lim\limits_{x\to 0} ln\,(ln(1-x)-x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ **De (1) , (2) , et (3)** f **est continue en 0.**			0. II	
9	a- **Exprimons f(x) à l'aide de V pour x ∈]0 ,+∞[** **soit x ∈]0 ,+∞[** $f(x) = \int_x^{2x} v\,(t)dt$ **=** $V(t)\|_x^{2x}$ **=** $V(2x) - V(x)$	-Identifie f et V II	Utilise la définition de l'intégrale I	-Trouve le résultat I	**3 pts**
	b- <u>Déduisons que f est dérivable sur]0 ,+∞[et que</u> $\forall\, x \in$ **<u>]0 ,+∞[</u>** $f'(x) = \frac{e^{-x}[2e^{-x}(x^2+1) - 4x^2 - 1]}{(4x^2+1)(x^2+1)}$ **Soit** $x \in$ **]0 ,+∞[** $\boldsymbol{f(x)}$ **=** $V(2x) - V(x)$ $\boldsymbol{V}$ **est une primitive de** $\boldsymbol{v}$ **sur]0 ,+∞[alors** $\boldsymbol{V}$ **est dérivable sur]0 ;+∞[par conséquent** $\boldsymbol{f}$ **est dérivable sur]0;+∞[** $\forall \boldsymbol{x} \in$ **]0 ,+∞[,** $f'(x) = 2V'(2x) - V'(x)$ **=** $2v(2x) - v(x)$ **=** $2\left(\frac{e^{-2x}}{4x^2+1}\right) - \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ **=** $\left(\frac{2e^{--x}}{4x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)e^{-x}$ **=** $\frac{e^{-x}[2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1]}{(4x^2+1)(x^2+1)}$ **d'où** $\forall \boldsymbol{x} \in$ **]0 ;+∞[;** $f'(x) = \frac{e^{-x}[2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1]}{(4x^2+1)(x^2+1)}$	-Identifie f et l'expression de v II	- Utilise la formule de dérivation de la composée de deux fonctions I	Trouve le résultat I	**3 pts**
10	**<u>a- Justifions que</u>** $\forall\, \boldsymbol{x} \in$ **<u>]0; +∞[,</u>** $\boldsymbol{-2e^{-x}(x^2-2x+1) - 8x <}$ **<u>0</u>** **Soit** $\boldsymbol{x} \in$ **]0 ;+∞[,** $-2e^{-x}(x^2-2x+1) = -2e^{-x}(x-1)^2 - 8x$	-Identifie l'expression	**-**Utilise une méthode I	Trouve le résultat I	**2,5**

	=$-[2e^{-x}(x-1)^2+8x]$ **or** $\forall$ $\boldsymbol{x} \in$ **] 0 ; + ∞[** $2e^{-x}(x-1)^2+8x>0$ **alors** $-[2e^{-x}(x-1)^2+8x]<0$ **d'où** $\forall \boldsymbol{x} \in$ **]0 ;+∞[** $-2e^{-x}(x^2-2x+1)-8x<0$**.**	**I**			**pts**
	b **- <u>Démontrons que l'équation</u>** $\underline{2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1=0}$ **<u>admet dans]0 ;+∞[une solution unique</u>** $\underline{\alpha}$ **<u>avec</u>** **<u>0.37<</u>**$\underline{\alpha}$**<u><0.38</u>** Posons H(x) = $2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1$ H est une fonction définie, continue et dérivable sur]0 ,+∞[$\forall$ $x \in$]0 ;+∞[, H'(x) =$-2e^{-x}(x^2+1)+4xe^{-x}-8x$ **=**$-2e^{-x}(x^2+1-2x)-8x$ **=**$-2e^{-x}(x^2-2x+1)-8x$ **or** $-2e^{-x}(x^2-2x+1)-8x<0$ **d'où H'(x) < 0** $\forall$ $\boldsymbol{x} \in$ **]0 ;+∞[** par conséquent H est strictement décroissante sur]0 ,+∞[H est continue et strictement décroissante sur]0 ,+∞[. De plus, **H(]0 ;+∞[)=]** $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$**,** $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$**[** $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\,e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = -\infty$ **car** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(x^2+1) = 0$**et** $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\,x^2+1 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\,e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1$ $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 1.$ H( ]0 ,+∞[)=]-∞, 1[; 0 ∈]-∞, 1[alors l'équation H(x)=0 admet une unique solution α dans]0 ,+∞[H(0.36)=0.0577 et H(0.38)= -0.01237 $H(0.36)\times H(0.38)<0$ alors $2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1=0$admet dans]0 ,+∞[une solution unique α avec 0.36< α<0.38	**Identifie -- l'expression** $2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1$ -identifie $-2e^{-x}(x^2-2x+1)-8x<0$ **II**	**Utilise une méthode** **I**	-le sens de variation de H - une solution unique α avec 0.36< α<0.38 **II**	**4 pts**

	C-<u>Déduisons le sens de variation de f sur]0 ,+∞[</u> $f'(x) = \frac{e^{-x}[2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1]}{(4x^2+1)(x^2+1)}$ **∀ x ∈]0 ,+∞[** **∀ x ∈]0 ,+∞[;**$\frac{e^{-x}}{(x^2+1)(4x^2+1)} > 0$ **alors le signe de $f'(x)$ est celui de** $H(x) = 2e^{-x}(x^2+1) - 4x^2 - 1$ H(]0,α[)=]H(α) ; 1[=]0;1[alors ∀ x ∈]0 ,α[, H(x) > 0 H(]α,+∞[)=]-∞;0[alors ∀ x ∈]α,+∞[, H(x) < 0 et H(α) = 0 ainsi f est strictement croissante sur]0 ,α[et strictement décroissante sur]α,+∞[.	**-**Identifie f' -identifie H -identifie α II	**-**utilise une méthode pour déterminer le sens de variation I	-trouve le sens de variation de f. I	**3pts**
11	**<u>Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty;0[$</u>** **f est continue et dérivable sur]-∞,0[; ∀ x ∈]-∞,0[;** $f'(x) = 0{,}2\left[\frac{\frac{-1}{1-x}-1}{ln(1-x)-x}\right][ln(1-x)-x]^{0.2}$ $f'(x) = 0{,}2\frac{(x-2)}{ln(1-x)-x}[ln(1-x)-x]^{0.2}$ **∀ x ∈]-∞,0[;** $\frac{[ln(1-x)-x]^{0.2}}{ln(1-x)-x} > 0$ **et x-2<0 alors** **∀ x ∈]-∞,0[;$f'(x)$<0 donc f est décroissante sur]-∞,0[.**	**-**identifie l'expression de f sur $]-\infty;0[$ I	**-**utilise la formule de dérivation de $exp\circ u$ et de $ln\circ u$ I	-le signe de $f'(x)$. -trouve le sens de variation de f. II	**3,5pts**
12	a- **<u>Ecris le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction x $\ln(1-x)$.</u>** Posons $g(x) = ln(1-x)$ g est deux fois↦ dérivable en 0 : $g(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + x^2\epsilon(x) avec \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$ $\boldsymbol{g(0) = 0;\ g'(0) = -1, g''(0) = -1}$ $g(x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ **d'où** $ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ **avec** $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$	-identifie $\ln(1-x)$ I	-Utilise la formule de développement limité I	-trouve le développement limité I	**2,5pts**

	b - Déduisons que f n'est pas dérivable à gauche en 0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[ln(1-x)-x]^{0.2}}{x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{exp(0.2ln(ln(1-x)-x))}{x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{exp\left[\frac{1}{5}ln\left(-2x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)\right)\right]}{-e^{ln(-x)}}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(-exp\left[\frac{1}{5}ln\left(-2x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)\right)-ln(-x)\right]\right)$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(-exp\frac{1}{5}ln\left(\frac{-2x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)}{-x^5}\right)\right)$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(-exp\frac{1}{5}ln\left(\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3}\epsilon(x)\right)\right)$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(-exp\frac{1}{5}ln\frac{1}{x^4}(2+x-x\epsilon(x))\right)$ **= -∞ car** $\lim\limits_{x\to 0}2+x-x\epsilon(x)=2$ **et** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty$ **alors f n'est pas dérivable à gauche en 0.**	**-**identifie f -identifie le développement limité de $\ln(1-x)$ II	- utilise une méthode pour calculer la limite I	-Trouve le résultat I	**3pts**
	c- **justifions que f est dérivable à droite en 0** $\forall$ $\boldsymbol{x}\in$ **]0 ,+∞[;** $xv(2x)\leq f(x)\leq xv(x)$ **donc** $v(2x)\leq\frac{f(x)}{x}\leq v(x)$ $\lim\limits_{x\to 0}v(2x)=\lim\limits_{x\to 0}v(x)=1$ **alors** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ **or** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ **d'où** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$ **et 1 est un réel alors f est dérivable à droite en 0**	-identifie la double inégalité $xv(2x)\leq f(x)\leq xv(x)$ I	**-**utilise une méthode pour calculer la limite I	-trouve le résultat I	**2,5pts**

13	**<u>Dressons le tableau des variations de f</u>** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{0,2ln[\ln(1-x)]-x}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ 	**-**identifie le sens de variation de f sur $]-\infty;0[$ - identifie le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$ **II**	**-**utilise la forme du tableau de variation **I**	-trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ -trouve le tableau de variation **II**	**4pts**
14	**<u>Calculons une valeur approchée de $f(\alpha)$.</u>** $f(\alpha) = \int_{0,37}^{0,64} v(t)\,, \qquad v(t) = \frac{e^{-t}}{t^2+1}$ $\frac{b-a}{2} = \frac{0,64-0,37}{2} = 0,135$ $x_0 = 0,37;\ \ x_1 = 0,505,\ \ x_2 = 0,64$ $A_1 = \frac{b-a}{2}[v(x_0)+v(x_1)]$ $A_2 = \frac{b-a}{2}[v(x_1)+v(x_2)]$ $A_1 < f(\alpha) < A_2$ $v(x_0) = 0,607\ ;\ \ v(x_1) = v(0,505) = 0,48$ $v(x_2) = 0,374$ $A_1 = 0,146$ et $A_2 = 0,115$ $0,115 < f(\alpha) < 0,146$ d'où $f(\alpha) \approx 0,13$	**-**identifie $f(\alpha)$. **I**	-pose la formule **I**	Trouve $f(\alpha)$=0,13. **I**	**2,5pts**
15	**<u>Donnons une allure de la courbe représentant f dans un repère orthogonal. (Unité graphique : $6cm$ sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.)</u>**	**-**identifie les variations de f. -identifie le repère -Identifie les limites aux bornes **III**	**-**utilise une démarche pour déterminer les branches infinies **I**	-Construis les demi-tangentes. -Construis la courbe. **II**	**4,5pts**

Recommandations générales

- **Lis attentivement la production de chaque candidat**
- **Pour chaque consigne, présente la note obtenue par le candidat dans la marge comme suit** $ca + cm + co = N$ $et\ T = N + CP$ **avec N la note sur 90 ; CP le critère de perfectionnement sur 10 et T la note sur 100**
- **Trois modalités à observer pour attribuer les points de CP : Lisibilité de la copie ; Propreté de la copie ; l'originalité de la copie**

« Si $N < 40$**, alors** $Cp = 0$ **»**

« Si $40 \leq N < 60$**, alors** $0 \leq Cp \leq 5$ **» : 2 points pour une modalité observée ; 4 points pour deux modalités observée ; 5 pour les trois observées**

« Si $N > 60$**, alors** $0 \leq Cp \leq 10$ **» : 4 point pour une modalité observée ; 7 points pour deux modalités observée ; 10 pour les trois observées**

EXAMEN-BLANC DEPARTEMENTAL DES COLLINES, SESSION D'AVRIL 2024

ANNEE SCOLAIRE : 2023-2024 — B523

NIVEAU: BAC — DUREE : 04Heures

Situation d'évaluation

Contexte : La fête identitaire.

La population du département de DOUNIAN organise chaque année, depuis 2010, la fête identitaire dénommée « **DOUNIANHOUE** ».Le nombre de participants de la première édition $c = 3^{12} - 1$. Le nombre de participants à cette fête l'année $(2010 + n)$ est U_n où

(U_n) est la suite définie par $\begin{cases} U_0 = PGCD(a\,;b) \\ U_{n+1} = \frac{5}{6}U_n + 1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $a = 3^{36} - 1$; $b = 3^{24} - 1$.

On pose $v_n = U_n - 6$.

Au cours de cette fête, plusieurs jeux sont envisagés dont le jeu de tire. Le tireur vise une cible sans quitter l'ère de ce jeu assimilable à un domaine (D) limité par l'axe des abscisses du repère orthonormé $(\Omega;\ \vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$, la courbe (C) d'une fonction f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = ln3$.

La délégation du gouverneur de DOUNIAN sera installée sous une bâche. La bâche est éclairée par deux ampoules placées en deux points A et B où A est l'image d'un point B par la transformation $S_{P_1}{\circ}S_{P_2}$ où S_{P_1} et S_{P_2} sont des réflexions des plans respectifs (P_1) et (P_2).

Anani un élève en classe de terminale C et fils du premier responsable adjoint à l'organisation pour la prochaine édition décide de :

- déterminer le nombre de participants à l'édition de l'année 2025 ;
- déterminer les coordonnées du point A ;
- la probabilité de remporter une partie du jeu
- l'aire du domaine (D).

Tâche : Tu vas agir comme Anani en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. Calcule $PGCD(24; 36)$.
2. a) Démontre que c est un diviseur de b.

   b) Démontre que c est un diviseur de a.
3. a) Démontre que si d est diviseur commun à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, alors d divise 3^{24}.

   b) Déduis-en que $PGCD\left(\frac{a}{c}\ ;\ \frac{b}{c}\right) = 1$ puis $U_0 = c$.
4. a) Démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique puis exprime U_n en fonction de n.

   b) Déduis-en le nombre de participants à l'édition de l'année 2025.

Problème 2

Le tireur doit lancer cinq fois de suite la fléchette et est déclaré vainqueur de cette partie du jeu lorsqu'il atteigne au moins trois fois la cible sur les cinq lancers.

La probabilité pour que le tireur touche la cible est $0{,}7$et on désigne par X le nombre de fois où il atteint la cible.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$, une équation cartésienne du plan (P_2) est : $x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0$ et le point B a pour coordonnées $B(1; 0; -1)$. L'expression analytique de la réflexion S_{P_1}du plan (P_1) est : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 3) \end{cases}$

5. a) Détermine la loi de probabilité de X.

   b) Détermine la probabilité qu'un joueur remporte une partie du jeu.
6. Détermine une équation cartésienne du plan (P_1).
7. a) Démontre que les plans (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles.

   b) Détermine l'expression analytique de S_{P_2}.

   c) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de $S_{P_1} \circ S_{P_2}$.
8. Détermine alors les coordonnées du point A.

Problème 3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \varphi(x)\ ; si\ x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{ln(1-x)}; si\ x < 0 \end{cases}$ avec φ la solution de l'équation différentielle $(E): y'' - y' - 2y = -20x - 4$ vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 4$.

9. a) Démontre que la fonction $u: x \mapsto 10x - 3$ est une solution de (E).

   b) k étant une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, démontre que k est solution de (E) si et seulement si $k - u$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'' - y' - 2y = 0$.

   c) Résous (E') puis déduis-en les solutions de (E).

   d) Justifie que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, on a : $\varphi(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3$.

10. a) Démontre que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

   b) Justifie que f est continue en 0.

   c) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète géométriquement les résultats.

11.a) Calcule pour tout x élément de $[0;\ +\infty[, f'(x)$ et $f''(x)$.

   b) Etudie le signe de $f''(x)$ sur $[0;\ +\infty[$ et déduis le sens de variation de f' sur $[0;\ +\infty[$.

   c) Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ et $f'(0)$.

   d) Déduis-en que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans $[0;\ +\infty[$ une solution unique α.

12) On pose $t = e^x$.

   a) Justifie que si $f'(x) = 0$ alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.

   b) Justifie que 2 est une solution de $t^3 - 5t + 2 = 0$ et détermine deux nombres réels a et b tels que $t^3 - 5t + 2 = (t - 2)(t^2 + at + b)$.

   c) Trouve les solutions $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déduis-en α.

13.a) Vérifie que : $\forall x \in]0; +\infty[\ f(x) = x\left(\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x}\right)$.

   b) Calcule ; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c) Etudie le signe de f' sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

14. a) Dresse le tableau de variation de f.

b) Construis la courbe (C).

15) Calcule l'aire du domaine (D).

Fin.

N°	Eléments de réponses	Capacités Analyser	Capacités Mathématiser	Capacités Opérer	Pondération
		1Ca=0,5pt	**1Cm=0,5pt**	**1Ca=0,5pt**	
		Le candidat	Le candidat	Le candidat	Total
	Problème 1 : 20,5pts				
1	Calculons $PGCD(24;36)$ On a : $24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$ alors $PGCD(24;36) = 2^2 \times 3 = 12$ $\boxed{PGCD(24;36) = 12}$	Identifie le couple d'entiers $(24;36)$ $\mid$ **0,5pt**	Utilise une technique de calcul du $PGCD$ de deux entiers naturels $\mid$ **0,5pt**	Trouve $PGCD(24;36) = 12$ $\mid\mid$ **1pt**	**2pts**
2 a)	Démontrons que c est un diviseur de b. On a : $c = 3^{12} - 1$ et $b = 3^{24} - 1$ $b = 3^{24} - 1 = (3^{12} - 1)(3^{12} + 1) = c(3^{12} + 1)$ avec $(3^{12} + 1) \in \mathbb{N}$ d'où c est un diviseur de b	Identifie les entiers b et c $\mid$ **0,5pt**	Etablit $b = c(3^{12} + 1)$ $\mid\mid$ **1pt**	Trouve c est un diviseur de b $\mid\mid$ **1pt**	**2,5pts**
b)	Démontrons que c est un diviseur de a. On a : $c = 3^{12} - 1$ et $a = 3^{36} - 1$ $a = 3^{36} - 1 = (3^{12})^3 - 1 = (3^{12} - 1)(3^{24} + 3^{12} + 1) = c(3^{24} + 3^{12} + 1)$ avec $(3^{24} + 3^{12} + 1) \in \mathbb{N}$ d'où c est un diviseur de a	Identifie les entiers a et c $\mid$ **0,5pt**	Etablit $a = c(3^{24} - 3^{12} + 1)$ $\mid\mid$ **1pt**	Trouve c est un diviseur de a $\mid\mid$ **1pt**	**2,5pts**
3-a)	**Démontrons que si d est diviseur commun à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, alors d divise 3^{24}.** Soit d est diviseur commun à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$	Identifie un diviseur commun d de $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ $\mid$	Utilise une technique pour montrer que d divise une combinaison de $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ $\mid$	Trouve que d divise 3^{24} $\mid\mid$ **1pt**	**2pst**

	d divise $\frac{a}{c}$ et d divise $\frac{b}{c}$ donc d divivise $\frac{a-b}{c} = 3^{24}$ car $\frac{a}{c} = 3^{24} + 3^{12} + 1$ et $\frac{b}{c} = 3^{12} + 1$. D'où si d est diviseur commun à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, alors d divise 3^{24}	**0,5pt**	**0,5pt**		
b)	**Déduisons que $PGCD\left(\frac{a}{c}\,;\,\frac{b}{c}\right) = 1$ puis $U_0 = c$.** On sait que : $\frac{a}{c} = 3^{24} + 3^{12} + 1$ et $\frac{b}{c} = 3^{12} + 1$. De plus tout diviseur commun à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, divise 3^{24} donc le plus grand commun diviseur de $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ est une puissance de 3. Or $\frac{a}{c} = 3^{24} + 3^{12} + 1$ et $\frac{b}{c} = 3^{12} + 1$ ne sont pas des puissances de 3. Donc la plus grande puissance de 3 qui divise à la fois $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ est $3^0 = 1$. D'où $PGCD\left(\frac{a}{c}\,;\,\frac{b}{c}\right) = 1$. On sait que $U_0 = PGCD(a\,;b)$. Or $PGCD(ka\,;kb) = kPGCD(a;b)$ avec k un entier naturel non nul. Ainsi $\frac{1}{c}PGCD(a;b) = 1 \Longrightarrow PGCD(a;b) = c$. D'où $U_0 = c$.	Identifie un diviseur commun de $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ I Identifie U_0 I **1pt**	Reconnait une propriété d'un diviseur de 3^{24} I Exploite $PGCD(ka\,;kb) = kPGCD(a;b)$ avec k un entier naturel non nul I **1pt**	Trouve $PGCD\left(\frac{a}{c}\,;\,\frac{b}{c}\right) = 1$ I I Trouve $U_0 = c$ I I 2**pts**	**4pts**
4-a)	**Démontrons que la suite (v_n) est une suite géométrique puis exprimons U_n en fonction de n.** On a : $\begin{cases} U_0 = PGCD(a\,;b) \\ U_{n+1} = \frac{5}{6}U_n + 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} U_0 = c \\ U_{n+1} = \frac{5}{6}U_n + 1 \end{cases}$ $v_n = U_n - 6$ alors $v_{n+1} = U_{n+1} - 6 = \frac{5}{6}U_n + 1 - 6 = \frac{5}{6}U_n - 5 = \frac{5}{6}(U_n - 6) = \frac{5}{6}v_n$ Alors la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = c - 6 = 531434$ Exprimons U_n en fonction de n	Identifie la suite (v_n) et c I I **1pt**	Etablit $v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n$ I Reconnait que $v_n = 531434 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ I **1pt**	Trouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = 531434$ I I I	**4,5pts**

	$v_n = U_n - 6$ alors $U_n = v_n + 6 = 531434 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + 6$			Trouve $U_n = 531434 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n + 6$ | | **2,5pts**	
b)	**Déduisons le nombre de participants à l'édition de l'année 2025.** Le nombre de participants à cette fête l'année $(2010 + n)$ est U_n alors à l'édition 2025 le nombre de participants est $U_{15} \approx 34499$	Identifie le nombre de participants à l'édition $(2010 + n)$ | **0,5pt**	Calcule U_{15} | **0,5pt**	Trouve 34499 participants | | **1pt**	2pts
	RECAPITULATIF DU PROBLEME 1	**9Ca=4,5pts**	**11Cm=5,5pts**	**21Ca= 10,5pts**	**20,5pts**
			Problème 2 : **22,5pts**		
5-a)	**Déterminons la loi de probabilité de X.** On désigne par X le nombre de fois où le tireur atteint la cible. X lui la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,7$ Donc $p(x = k) = C_5^k p^k (1-p)^{5-k}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ $p(x = 0) = C_5^0 p^0 (1-p)^5 = (0,3)^5 = 243 \times 10^{-5}$ $p(x = 1) = C_5^1 p^1 (1-p)^4 = 5 \times (0,7)(0,3)^4 = 2835 \times 10^{-5}$ $p(x = 2) = C_5^2 p^2 (1-p)^3 = 10 \times (0,7)^2 (0,3)^3 = 1323 \times 10^{-4}$ $p(x = 3) = C_5^3 p^3 (1-p)^2 = 10 \times (0,7)^3 (0,3)^2 = 3087 \times 10^{-4}$ $p(x = 4) = C_5^4 p^4 (1-p)^1 = 5 \times (0,7)^4 (0,3)^1 = 36015 \times 10^{-5}$ $p(x = 5) = C_5^2 p^2 (1-p)^3 = (0,7)^5 (0,3)^0 = 16807 \times 10^{-5}$	Reconnait la variable aléatoire réelle X | **0,5pt**	Exploite $p(x = k) = C_5^k p^k (1-p)^{5-k}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ | | **1pt**	Trouve $p(x = 0) = 243 \times 10^{-5}$ $p(x = 1) = 2835 \times 10^{-5}$ $p(x = 2) = 1323 \times 10^{-4}$ $p(x = 3) = 3087 \times 10^{-4}$ $p(x = 4) = 36015 \times 10^{-5}$	**4,5pts**

				$p(x=5)$ $= 16807 \times 10^{-5}$ | || ||| **3pts**	
b)	**Déterminons la probabilité qu'un joueur remporte une partie du jeu.** Le joueur est déclaré vainqueur d'une partie du jeu lorsqu'il atteigne au moins trois fois la cible sur les cinq lancers. $p(x \geq 3) = p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) = 83692 \times 10^{-5}$	Identifie les conditions d'invincibilité du joueur | **0,5pt**	Calcule $p(x \geq 3)$ || **1pt**	Trouve $p(x \geq 3)$ $= 83692 \times 10^{-5}$ | | **1pt**	**2,5pts**
6)	**Déterminons une équation cartésienne du plan (P_1).** Le plan (P_1) est l'ensemble des points invariants par la réflexion de plan (P_1) Soit M$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $S_{P_1}(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = (-x-2y+2z+6) \\ 3y = (-2x+2y+z+3) \\ 3z = (2x+y+2z-3) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ 2x+y-z-3=0 \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases}$ D'où (P_1): $2x+y-z-3=0$	Identifie la réflexion de plan (P_1) || **1pt**	Détermine l'ensemble des points invariants de la réflexion de plan (P_1) | | **1pt**	Trouve (P_1): $2x+y-z-3=0$ | | **1pt**	**3pts**
7-a)	**Démontrons que les plans (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles.** (P_1): $2x+y-z-3=0$ et $(P_2): x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0 \Leftrightarrow (P_2): 2x+y-z=0$	Identifie les plans (P_1) et (P_2) || **1pt**	Montre que les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles |	Trouve les plans (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles ||	**3pts**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>On a un vecteur normal à (P_1) est un vecteur normal à (P_2) donc les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles
De plus $O \in (P_2)$ et $O \notin (P_1)$ alors les plans (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles.</td>
<td></td>
<td>Prouve d'un point de l'un n'appartient pas à l'autre
|
1pt</td>
<td>1pt</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>Déterminons l'expression analytique de S_{P_2}.
Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux points de l'espace. On a :
$S_{P_2}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = t\overrightarrow{n_2}; t \in \mathbb{R} \\ I \text{ milieu de } [MM'] \\ I \in (P_2) \end{cases}$
$\overrightarrow{MM'} = t\overrightarrow{n_2}; t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2t + x \\ y' = t + y \\ z' = -t + z \end{cases}$
$I \text{ milieu de } [MM'] \Leftrightarrow I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2}\right)$
$I \in (P_2) \Leftrightarrow x + x' + \frac{y+y'}{2} - \frac{z+z'}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 2t + x + \frac{y+t+y}{2} - \frac{z-t+z}{2} = 0$
$2x + 3t + y - z = 0 \Leftrightarrow 3t = -2x - y + z$
$S_{P_2}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} 3x' = 6t + 3x \\ 3y' = 3t + 3y \\ 3z' = -3t + 3z \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 3x' = 2(-2x - y + z) + 3x \\ 3y' = -2x - y + z + 3y \\ 3z' = 2x + y - z + 3z \end{cases}$
$\begin{cases} 3x' = -x - 2y + 2z \\ 3y' = -2x + 2y + z \\ 3z' = 2x + y + 2z \end{cases}$ D'où $S_{P_2}: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z) \end{cases}$</td>
<td>Identifie le plan (P_2)
|
0,5pt</td>
<td>Exploite
$S_{P_2}(M) = M'$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = t\overrightarrow{n_2}; t \in \mathbb{R} \\ I \text{ milieu de } [MM'] \\ I \in (P_2) \end{cases}$
|||
1,5pt</td>
<td>Trouve
$3t = -2x - y + z$
|
L'expression analytique de S_{P_2}
||
1,5pt</td>
<td>3,5pts</td>
</tr>
</table>

c)	**Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de $S_{P_1} \circ S_{P_2}$.** $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ est la composée de deux plans parallèles, alors $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ et une translation de vecteur $\vec{u}$ $O \in (P_2)$, soit O' le projeté orthogonal de O sur (P_1) On $\overrightarrow{OO'} = t\overrightarrow{n_2}; t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2t \\ y' = t \\ z' = t \end{cases}$. $O' \in (P_1) \Leftrightarrow 2x' + y' - z' - 3 = 0$ $O' \in (P_1) \Leftrightarrow 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$ $\begin{cases} x' = \frac{3}{2} \\ y' = \frac{3}{4} \\ z' = \frac{3}{4} \end{cases}$ alors $O'\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$ alors $\vec{u} = 2\overrightarrow{OO'}$ D'où $\vec{u}\left(3; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$	Identifie $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ I **0,5pt**	Reconnait la position relative des plans (P_1) et (P_2) I Pose $\vec{u} = 2\overrightarrow{OO'}$ I **1pt**	Trouve $S_{P_1} \circ S_{P_2} = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} = 2\overrightarrow{OO'}$ I I **1pt**	**2,5pts**
8)	**Déterminons alors les coordonnées du point A.** Le point A est image d'un point B par la transformation $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ alors $t_{\vec{u}}(B) = A$ On a : $\overrightarrow{BA} = \vec{u}$ $\begin{cases} x_A = 4 \\ y_A = \frac{3}{2} \\ z_A = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où $A\left(4; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$	Identifie la transformation $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ I Identifie les points A et B I I **1,5pt**	Exploite l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BA} = \vec{u}$ I I **1pt**	Trouve $A\left(4; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ I I **1pt**	**3,5pts**

	RECAPITULATIF DU PROBLEME 2	**11Ca=5,5pts**	**15Cm=7,5pts**	**19Ca=9,5pts**	**22,5pts**
<u>Problème 3</u> : 47pts					
9-a)	**Démontrons que la fonction $u: x \mapsto 10x - 3$ est une solution de (E).** $(E): y'' - y' - 2y = -20x - 4$ La fonction u est une fonction polynôme, alors elle est au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 10$ et $u''(x) = 0$ $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = 0 - 10 - 2(10x - 3)$ $= -20x - 10 + 6$ $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = -20x - 4$. D'où la fonction $u: x \mapsto 10x - 3$ est une solution de (E).	Identifie l'équation (E) la fonction u I **0,5pt**	Utilise une méthode appropriée I **0,5pt**	Trouve $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = -20x - 4$ et conclut II **1pt**	**2pts**
b)	**Démontrons qu'une fonction k est solution de (E) si et seulement si $k - u$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'' - y' - 2y = 0$.** Soit k une fonction au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Supposons $k - u$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'' - y' - 2y = 0$ et montrons que k est solution de (E). $k - u$ est solution de $(E') \Leftrightarrow (k-u)'' - (k-u)' - 2(k-u) = 0 \Leftrightarrow k'' - k' - 2k = u'' - u' - 2u$. Or $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = -20x - 4$, donc $k''(x) - k'(x) - 2k(x) = -20x - 4$. Donc k est solution de (E). D'où une fonction k est solution de (E) si et seulement si $k - u$ est solution de l'équation différentielle$(E'): y'' - y' - 2y = 0$**.**	Identifie les équations (E) et (E') I **0,5pt**	utilise une technique appropriée pour établir l'équivalence I **0,5pt**	Justesse du raisonnement I **0,5pt**	**1,5pt**
c)	**Résolvons (E') puis déduisons les solutions de (E).** $(E'): y'' - y' - 2y = 0$ et $(E): y'' - y' - 2y = -20x - 4$. L'équation caractéristiques associée à l'équation différentielle (E') est : $r^2 - r - 2 = 0$.	Identifie les équations (E) et (E')	Ecrit et utilise une méthode de résolution de $r^2 - r - 2 = 0$ I	Trouve $r = -1$ ou $r = 2$	**2,5pts**

	$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-2) = 0$ $\Leftrightarrow r = -1 \; ou \; r = 2$ Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') est l'ensemble des fonctions définies par : $x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 9-b) une fonction k est solution de (E) si et seulement si $k - u$ est solution de l'équation différentielle (E'). Donc $(k-u)(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$; or $u(x) = 10x - 3$. Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions définies par : $x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$	La fonction u I **0,5pt**	**0,5pt**	Les solutions de (E') sont les fonctions $x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ Les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ III **1,5pt**	
d)	**Justifions que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, on a :** $\boldsymbol{\varphi(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3}$**.** On sait que φ est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 4$. Or les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions définies par : $x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$; donc $\varphi(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + 10x - 3$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ $\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow A + B - 3 = 0$ soit $A + B = 3$ (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} + 10$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ $\varphi'^{(0)} = 4 \Leftrightarrow -A + 2B + 10 = 4$ soit $-A + 2B = -6$ (b) De (a) et (b) , on a : $\begin{cases} A + B = 3 \\ -A + 2B = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} A + B = 3 \\ -A + 2B = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 3 \\ 3B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -1 \end{cases}$	Identifie la fonction φ I **0,5pt**	Exploite les conditions $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 4$. I Résous le système $\begin{cases} A + B = 3 \\ -A + 2B = -6 \end{cases}$ I **1pt**	Trouve $\begin{cases} A = 4 \\ B = -1 \end{cases}$ I Trouve $\varphi(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3$ I **1pt**	**2,5pts**

<table>
<tr><td></td><td>D'où $\varphi(x) = 4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10-a)</td><td>Démontrons que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
Soit D_f l'ensemble de définition de f.
$D_f = D_1 \cup D_2$; avec
$D_1 = \{x \in [0;+\infty[/\varphi(x)\ existe\ dans\ \mathbb{R}\}$ et
$D_2 = \{x \in]-\infty;0[/1-x > 0\ et\ \ln(1-x) \geq 0\}$
φ étant une solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du second ordre, alors φ est définie sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0;+\infty[$. Donc $D_1 = [0;+\infty[$
$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$
$$\ln(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0$$
Ainsi $D_2 =]-\infty;0[$
$D_f =]-\infty;0[\cup [0;+\infty[= \mathbb{R}$. D'où l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.</td><td>Identifie la fonction f
|
0,5pt</td><td>Pose $D_f = D_1 \cup D_2$
|
Ecrit D_1et D_2 en compréhension
|
Utilise une méthode appropriée de résolution d'une inéquation comportant la fonction ln
|
1,5pt</td><td>Trouve
$D_1 = [0;+\infty[$ et
$D_2 =]-\infty;0[$
|
$D_f = \mathbb{R}$
|
1pt</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Justifions que f est continue en 0.
$D_f = \mathbb{R}$, donc $0 \in D_f$
$f(0) = \varphi(0) = 0$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (4e^{-x} - e^{2x} + 10x - 3) = 0$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(-\sqrt{ln(1-x)}\right) = 0$$
On a : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$
D'où f est continue en 0.</td><td>Identifie la fonction f
|
0,5pt</td><td>Utilise la définition de la continuité d'une fonction en point
|
0,5pt</td><td>Trouve
$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) =$
$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$ et
conclut
| |
1pt</td><td>2pts</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>10-c)</td>
<td>Etudions la dérivabilité de f en 0 puis interprétons géométriquement les résultats.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[\frac{-\sqrt{\ln(1-x)}}{x}\right]=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[\frac{\ln(1-x)}{-x}\times\frac{1}{\sqrt{\ln(1-x)}}\right]$. En posant $X=-x$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\frac{\ln(X+1)}{X}\times\frac{1}{\sqrt{\ln(1+X)}}\right]$$
$=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\frac{\ln(X+1)}{X}\right]=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln(1+X))=0\\ \forall x>0;\ln(1+x)>0\end{cases}$
Ainsi f n'est pas dérivable à gauche en 0.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right)=\varphi'(0)=4$$
Ainsi f est dérivable à droite en 0.
Ainsi f n'est pas dérivable en 0 mais f est dérivable à droite en 0 et n'est pas dérivable à gauche en 0.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=+\infty$ et f est continue en 0; alors la courbe (C) de f admet en $O(0;0)$ une demi tangente à gauche d'équation $\begin{cases}x=0\\ y\leq 0\end{cases}$.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'_d(0)=4$ alors la courbe (C) de f admet en $O(0;0)$ une demi tangente d'équation $\begin{cases}x\geq 0\\ y=4x\end{cases}$</td>
<td>Identifie la fonction f
|
0,5pt</td>
<td>Utilise la définition de la dérivabilité d'une fonction en point
|
Utilise $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[\frac{\ln(X+1)}{X}\right]=1$ et $\varphi'(0)=4$
|
1pt</td>
<td>Trouve $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=+\infty$
|
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=4$
|
$\begin{cases}x=0\\ y\leq 0\end{cases};\begin{cases}x\geq 0\\ y=4x\end{cases}$
||
2pts</td>
<td>3,5pts</td>
</tr>
</table>

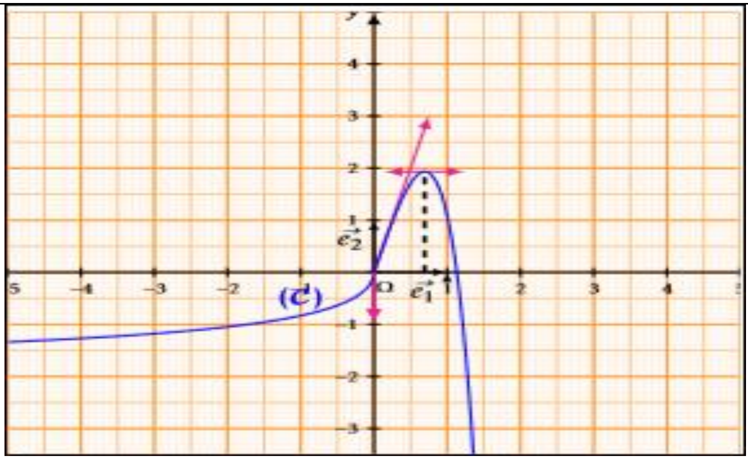
11-a)	**Calculons pour tout x élément de $[0;\ +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.** f étant une solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du second ordre, alors f est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0;+\infty[$. $\forall x \in [\mathbf{0};\ +\infty[,\ \boldsymbol{f'(x)} = -4e^{-x} - 2e^{2x} + 10$ et $f''(x) = 4e^{-x} - 4e^{2x}$	Identifie l'expression appropriée de f | **0,5pt**	Utilise les propriétés de dérivations appropriées | **0,5pt**	Trouve $\forall x \in [\mathbf{0};\ +\infty[,\ \boldsymbol{f'(x)} = -4e^{-x} - 2e^{2x} + 10$ et $f''(x) = 4e^{-x} - 4e^{2x}$ | | **1pt**	**2pts**
b)	**Etudions le signe de $f''(x)$ sur $[0;\ +\infty[$ et déduisons le sens de variation de f' sur $[0;\ +\infty[$.** $\forall x \in [\mathbf{0};\ +\infty[,\ f''(x) = 4e^{-x}(1 - e^{3x})$ $\forall x \in [\mathbf{0};\ +\infty[,\ 4e^{-x} > 0$. Donc le signe de $f''(x)$ est celui de $1 - e^{3x}$. $1 - e^{3x} \Leftrightarrow x = 0$ $\boldsymbol{x > 0 \Leftrightarrow 3x > 0} \Leftrightarrow e^{3x} > \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1} - e^{3x} < 0$; alors : $\forall x \in [\mathbf{0};\ +\infty[,\ f''(x) < 0$ et $f''(0) = 0$; donc f' est strictement décroissante sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$.	Identifie la fonction dérivée second f'' de f | **0,5pt**	Utilise une méthode appropriée d'étude de signe d'une fonction | **0,5pt**	Trouve : $\forall x \in [\mathbf{0};\ +\infty[,\ f''(x) < 0$ et $f''(0) = 0$; donc f' est strictement décroissante sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$ | | **1pt**	**2pts**
c)	**Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ et $f'(0)$.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4e^{-x} - 2e^{2x} + 10) = -\infty$; car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$ $f'(0) = 4$ car $f'(0) = \varphi'(0)\ et\ \varphi'(0) = 4$.	Identifie l'expression appropriée de f' | **0,5pt**	Utilise $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$ | Pose $f'(0)$ | **1pt**	Trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$ | $f'(0) = 4$ | **1pt**	**2,5pts**
d)	**Déduisons que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans $[0;\ +\infty[$ une solution unique α.** f' est continue et strictement décroissante sur $[0;\ +\infty[$. Alors f' réalise une bijection de $[0;\ +\infty[$ sur $f'([0;\ +\infty[) =$	Identifie l'équation $f'(x) = 0$ |	Utilise une méthode de résolution appropriée | **0,5pt**	Trouve que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans	**1,5pt**

	$\left]\lim_{x\to+\infty} f'(x)\,; f'(0)\right] =]-\infty; 4]$. Or $\mathbf{0} \in]-\infty; 4]$; donc l'équation $f'(x) = 0$ admet dans $[0;\ +\infty[$ une solution unique α.	**0,5pt**		$[0;\ +\infty[$ une solution unique α | **0,5pt**	
12-a)	**Justifions que si $f'(x) = 0$ alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.** Supposons que $f'(x) = 0$ et montrons que $t^3 - 5t + 2 = 0$. $t = e^x \Longrightarrow x = lnt$ où $t \in]0; +\infty[$ $f'(x) = -4e^{-lnt} - 2e^{2lnt} + 10$ $= -4e^{ln\left(\frac{1}{t}\right)} - 2e^{lnt^2} + 10$ $= -\frac{4}{t} - 2t^2 + 10$ car $t \neq 0$ Ainsi $f'(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{4}{t} - 2t^2 + 10 = 0$; car $t \neq 0$ $\Longrightarrow -2t^3 + 10t - 4 = 0$ $\Longrightarrow t^3 - 5t + 2 = 0$ D'où si $f'(x) = 0$ alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.	Identifie l'expression de la fonction f' | **0,5pt**	Utilise les propriétés pour transformer les expressions comportant les exponentielles | **0,5pt**	Trouve que si $f'(x) = 0$ alors $t^3 - 5t + 2 = 0$ | **0,5pt**	**1,5pt**
b)	**Justifions que 2 est une solution de $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déterminons deux nombres réels a et b tels que $t^3 - 5t + 2 = (t-2)(t^2 + at + b)$.** $2^3 - 5 \times 2 + 2 = 8 - 10 + 2 = 0$, donc 2 est une solution de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ En utilisant la méthode de la division euclidienne on trouve $t^3 - 5t + 2 = (t-2)(t^2 + 2t - 1)$. D'où $a = 2$ et $b = -1$	Identifie L'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ **et** le polynôme $t^3 - 5t + 2$ | **0,5pt**	Ecrit $2^3 - 5 \times 2 + 2$ | Utilise une méthode appropriée pour déterminer a et b | **1pt**	Trouve $2^3 - 5 \times 2 + 2 = 0$ et conclut | $a = 2$ et $b = -1$ | **0,5pt**	
c)	**Trouvons les solutions $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déduisons α.** $t^3 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 2t - 1) = 0$ $\Leftrightarrow t = 2\ ou\ t^2 + 2t - 1 = 0$ $t^2 + 2t - 1 = 0$	Identifie l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ |	Etablit $(t-2)(t^2 + 2t - 1) = 0$ | Utilise	Trouve $t = 2$ $t = -1 + \sqrt{2}$	**2,5pts**

	$\Delta = 4+4 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$ donc $t=-1+\sqrt{2}$ ou $t=-1-\sqrt{2}$ $t^3-5t+2=0 \Leftrightarrow t=2\ ou\ t=-1+\sqrt{2}$ ou $t=-1-\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow t=2\ ou\ t=-1+\sqrt{2}; car\ t>0$ D'après les questions 11-d) et 12-a) on a : $e^{\alpha}=2\ ou\ e^{\alpha}=\sqrt{2}-1$ c'est-à-dire $\alpha = ln2$ ou $\alpha = ln\left(\sqrt{2}-1\right)$. Or $ln\left(\sqrt{2}-1\right)<0\ et\ ln2>0$. Donc $\alpha = ln2$	**0,5pt**	$ln\left(\sqrt{2}-1\right)<0\ et\ ln2>0$ | **1pt**	$t=-1-\sqrt{2}$ | Trouve $\alpha = ln2$ | **1pt**	
13-a)	**Vérifions que :** $\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) = x\left(\frac{4}{xe^x}-\frac{e^{2x}}{x}+10-\frac{3}{x}\right)$. $\forall x \in]0;+\infty[; on\ a$: $x\left(\frac{4}{xe^x}-\frac{e^{2x}}{x}+10-\frac{3}{x}\right) = \frac{4x}{xe^x}-\frac{xe^{2x}}{x}+10x-\frac{3x}{x}$ $= 4e^{-x}-e^{2x}+10x-3 = f(x)$ D'où : $\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) = x\left(\frac{4}{xe^x}-\frac{e^{2x}}{x}+10-\frac{3}{x}\right)$.	Identifie l'expression appropriée de f | **0,5pt**	Utilise une méthode convenable | **0,5pt**	Trouve $\forall x \in]0;+\infty[$ $f(x) = x\left(\frac{4}{xe^x}-\frac{e^{2x}}{x}+10-\frac{3}{x}\right)$ | **0,5pt**	
b)	**Calculons ;** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{ln(1-x)}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(lnx) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{4}{xe^x}-\frac{e^{2x}}{x}+10-\frac{3}{x}\right)\right] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$	Identifie f | **0,5pt**	Utilise $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(lnx) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right) = +\infty$ | | Utilise $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ | | **1pt**	Trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ | | **1pt**	**2,5pts**

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>c)</td>
<td>Etudions le signe de f' sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$
f est continue sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.
$\forall x \in]-\infty;0[$; on a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{1-x}}{2\sqrt{ln(1-x)}}$; donc $\forall x \in]-\infty;0[$; $f'(x) > 0$
D'après les questions 11) et 12) on a :
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$ln2$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
</table>
En résumé, on a : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0[\cup]0;ln2[; f'(x) > 0 \\ \forall x \in]ln2;+\infty[; f'(x) < 0 \\ Pour\ x = ln2; f'(x) = 0 \end{cases}$</td>
<td>Identifie la fonction f
|
0,5pt</td>
<td>Utilise les propriétés relatives de la dérivabilité de fonction composée
|
Utilise les propriétés de dérivation de fonction composée
|
Utilise une méthode appropriée d'étude signe
|
1,5pt</td>
<td>Trouve
$\forall x \in]-\infty;0[$:
$f'(x) = \frac{\frac{1}{1-x}}{2\sqrt{ln(1-x)}}$
|
Trouve le signe de $f'(x)$ sur chaque intervalle
|
1pt</td>
<td>3pts</td>
</tr>
<tr>
<td>14-a)</td>
<td>Dressons le tableau de variation de f.
On sait que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0[\cup]0;ln2[; f'(x) > 0 \\ \forall x \in]ln2;+\infty[; f'(x) < 0 \\ Pour\ x = ln2; f'(x) = 0 \end{cases}$
Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty;ln2]$ et strictement décroissante sur $[ln2\,;+\infty[$.
$f(ln2) = 4e^{-ln2} - e^{2ln2} + 10ln2 - 3 = 10ln2 - 5$</td>
<td>Identifie les fonction f et f'
|
0,5pt</td>
<td>Utilise des propriétés relatives au sens de variation d'une fonction
|
Réalise un tableau de variation
|
1pt</td>
<td>Trouve
f est strictement croissante sur $]-\infty;ln2]$ et strictement décroissante sur $[ln2\,;+\infty[$
|
Trouve le tableau de variations avec justesse</td>
<td>2,5pts</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$ln2$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>$\|$</td><td></td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$10ln2-5$</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
<td>|
1pt</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>Construisons la courbe (C).
Etudions d'abord les branches infinies de (C).
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{-\sqrt{ln(1-x)}}{x}\right]$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{1-x}{-x} \times \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1}{\sqrt{\ln(1-x)}}\right] = 0$
Car $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{1-x}{-x}\right] = 1$; $\lim\limits_{X\to+\infty} \left[\frac{\ln X}{X}\right] = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{-1}{f(x)}\right] = 0$. Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{4}{xe^x} - \frac{e^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x}\right] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$; soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$; donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$</td>
<td>Identifie f
|
0,5pt</td>
<td>Utilise des propriétés relatives des branches infinies
|
Construis un repère
|
1pt</td>
<td>Trouve
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et conclut
|
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et conclut
|
Justesse de la courbe (C)
| |
2pts</td>
<td>3,5pts</td>
</tr>
</table>

					
15)	**Calculons $\mathcal{A}(D)$.** $\mathcal{A}(D) = \left(\int_1^{ln3} f(x)dx\right) ua$; Soit F une primitive sur $[1; ln3]$ de la fonction f. On a $F(x) = -4e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x} + 5x^2 - 3x$; alors $\int_1^{ln3} f(x)dx = F(ln3) - F(1)$ $= -4e^{-ln3} - \frac{1}{2}e^{2ln3} + 5(ln3)^2 - 3ln3 + 4e^{-1} + \frac{1}{2}e^2 - 5 + 3$ $= -\frac{4}{3} - \frac{9}{2} + 5(ln3)^2 - 3ln3 + 4e^{-1} + \frac{1}{2}e^2 - 2$ $= -\frac{47}{6} + 5(ln3)^2 - 3ln3 + 4e^{-1} + \frac{1}{2}e^2$ $\mathcal{A}(D) = \left(-\frac{47}{6} + 5(ln3)^2 - 3ln3 + 4e^{-1} + \frac{1}{2}e^2\right) ua$	Identifie le domaine $\mathcal{A}(D)$ | **0,5pt**	Pose $\mathcal{A}(D) = \left(\int_1^{ln3} f(x)dx\right) ua$ et utilise une méthode de calcul d'une intégrale | **0,5pt**	Trouve $\mathcal{A}(D) = \left(-\frac{47}{6} + 5(ln3)^2 - 3ln3 + 4e^{-1} + \frac{1}{2}e^2\right) ua$ | **0,5pt**	**1,5pt**
	Récapitulatif problème 3	**20Ca=10pts**	**34Cm=17pts**	**40Co=20pts**	**47pts**
	Récapitulatif problème 1 ; 2 ;3	**40Ca=20pts**	**60Cm=30pts**	**80Co=40pts**	**90pts**

Critère de perfectionnement :

- Si N< 40 alors P = 0 ;

- ❖ Si $40 \leq N < 60$ alors P varie de 0 à 5
- ❖ Si $N \geq 60$ alors P varie de 0 à 10

Recommandations générales : lire attentivement la production de l'apprenant ; écris sur la copie de l'apprenant la note sur 90 ; la note du CP ; la note sur 100 et la note sur 20.

Recommandations spécifiques.

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DU BENIN

DIRECTION DEPARTEMENTALE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DU LITTORAL

Route de l'aéroport
: 10BP 250 Cotonou
: (229) 21 32 38 43 ; Fax : 21 32 41 88
web: www.enseignementsecondaire.gouv.bj

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL

Année scolaire : 2023-2024
Niveau : BAC
Série : C
Durée : 4 heures

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

<u>Contexte</u> : Aménagement d'un jardin.

Dansou, un professeur de Maths, veut aménager le jardin de sa nouvelle maison.

Il veut faire réaliser un parterre de forme circulaire. Le plan du sol assimilé au plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{e_1}, \vec{e_2})$; le parterre sera délimité par le cercle (Γ) circonscrit au quadrilatère $ABCD$ où A, B, C et D sont les points images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz - 15 = 0$;

$Re(z_B) < Re(z_C) \leq Re(z_A) < Re(z_D)$; $Im(z_A) < Im(z_C)$

Les fleurs seront disposées suivant une ligne assimilée à une portion de la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction numérique f. Pour l'arrosage des fleurs, il est prévu un dispositif de stockage d'eau.

L'ouvrier en charge des travaux se préoccupe de calculer l'aire du parterre, de représenter la ligne de disposition des fleurs et de s'approprier le dispositif de stockage d'eau.

Tâche : tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de l'ouvrier en résolvant les problèmes ci-après :

Problème 1

1- a) Prouve que l'équation (E) est équivalente à l'équation (F): $(z - i)^4 = 16$.

b) Résous (F) et déduis-en les solutions de (E).

2- a) Démontre que ABCD est un carré.

b) Calcule l'aire du parterre.

Problème 2

Le dispositif de stockage de l'eau a la forme d'un tétraèdre $SEFG$. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les points E, F et G appartiennent au plan (P) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2t + t' + 4 \\ y = t \\ z = t' \qquad\qquad t, t'\text{réels} \end{cases}$.

E, F et G sont respectivement les points d'intersection du plan (P) avec les droites de repères respectifs $(O;\vec{\imath})$, $(O;\vec{\jmath})$ et $(O;\vec{k})$. et $S(a,b,c)$ est tel que : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 29 \\ 0 < a < b \\ 2a - 4c = 0 \end{cases}$; a, b et c sont des entiers.

1- Détermine les coordonnées des points E, F, G et S.

2- Détermine la hauteur et le volume du tétraèdre $SEFG$.

Problème 3

La ligne courbe suivant laquelle seront plantées les fleurs est une portion de la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\ )$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} - \frac{2}{e}\sqrt{e} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = (x-2) - (x-2)\ln(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Cette portion est celle de la restriction de f à l'intervalle $]0; 2+e]$.

1- a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 2.

2- Etudie les branches infinies de (C_f).

3- a) Etudie le sens de variation de .

b) Achève l'étude des variations de f.

c) Précise les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

4- Construis la courbe (C_f) sur $]0; 2+e]$.

FIN

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DU BENIN

DIRECTION DEPARTEMENTALE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DU LITTORAL

Route de l'aéroport
: 10BP 250 Cotonou
: (229) 21 32 38 43 ; Fax : 21 32 41 88
web: www.enseignementsecondaire.gouv.bj

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL

Année scolaire : 2023-2024
Niveau : BAC
Série : C
Durée : 4 heures

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

GRILLE DE CORRECTION

N°	Eléments de réponses	CA	CM	CO	Total
	PROBLEME1	**4 CA**	**9 CM**	**10 CO**	**23 pts**
1).	a) Prouvons que l'équation (E) est équivalente à l'équation (F). $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (z-i)^2(z-i)^2 - 16 = 0$ $\Leftrightarrow (z^2 - 2iz - 1)(z^2 - 2iz - 1) - 16 = 0$ $\Leftrightarrow z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz - 15 = 0$ $\Leftrightarrow (\mathrm{F})$. Donc l'équation (E) est équivalente à l'équation (F).	Identifie les équations (E) et (F). I	Utilise une méthode pour démontrer que (E) et (F) sont équivalentes. |	Trouve $(E) \Leftrightarrow (F)$ ||	**4pts**
	b) Résolvons (F) et déduisons les solutions de (E). $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \left(\frac{z-i}{2}\right)^4 = 1$ $\Leftrightarrow w^4 = 1$ avec $w = \frac{z-i}{2}$. $\Leftrightarrow w_k = e^{i\frac{k\pi}{2}}, k \in \{0,1,2,3\}$ avec $w_k = \frac{z_k - i}{2}$ $\Leftrightarrow w_0 = 1, w_1 = i, w_1 = -1, w_3 = -i$ avec $w_k = \frac{z_k - i}{2}$; $k \in \{0,1,2,3\}$ Donc $z_0 = 2 + i, z_1 = 3i, z_2 = -2 + i, z_3 = -2 + i, z_0 = -i$ Par suite les solutions de (F) sont les nombres complexes z_0, z_1, z_2 et z_3. (E) étant équivalente à (F) alors les solutions de (E) sont : $z_0 = 2 + i, z_1 = 3i, z_2 = -2 + i, z_3 = -2 + i$	Identifie les équations (E) et (F). I	Utilise La propriété des racines $n^{\text{ième}}$ || |	Trouve : $z_0 = 2 + i$, $z_1 = 3i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -2 + i$ || ||	**8pts**

<table>
<tr><td>2)</td><td>a) Démontrons que ABCD est un carré.
$\mathrm{A, B, C}$ et D sont les points images des solutions de (E) tels que $\mathrm{Re}(z_B) < \mathrm{Re}(z_C) \leq \mathrm{Re}(z_A) < \mathrm{Re}(z_D)$; $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_C)$
Or $\mathrm{Re}(-2+i) < \mathrm{Re}(3i) \leq \mathrm{Re}(-i) < \mathrm{Re}(2+i)$ et $\mathrm{Im}(-i) < \mathrm{Im}(3i)$
Donc $z_A = -i, z_B = -2+i, z_C = 3i$ et $z_D = 2+i$.
On a :
• $\frac{z_A+z_C}{2} = i$ et $\frac{z_B+z_D}{2} = i$ donc les diagonales $[\mathrm{BD}]$ et $[\mathrm{AC}]$ ont même milieu (i);
• $|z_A - z_C| = |-4i| = 4$; $|z_B - z_D| = |(-2+i)-(2+i)| = 4$ donc $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$ (ii);
• $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_D} = \frac{-4i}{4} = -i$ et $-i \in i\mathbb{R}^*$. Donc $(\mathrm{AC}) \perp (\mathrm{BD})$ (iii).

De (i), (ii) et (iii) on déduit que ABCD est un carré.</td><td>Identifie
Les affixes des sommets du carré.

|</td><td>Utilise
une méthode pour démontrer que ABCD est un carré

|| |</td><td>Trouve :
• $z_A = -i$, $z_B = -2+i, z_C = 3i$ et $z_D = 2+i$
• ABCD est un carré

||</td><td>6pts</td></tr>
<tr><td></td><td>Calculons l'aire $\mathcal{A}$ du parterre.
Le parterre étant délimité par le cercle circonscrit au carré ABCD, alors $[\mathrm{AC}]$ est un diamètre du cercle (Γ). D'où le rayon r du parterre est égal à 2 par suite l'aire $\mathcal{A} = 4\pi$.</td><td>Identifie:
La forme du parterre
|</td><td>Utilise:
Une méthode la formule de l'aire d'un cercle
||</td><td>Trouve :
$\mathcal{A} = 4\pi$ ua

| |</td><td>5pts</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROBLEME 2</td><td>04 C.A.</td><td>08CM</td><td>10 C.O.</td><td>22 pts</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>Détermine les coordonnées des points E ; F ; G et S

Détermine une équation cartésienne du plan (P)
On a : $\begin{cases} x = -2t + t' + 4 \\ y = t \quad\quad (t, t') \in \mathbb{R}^2 \\ z = t \end{cases}$
On a : $x = 2y + z + 4$ soit $(P) : x + 2y - z - 4 = 0$.
Soit (D_1) ;(D_2) et (D_3) les droites de repères respectives : $(O, \vec{\imath})$; $(O, \vec{\jmath})$ et $(O, \vec{k})$.
on a : E∈ $(D_1) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} E(x_E\ ; 0; 0) \\ x_E + 2y_E - z_E - 4 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} E(x_E\ ; 0; 0) \\ x_E + 2(0) - (0) - 4 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} E(x_E\ ; 0; 0) \\ x_E = 4 \end{cases}$</td><td>Identifie :
les points E ; F ; G ; S et le repère donné

Identifie
• $\begin{cases} a^2 + b^2 = 29 \\ 0 < a < b \\ 2a - 4c = 0 \end{cases}$
• $a^2 + b^2 = 29$
• $0 < a < b$
• $2a - 4c = 0$

| |</td><td>• Utilise une méthode pour déterminer les coordonnées de
E
F
G
S

| |
• Utilise une méthode pour résoudre le système</td><td>Trouve
* E(4 ; 0 ; 0)
* F(0 ;2 ;0)
* G ($0; 0; -4$)
* S($2; 5; 1$)

Trouve
• $a \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$
• $\boldsymbol{a = 2}$ et $\boldsymbol{b = 5.}$
• $c = 1$
| |
$(\boldsymbol{a}\ ; \boldsymbol{b}\ ; \boldsymbol{c}) = (\mathbf{2}\ ; \mathbf{5}\ ; \mathbf{1})$</td><td>12pts</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
D'où $E(4;0;0)$.
on a : $F\in (D_2)\cap(P) \Leftrightarrow \begin{cases} F(0;\ y_F\ ;0) \\ x_F+2y_F-z_F-4=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} F(0\ ;y_F;0) \\ (0)+2y_F-(0)-4=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} F(0;y_F;0) \\ y_F=2 \end{cases}$
D'où $F(0;2;0)$
on a : G$\in (\boldsymbol{D_3})\cap(P) \Leftrightarrow \begin{cases} G(0;0\ ;\ z_G\ ) \\ x_G+2y_G-z_G-4=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} G(0;0\ ;\ z_G\ ) \\ (0)+2(0)-\ z_G-4=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} G(0;0\ ;\ z_G) \\ z_G=-4 \end{cases}$
D'où $G(0;0\ ;-4)$

Coordonnées de S
$\begin{cases} a^2+b^2=29 \\ 0<a<b \\ 2a-4c=0 \end{cases}$
$a^2+b^2=29$, alors $a^2\leq 29$, donc a$\leq \sqrt{29}\ et\ \sqrt{29}\approx 5{,}38$
Or a est un entier supérieur à 0, donc $a\in\{1;2;3;4;5\}$

Pour $a=1$ on a : $b^2=29-1=28$ et 28 n'est pas un carré parfait ; donc il n'y a pas de valeur pour b.
Pour $a=2$ on a : $b^2=29-4=25$, donc b=5 ou b=-5 . Or b est un entiers naturel alors b=5.
Ainsi $a=2$ et $b=5$
Pour $a=3$ on a : $b^2=29-9=20$ et 20 n'est pas un carré parfait ; donc il n'y a pas de valeur pour b.
Pour $a=4$ on a : $b^2=29-16=13$ et 13 n'est pas un carré parfait ; donc il n'y a pas de valeur pour b.
Pour $a=5$ on a : $b^2=29-25=4$, donc $b=2$ ou $=-2$. Or b est un entiers naturel alors $b=2$. De plus $<b$, donc $a=5$ et $b=\ 2$ ne conviennent pas .
Conclusion : $a=2$ et $b=5$.

</td>
<td></td>
<td>| |</td>
<td>
et
$\mathbf{S(2\ ;5\ ;1)}$
||||
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Par ailleurs $2a-4c=0$, donc $c=\frac{a}{2}=1$
D'où $(a\,;b\,;c)=(2\,;5\,;1)$ et S$(2\,;5\,;1)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2)</td><td>Détermine la hauteur h et le volume V de SEFG
$h=d(S;(P))$
$=\frac{[\,x_S+2y_S-z_S-4]}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$ul $=\frac{7}{\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{6}ul$
Détermine le volume V
$V=\frac{1}{6}\left|\,\overrightarrow{ES}.(\,\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EG}\,)\right|$uv
On a: $\overrightarrow{EF}\,(-4;2;0)$; $\overrightarrow{EG}\,(-4;0;-4)$, $\overrightarrow{ES}\,(-2;5;1)$
$\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EG}\,\left(\begin{vmatrix}2 & 0\\0 & -4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & -4\\-4 & -4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & -4\\2 & 0\end{vmatrix}\right)$
$\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EG}\,(-8;-16;8)$
v $=\frac{1}{6}\left|\,(-2)(-8)+(5)(-16)+(1)(8)\right|$uv $=\frac{56}{6}$ uv
$V=\frac{28}{3}uv$</td><td>Identifie :
• S par ses coordonnées
• (P)
Identifie
• la forme du solide SEFG comme d'un tétraèdre
• échelle
• le volume

||</td><td>• Reconnaître que $h=d(S,(P))$
• Utilise une formule de la distance d'un point à un plan.
Pose
• $V=\frac{1}{6}\left|\,\overrightarrow{ES}.(\,\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EG}\,)\right|$uv

| || |</td><td>Trouve :
h= $\frac{7\sqrt{6}}{6}ul$
Trouve
• $V=\frac{28}{3}uv$

| |||</td><td>10 pts</td></tr>
<tr><td></td><td>Problème 3</td><td>12 CA</td><td>13CM</td><td>20</td><td>45pts</td></tr>
<tr><td>1.a)</td><td>Détermine l'ensemble de définition de la fonction .
Soit D l'ensemble de définition de f
On a : D= $D_1 \cup D_2$ avec
$D_1=\{x\in\,]-\infty;2]/\,x\neq 0\}$ et $D_2=\{x\in\,]2;+\infty[/\,x-2>0\}$
• $D_1=\{x\in\,]-\infty;2]/\,x\neq 0\}$
$\begin{cases}x\in\,]-\infty;2]\\ \quad x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$
$D_1=\,]-\infty;0[\,\cup\,]0;2]$
• $D_2=\{x\in\,]2;+\infty[/\,x-2>0\}$
$x-2>0\Leftrightarrow x\in\,]2\,;+\infty[$
$D_2=\,]2;+\infty[$
D = $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$</td><td>Identifie
f comme fonction définie par intervalles

|</td><td>Pose
D= $D_1 \cup D_2$
$D_1=\{x\in\,]-\infty;2]/\,x\neq 0\}$ et
$D_2=\{x\in\,]2;+\infty[/\,x-2>0\}$

|</td><td>Trouve
$D_1=\,]-\infty;0[\,\cup\,]0;2]$
$D_2=\{x\in\,]2;+\infty[/\,x-2>0\}$
D = $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

||</td><td>4 pts</td></tr>
</table>

1.b)	**Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 2** • **Continuité de f en 2.** On a : 2$\in D$ et $f(2)$ =0 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = f(2)$ donc f est continue à gauche en 2. Posons $X = x - 2$ Lorsque $\begin{matrix} x \to 2 \\ x > 2 \end{matrix}$ alors $\begin{matrix} X \to 0 \\ X > 0 \end{matrix}$. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} (X - X\ln X) = 0 = f(0)$ car $\lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} X\ln X =$ 0 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$=$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = f(2)$ Alors f est continue à droite en 2. En conclusion, f est continue en 2.	**Identifie f sur chaque intervalle et 2 comme borne** |	Utilise : • la propriété de la continuité d'une fonction en un point $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} xlnx = 0$ |	Trouve $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) =$ $f(2)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) =$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = f(2)$ Conclut ||	**4 pts**

	• **Dérivabilité de f en 2.** Pour $x < 2$, on a : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{xe^{-\frac{1}{x}}-\frac{2}{e}\sqrt{e}}{x-2} = \frac{xee^{-\frac{1}{x}}-2\sqrt{e}}{(x-2)e} = \frac{xe^{-\frac{1}{x}}-2e^{-\frac{1}{2}}}{(x-2)e} = \frac{u(x)-u(2)}{x-2}$ avec u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc en 2. Ainsi $\lim_{x\to 2}\frac{u(x)-u(2)}{x-2} = u'(2)$. $\forall x \in]0;+\infty[, u'(x) = \left(\frac{1}{x}+1\right)e^{-\frac{1}{x}}$ et $u'(2) = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ Ainsi, $\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ et $\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$. f est donc dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. Pour $x > 2$,on a : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1 - \ln(x-2)$ Posons $X = x - 2$ Lorsque x tend vers 2 avec $x > 2$, X tend vers 2 avec $x > 2$. $\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}}[1-\ln(x-2)] = \lim_{\substack{X\to 0\\X>0}}(1-\ln X) = +\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln(x) = -\infty$. $\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 2. Finalement,f n'est pas dérivable en 2.	Identifie **f comme fonction définie par intervalles** |	Utilise une propriété pour étudier la dérivabilité en 2 |	$\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ $\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$ f n'est pas dérivable en 2 ||	**4pts**
2)	**Etudions les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.** $D =]-\infty;0[U]0;+\infty[$ • Limite de f en $-\infty$ $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ alors $\lim_{x\to-\infty}e^{-\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty}x = -\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty}f(x) = -\infty$. Pour $x < 0, \frac{f(x)}{x} = e^{-\frac{1}{x}} - \frac{2\sqrt{e}}{xe}$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$	Identifie • Identifie les bornes et les limites aux bornes de f. | | | |	**Utilise une technique pour calculer les quatre limites** |||	Trouve. • $\lim_{x\to-\infty}f(x) = -\infty$. • La droite d'équation $y = x - 1 - \frac{2\sqrt{e}}{e}$ est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage	**14pts**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Pour $x < 0$, $f(x) - x = xe^{-\frac{1}{x}} - x - \frac{2\sqrt{e}}{e} = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{-\frac{1}{x}} - \frac{2\sqrt{e}}{e}$
$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$ alors
$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - x] = -1 - \frac{2\sqrt{e}}{e}$. La droite d'équation $y = x - 1 - \frac{2\sqrt{e}}{e}$ est une asymptote à $(\boldsymbol{C_f})$ au voisinage de $-\infty$.
• Limite de f à gauche en 0
Pour $x < 0$, $f(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} - \frac{2\sqrt{e}}{e}$
$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x} = +\infty$ alors $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.
La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe $(\boldsymbol{C_f})$.

• Limite de f à droite en 0

$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ alors $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\frac{2\sqrt{e}}{e}$.
• Limite de f en $+\infty$
Pour $x > 0$, $f(x) = (x-2)[1 - \ln(x-2)]$
Posons $X = x - 2$
Quand $x \to +\infty, X \to +\infty$
$\lim_{x\to+\infty}(x-2)[1-\ln(x-2)] = \lim_{x\to+\infty} X[1 - \ln X] = -\infty$ alors
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
Pour $x > 0, \frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)(1 - \ln(x-2))$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>de $-\infty$.
• $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

• La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe $(\boldsymbol{C_f})$

• $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\frac{2\sqrt{e}}{e}$.
• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
• La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

|| || || |</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3)</td>
<td>
<u>a) Etudions le sens de variation de f.</u>
Continuité et dérivabilité

$x \longmapsto x$ et $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ sont continues et dérivables sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;2[$alors $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x}}$ et $x \longmapsto xe^{-\frac{1}{x}} - \frac{2}{e}\sqrt{e}$ sont continues et dérivables sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;2[$.
$x \longmapsto x-2$ est continues sur $]2\,;\,+\infty[$ et $\forall\, x \in\,]2\,;\,+\infty[$, $x-2>0$ alors les fonctions $x \longmapsto \ln(x-2)$ et $x \longmapsto (x-2)-(x-2)\ln(x-2)$ sont continues et dérivables sur $]2\,;\,+\infty[$.

f est dérivable en tout élément de $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$.
Dérivée

$x \in\,]-\infty;0[\,\cup\,]0\,;2[$

$\forall x \in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;2[,\ \ f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$
$\forall x \in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;2[,\ \ f'(x) = \frac{x+1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$
$\forall x \in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;2[,\ \ e^{-\frac{1}{x}} > 0$ alors le signe de f' est celui de $\frac{x+1}{x}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>|</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>x</td><td>$-$</td><td>|</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{x+1}{x}$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>||</td><td>$+$</td><td>||</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>|</td><td>$-$</td><td>||</td><td>$+$</td><td>||</td></tr>
</table>
</td>
<td>Identifie f et f ‘

|</td>
<td>Utilise

Une propriété pour calculer la dérivée sur chaque intervalle
Une méthode pour étudier le signe de la dérivée sur chaque intervalle de l’ensemble de dérivabilité de f
une propriété pour donne le sens de variations de f

| | |</td>
<td>Trouve le sens de variations de f

$\forall x \in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;2[,\ \ f'(x) = \frac{x+1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$
$\forall x \in\,]2\,;+\infty[,$ $f'(x) = -\ln(x-2)$

| | |</td>
<td>7pts</td>
</tr>
</table>

- $x \in]2\,;\,+\infty[$

$\forall x \in]2\,;+\infty[, f'(x) = 1 - \left[\ln(x-2) + \frac{1}{x-2}(x-2\right]$

$\forall x \in]2\,;+\infty[,\ f'(x) = -\ln(x-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln(x-2) < 0$

$\Leftrightarrow \ln(x-2) > 0$

$\Leftrightarrow x - 2 > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 3$

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	||	+	||	+	0	−	

- $\forall\, x \in]-\infty;\ -1[\cup]0\,;2[\cup]2\,;3[\,, f'(x) > 0$ et f' est continue en 2 alors f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\ -1]$ et $]0\,;\ 3]$.
- $\forall\, x \in]-1\,;0[\cup]3\,;\ +\infty[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $[-1\,;0[$ et $[3\,;\ +\infty[$

b) **Achevons l'étude des variations de *f***

Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e-e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-2e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$			1	$\searrow$	$-\infty$

Identifie
Le sens de variation de f

|

Réalise
un tableau de variation

|

Trouve
le tableau de variation de f

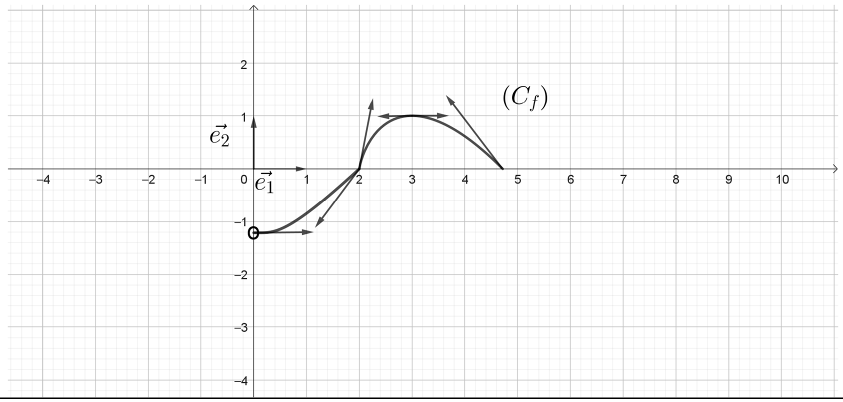
|

3pts

<table>
<tr>
<td></td>
<td>c) Précisons les points d'intersection de la courbe ($\mathcal{C}f$) avec l'axe des abscisses.
D'après le tableau de variation :
• $-e-e^{-\frac{1}{2}}$ est le maximum de f sur l'intervalle $]-\infty;0[$et $-e-e^{-\frac{1}{2}}<0$ alors l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solutions dans l'intervalle $]-\infty;0[$;
• f est strictement croissante sur $]0\,;3]$ et $f(2)=0$ alors 2 est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ dans $]0\,;3]$;
• Soit $x\in]3\,;+\infty[$
$f(x)=0\Leftrightarrow(x-2)(1-\ln(x-2)=0$
$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $1-\ln(x-2)=0\,,x>3$
$\Leftrightarrow\ln(x-2)=1$
$f(x)=0\Leftrightarrow x-2=e$
$f(x)=0\Leftrightarrow x=2+e$
($\mathcal{C}$f) coupe l'axe des abscisses en deux points $A(2\,;0)$ et $B(2+e\,;0)$.</td>
<td>Identifie f</td>
<td>Utilise une technique pour résoudre l'équation f(x)=0</td>
<td>Trouve ($\mathcal{C}$f) coupe l'axe des abscisses en deux points $A(2\,;0)$ et $B(2+e\,;0)$.</td>
<td>4pts</td>
</tr>
<tr>
<td>4)</td>
<td>Construisons ($\mathcal{C}$f) sur $]\mathbf{0}\,;\mathbf{2}+\boldsymbol{e}]$
Interprétation géométrique de l'étude de dérivabilité en 2
• $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{2}$ alors la courbe de f admet à gauche au point A une demi-tangente d'équation : $(T_1):\begin{cases}x\leq2\\y=\frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{2}(x-2)+f(2)\end{cases}$
Soit $(T_1):\begin{cases}x\leq2\\y=\frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{2}x-3e^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$
• $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$ et f est continue en 2 alors ($\mathcal{C}$f) admet à droite au point A une demi-tangente d'équation : $(T_2):\begin{cases}x=2\\y\geq f(2)\end{cases}$
Soit $(T_2):\begin{cases}x=2\\y\geq0\end{cases}$
Equation de la tangente en $\boldsymbol{B}(\mathbf{2}+\boldsymbol{e}\,;\mathbf{0})$
$f'(2+e)=-\ln(2+e-2)$</td>
<td>Identifie f et]0 ; 2+e]</td>
<td>Utilise une propriété pour interpréter la dérivation de f en 2</td>
<td>Trouve
• la courbe de f admet à gauche au point A une demi-tangente d'équation $(T_1):\begin{cases}x\leq2\\y=\frac{3e^{-\frac{1}{2}}}{2}x-\end{cases}$
• ($\mathcal{C}$f) admet à droite au point A une demi-tangente d'équation : $(T_2):\begin{cases}x=2\\y\geq0\end{cases}$
• La demi-droite d'équation est</td>
<td>5pts</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$f'(2+e)=1$
L'équation de la tangente (T_3) au point B est :
$(T_3): y=-(x-e-2)+f(2+e)$
$(T_3): y=-x+e+2$

Soit g le prolongement par continuité de la restriction de f à l'intervalle $]0\,,2]$ en 0. On a :
$\begin{cases} \forall\, x \in\,]0\,;2], g(x)=f(x) \\ g(0)=-\frac{2}{e}\sqrt{e} \end{cases}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$
La demi-droite d'équation $\begin{cases} x \geq 0 \\ y=0(x-0)-\frac{2}{e}\sqrt{e} \end{cases}$ permet d'avoir l'allure de la courbe à droite au voisinage du point $E(0;-\frac{2}{e}\sqrt{e}\,)$.


</td>
<td>||</td>
<td>||</td>
<td>$\begin{cases} x \geq 0 \\ y=-\frac{2}{e}\sqrt{e} \end{cases}$

• Construis ($\mathcal{C}$f)

|</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>RECAPITULATIF</td>
<td>20 CA</td>
<td>30CM</td>
<td>40 CO</td>
<td>90pts</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>1CA =1pt</td>
<td>1CM= 1pt</td>
<td>1 CO = 1 pt</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Critères de perfectionnement (CP) : Soit N le total à l'écrit sur 90.

Trois modalités à observées pour attribuer les points de CP : Lisibilité de la copie (1) ; Propreté de la copie (2) ; l'originalité de la copie(3)

« Si $\mathrm{N} < 40$, alors $Cp = 0$ »

« Si $40 \leq \mathrm{N} < 60$, alors $0 \leq Cp \leq 5$ » : 2 points pour une modalité observée ; 4 points pour deux modalités observée ; 5 pour les trois observées

« Si $\mathrm{N} > 60$, alors $0 \leq Cp \leq 10$ » : 4 point pour une modalité observée ; 7 points pour deux modalités observée ; 10 pour les trois observées

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

RÉPUBLIQUE DU BÉNIN

DIRECTION DÉPARTEMENTALE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ATLANTIQUE

Route de l'aéroport
10 BP 250 Cotonou
: (229) 21 32 38 43 ; Fax : 21 32 41 88
Web : www.enseignementsecondaire.gouv.bj
Immeuble Thomas AMADJI, Allada-Qtier GBEGAMEY, environ 300m en face de la pharmacie BETHESDA, non loin du centre marial. : ....
: (229) .... ; Mail: ddestfp.atl@gmail.com

EXAMEN BLANC DU BAC, *SESSION DE MARS 2024.*

CODE : K40
COEF :
DUREE: 04 HEURES

__Contexte__ : Le nouveau jardin public de TOKO

La ville de TOKO a récemment inauguré un nouveau jardin public, suscitant l'admiration de ses habitants. Des détails techniques présentés ci-dessous ont été divulgués, notamment les dimensions des paillottes, le coût total du projet, ainsi que des informations sur la plantation de fleurs :

- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$, le plan du sol a pour repère $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$,
- Il sera érigé deux grandes paillottes qui pourront abriter des fêtes ou servir d'espace de divertissement. Dans le plan du sol, les bases des paillottes sont des rectangles. La base de l'une des paillottes P_1 a pour dimensions $L = \frac{\sqrt{26}}{2} \times |z_1|\, mètre$ et $l = 5\sqrt{2} \times |z_2| mètre$ où z_1 et z_2 sont les solutions du système d'inconnue le nombre complexe z tel que : $(S): \begin{cases} \left|\frac{z-2}{z-4i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left|\frac{z-1}{z-3}\right| = 1 \end{cases}$ avec $Im(z_1) < Im(z_2)$. La base de la paillotte P_2 est l'image de celle de P_1 par une application H de l'espace dans lui-même.
- Le coût global de ce jardin est $N = 1000 \times PGCD(a\,;\ b) FCFA$ avec $a = 2002^3 + 2 \times 2002^2 - 3 \times 2002$ et $b = 2 \times 2002^2 - 2002 - 1$.
- Plusieurs variétés de fleurs sont plantées dans ce jardin. Dans le plan du sol muni du repère $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, chaque variété de fleur est plantée sur un domaine (D_n) limitée par des courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$ où les courbes (C_n) sont des representations graphiques des fonctions f_n et n est un entier naturel non nul.

Des élèves de terminale C, curieux de reproduire une partie du plan du jardin, cherchent à déterminer les aires des zones de plantation de fleurs, le nombre de variétés de fleurs présentes, ainsi que les dimensions des paillottes.

Tâche : Tu vas répondre aux préoccupations des élèves en résolvant les trois problèmes ci-dessous.

Problème 1

1- Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, montre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2- On pose $\alpha = n + 3$ et $\beta = 2n + 1$ et on note δ le $PGCD$ de α et β.

a- Détermine les valeurs possibles de δ.

b- Démontre que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

3- On considère les nombres $d = PGCD[\, n(n+3)\, , (2n+1)]$,

$a_n = n^3 + 2n^2 - 3n$; $b_n = 2n^2 - n - 1$ et $\Delta = PGCD(a_n\, , b_n)$

a- Montre que a_n et b_n sont divisibles par $(n-1)$.

b- Montre que $\delta = d$,

c- Déduis-en Δ en fonction de n et suivant les valeurs de n.

4- Détermine le coût global de ce jardin.

Problème 2

Les élèves souhaitent comprendre l'application H qui modifie l'aménagement du jardin. Ils doivent déterminer les points invariants par cette application et caractériser le plan correspondant, ainsi que comprendre la nature de cette application en fonction de paramètres spécifiques.

L'application H de l'espace dans lui-même est définie par $H = s_{-\frac{1}{2}} \circ h$ où h est l'application de l'espace dans lui-même qui au point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u}$ avec $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$; $A(0, 3, 2)$ et $s_{-\frac{1}{2}}$ est l'une des applications s_k de l'espace dans lui-même définie par :

$s_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{kMA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, k étant un paramètre réel et A, B et C sont des points non alignés de l'espace.

5) a- Démontre que l'ensemble des points invariants par h est un plan (P) que tu caractériseras.

b) On suppose que M et M'sont distincts et I est le milieu de [MM']. Démontre que $\overrightarrow{MI} \cdot \vec{u} = -\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$.

c) Démontre que h est la réflexion de plan (P).

6) Détermine suivant les valeurs de k, la nature et les élements caracteristiques de s_k.

7) a- Démontre que $\left|\frac{z-1}{z-3}\right| = 1$ si et seulement si $z + \bar{z} = 4$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

b- Résous alors dans $\mathbb{C}$, le système (S).

c- Détermine z_1 et z_2.

d- Détermine les dimensions des bases de chacune des paillottes P_1 et P_2.

Problème 3

Les étudiants cherchent à étudier les courbes représentatives des fonctions dans le jardin pour comprendre les variations de la plantation de fleurs. Ils doivent résoudre des inéquations, étudier les variations des fonctions, tracer les courbes et déterminer les aires des différentes zones de plantation

Dans le plan du jardin supposé plat et muni du même repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les courbes (C_n) sont des representations graphiques des fonctions f_n et n est un entier naturel non nul, définies par : $f_n(x) = \frac{1+n\ln(x)}{x^2}$.

9- Résous dans $]0\,;\,+\infty[$, l'inéquation : $n - 2 - 2n\ln(x) > 0$ d'inconnue x.

10-Etudie les variations de f_n.

11-a) Etudie les branches infinies des courbes (C_n),

b) Etudie la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}),

c) Trace (C_2), (C_3) et (C_4) et hachure le domaine (D_2). (Tu prendras 2cm pour unité de longueur)

12- Calcule l'aire $\mathcal{A}$ de chacun des domaines (D_n).

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE,
TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DU BENIN

Route de l'aéroport
: 10BP 250 Cotonou
☎: (229) 21 32 38 43 ; Fax : 21 32 41 88
web: www.enseignementsecondaire.gouv.bj

DIRECTION DEPARTEMENTALE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ATLANTIQUE

Immeuble Thomas AMADJI, Allada-Qtier GBEGAMEY, environ 300m en face de la pharmacie BETHESDA, non loin du centre marial. : ……..
☎: (229) …………….. ; Mail: ddestfp.atl@gmail.com

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL

Année scolaire : 2023-2024
Niveau : BAC
Série/Code : C/T48
Durée : 4 heures

DISCIPLINE : Mathématiques

CLE & GRILLE DE CORRECTION

	Pondérations	***1Ca = 0,5pts***	***1Cm =1pts***	***1Co = 0,5pts***
N°	**Eléments de réponses**	***Capacité « Analyser »*** ***Ca*** ***L'élève…..***	***Capacité*** ***« Mathématiser »*** ***Cm*** ***L'élève…..***	***Capacité*** ***« Opérer »*** ***Co*** ***L'élève…..***
	Problème 1			
1-	**Montrons que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.** $PGCD(2n + 1, n) = PGCD(2n + 1 - n, n)$ $= PGCD(n + 1, n) = PGCD(n + 1 - n, n)$ $= PGCD(1, n)=1$ Alors **$2n + 1$ et n sont premiers entre eux**	Identifie $2n + 1$ et n ***I*** **0,5pt**	Utilise l'algorithme d'Euclide ou une propriété convenable ***I*** **1pt**	Trouve $2n+1$ et n sont premiers entre eux ***I I*** **1pts**
2- a)	**Calculons $2\alpha - \beta$** $2\alpha - \beta = 2(n+3) - (2n+1)=5$ $\boldsymbol{2\alpha - \beta = 5}$ **Déduisons les valeurs possibles de δ.** On a $2\alpha - \beta = 5$	Identifie α et β		Trouve $\boldsymbol{2\alpha - \beta = 5}$ ***I***

	Donc tout diviseur de α et d β divise 5 Alors δ divise 5. Or $\delta \in \mathbb{N}^*$ D'où $\boldsymbol{\delta} \in \{\mathbf{1}\,;\mathbf{5}\}$	$ul = 2dm$ ***I I*** **1pts**	Utilise la propriété ***I*** **1pt**	$\boldsymbol{\delta} \in \{\mathbf{1}\,;\mathbf{5}\}$ ***I I*** **1,5pts**
b)	**<u>Démontrons que $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont multiples de 5 si et seulement si $(\boldsymbol{n-2})$ est multiple de 5.</u>** • Supposons que α et β sont multiples de 5 α et β sont multiples de 5 $\Longrightarrow \begin{cases} n+3 \equiv 0[5] \\ 2n+1 \equiv 0[5] \end{cases}$ $\Longrightarrow 2n+1-(n+3) \equiv 0[5]$ $\Longrightarrow n-2 \equiv 0[5]$ Alors $n-2$ est un multiple de 5 $(\mathbf{1})$ • Supposons que $n-2$ est un multiple de 5 $n-2$ est un multiple de 5 $\Longrightarrow n-2 \equiv 0[5]$ $n-2 \equiv 0[5] \Longrightarrow n-2+5 \equiv 0[5] \Longrightarrow n+3 \equiv 0[5] \Longrightarrow \alpha \equiv 0[5]$ $n-2 \equiv 0[5] \Longrightarrow 2n-4 \equiv 0[5]$ $\Longrightarrow 2n-4+5 \equiv 0[5] \Longrightarrow 2n+1 \equiv 0[5]$ $\Longrightarrow \beta \equiv 0[5]$ Alors α et β sont multiples de 5 $(\mathbf{2})$ **De $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ on a : $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont multiples de 5 si et seulement si $(\boldsymbol{n-2})$ est multiple de 5**	Identifie α et β ***I I*** **1pt**	Ecris α et β sont multiples de 5 $\Longrightarrow \begin{cases} n+3 \equiv 0[5] \\ 2n+1 \equiv 0[5] \end{cases}$ Utilise les propriétés de congruence ***I*** $n-2$ est un multiple de 5 $\Longrightarrow n-2 \equiv 0[5]$ Utilise les propriétés de congruence ***I*** **2pts**	Trouve α et β sont multiples de 5 $\Longrightarrow$ $n-2$ est un multiple de 5 ***I*** $n-2$ est un multiple de 5 $\Longrightarrow$ α et β sont multiples de 5 ***I*** Conclut ***I*** **1,5pts**
3- a)	**<u>Montrons que $\boldsymbol{a_n}$ et $\boldsymbol{b_n}$ sont divisibles par $(\boldsymbol{n-1})$</u>** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = n^3 + 2n^2 - 3n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = n(n-1)(n+3)$ et $n-1 \neq 0$ Alors a_n est divisible par $n-1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = 2n^2 - n - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = (n-1)(2n+1)$ et $n-1 \neq 0$ Alors b_n est divisible par $n-1$ **D'où que $\boldsymbol{a_n}$ et $\boldsymbol{b_n}$ sont divisibles par $(\boldsymbol{n-1})$.**	Identifie a_n et b_n ***I*** **0,5pts**	Met a_n et b_n Sous forme de produit de facteurs du premier degré ***I*** **1pt**	Trouve a_n est divisible par $n-1$ b_n est divisible par $n-1$ ***I I*** **1pt**

b)	**<u>Montrons que $\boldsymbol{\delta = d}$</u>** On a $\delta = PGCD(\alpha,\beta)$ $\delta = PGCD(\alpha,\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \delta \ \ divise \ \alpha \\ \delta \ \ divise \ \ \beta \end{cases}$ $\Longrightarrow \begin{cases} \delta \ \ divise \ n+3 \\ \delta \ \ divise \ \ 2n+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta \ \ divise \ n(n+3) \\ \delta \ \ divise \ \ 2n+1 \end{cases}$ $\Longrightarrow \ \delta \ \ divise \ PGCD[\,n(n+3)\,,(2n+1)]$ $\Longrightarrow \ \delta \ \ divise \ \ d$ $(\mathbf{1})$ $d = PGCD[\,n(n+3)\,,(2n+1)]$ $\Longrightarrow \begin{cases} d \ \ divise \ n(n+3) \\ d \ \ divise \ \ 2n+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d \ \ divise \ n+3 \\ d \ \ divise \ \ 2n+1 \end{cases}$ car $PGCD(2n+1\,,n) = 1$ $\Longrightarrow \ d \ \ divise \ PGCD(\alpha,\beta)$ $\Longrightarrow \ d \ \ divise \ \delta$ $(\mathbf{2})$ Aussi $d \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$ $(\mathbf{3})$ **De $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{1})$ on a: $\boldsymbol{\delta = d}$**	Identifie $\delta = PGCD(\alpha,\beta)$ $d = PGCD[\,n(n+3)\,,(2n+1)]$ $PGCD(2n+1\,,n) = 1$ $d \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$ ***I I I I*** **2pts**	Utilise une bonne démarche ***I*** **1pt**	Trouve $\delta \ \ divise \ \ d$ ***I*** $d \ \ divise \ \delta$ ***I*** Conclut : $\delta = d$ ***I I*** **2pts**
c)	**<u>Déduisons Δ en fonction de $\boldsymbol{n}$ et suivant les valeurs de $\boldsymbol{n}$.</u>** $\Delta = PGCD(a_n\,,b_n)$ $\Delta = PGCD(n(n-1)(n+3) \ \ ,(n-1)(2n+1))$ $\Delta = (n-1)PGCD(n(n+3) \ \ ,(2n+1))$ $\Delta = (n-1)d$ car $d = PGCD[\,n(n+3)\,,(2n+1)]$ $\Delta = (n-1)\delta$ car $\delta = d$ Or $\delta \in \{1\,;5\}$ et α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5 Donc • Pour $n-2 = 5k, \ k \in \mathbb{N}^*$ On $\delta = 5$ et $\Delta = \mathbf{5}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ • Pour $n-2 \neq 5k, \ k \in \mathbb{N}^*$ On $\delta = 1$ et $\Delta = (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$	Identifie $\Delta = PGCD(a_n\,,b_n)$ $\delta = d$ et $\delta \in \{1\,;5\}$ ***I I*** **1pts**	Utilise $PGCD(ka \ \,,kb) = k\,PGCD(a\,,b)$ ***I*** **1pt**	Trouve $\Delta = (n-1)\delta$ ***I*** Pour $n = 5k+2, \ k \in \mathbb{N}^*$ On $\delta = 5$ et $\Delta = 5(n-1)$ ***I*** Pour $n \neq 5k+2, \ k \in \mathbb{N}^*$ On $\delta = 1$ et $\Delta = (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ ***I*** **1,5 pts**

4-	**Déterminons le coût global de ce jardin.** Le coût global de ce jardin est $N = 1000 \times PGCD(a\,;\ b) FCFA$ avec $a = 2002^3 + 2 \times 2002^2 - 3 \times 2002$ et $b = 2 \times 2002^2 - 2002 - 1$ On constate que $a = a_{2022},\ b = b_{2022}$ et $2002 - 2 = 5(400)$ Donc $PGCD(a\,;\ b) = 5(2002 - 1)$ $PGCD(a\,;\ b) = 10.005$ D'où $N = 1000 \times 10.005 FCFA$ $\boldsymbol{N = 10.005.000\ FCFA}$	Identifie $N = 1000 \times PGCD(a\,;\ b) FCFA$ $a = a_{2022},\ b = b_{2022}$ ***I I*** **1pt**	Constate $2002 - 2 = 5(400)$ ***I*** **1pt**	Trouve $PGCD(a\,;\ b) = 10.005$ ***I*** $N = 10.005.000\ FCFA$ ***I I*** **1,5pt**
	Total Problème 1	**14**	**8**	**21**
	Problème 2			
5- a)	**Démontrons que l'ensemble des points invariants par h est un plan (P) que nous caractériserons.** Soit M un point de l'espace $h(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u}$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$ **Alors l'ensemble des points invariants par *h* est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.**	Identifie L'application h ***I*** **0,5pts**	Utilise la définition de point invariant ***I*** **1pt**	Trouve L'ensemble (P) ***I I*** **1pt**
b)	**Démontrons que $\overrightarrow{MI} \cdot \vec{u} = -\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$.** Soit M et M' deux points distincts de l'espace $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u}$ $\Leftrightarrow -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'} = -(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = -(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\vec{u}$	Identifie L'application h I milieu de [MM'] Et $\vec{u} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$	Utilise c $\vec{u} \cdot \vec{u} = \Vert\vec{u}\Vert^2$	Trouve $\vec{u} \cdot \vec{u} = 2$ ***I***

	$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} = -\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}\right)\vec{\mathrm{u}}$ car I est le milieu de [MM'] $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = -\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}\right)\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{u}}$ $\vec{\mathrm{u}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = \Vert\vec{\mathrm{u}}\Vert^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2$ $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = -2\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}\right)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = -\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}$	***I*** **0,5pts**	***I*** **1pt**	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = -\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}$ ***I I*** **1,5pts**
c)	**<u>Démontrons que *h* est la réflexion de plan (P).</u>** L'ensemble des points invariants par h est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{\mathrm{u}}$. $(\mathbf{1})$ Soit M et M' deux points distincts de l'espace et I est le milieu de [MM'] $h(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = -\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}$ $\Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = 0$ $\Longrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \cdot \vec{\mathrm{u}} = 0$ $\Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = 0$ $\Longrightarrow I \in (P) \qquad (\mathbf{2})$ $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}\right)\vec{\mathrm{u}}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \alpha\vec{\mathrm{u}}$ avec $\alpha = \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}\right)$ Alors $(MM') \perp (P) \qquad (\mathbf{3})$ **De $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{2})$ et $(\mathbf{3})$, *h* est la réflexion de plan $(\boldsymbol{P})$**	Identifie L'application h l'ensemble des points invariants par h est un plan (P) $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{\mathrm{u}} = -\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}$ ***I I I*** **1,5pts**	Ecrit $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \alpha\vec{\mathrm{u}}$ avec $\alpha = \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{\mathrm{u}}\right)$ ***I*** **1pt**	Trouve $I \in (P)$ ***I*** $(MM') \perp (P)$ ***I*** Conclut ***I I*** **2pts**
6-	**<u>Déterminons suivant les valeurs de *k*, la nature et les élements caracteristiques de s_k</u>** Soit M et M' deux points de l'espace $s_k(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ Soit φ la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points pondérés $(A\,; k)$, $(B\,; 1)$ et $(C\,; 1)$	Identifie l^' application s_k la fonction vectorielle de Leibniz φ associée	Ecrit **Pour $\boldsymbol{k = -2}$** φ est une application constante	Trouve **Pour $\boldsymbol{k = -2}$** s_{-2} est la translition de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ***I I***

	$k+1+1=0 \Leftrightarrow\ k=-2$ • **Pour $\boldsymbol{k=-2}$** φ est une application constante Pour tout point M de l'espace, $\varphi(M)=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ $\varphi(M)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ $s_k(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\varphi(M)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ Alors s_{-2} **est la translition de vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$** • **Pour $\boldsymbol{k\neq -2}$** $k+1+1\neq 0$ Donc il existe un unique point G_k barycentre des points pondérés $(A\,;k),\ (B\,;1)\ et\ (C\,;1)$ Pour tout point M de l'espace, $\varphi(M)=(k+2)\overrightarrow{MG_k}$ $s_k(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\varphi(M)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=(k+2)\overrightarrow{MG_k}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MG_k}+\overrightarrow{G_kM'}=(k+2)\overrightarrow{MG_k}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'}=(-k-1)\overrightarrow{G_kM}$ **Alors $\boldsymbol{s_k}$ est l'homothétie de centre $\boldsymbol{G_k}$ et de rapport $\boldsymbol{-k-1}$**	aux points pondérés $(A\,;k),\ (B\,;1)\ et\ (C\,;1)$ ***I I*** **1pt**	**Pour $\boldsymbol{k\neq -2}$** il existe un unique point G_k barycentre des points pondérés $(A\,;k),\ (B\,;1)\ et\ (C\,;1)$ ***I I*** **2pts**	**Pour $\boldsymbol{k\neq -2}$** $s_k(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'}=(-k-1)\overrightarrow{MG_k}$ ***I I*** s_k est l'homothétie de centre G_k et de rapport $-k-1$ ***I I*** **3pts**	
7- a)	**<u>Démontrons que $\left\lvert\frac{z-1}{z-3}\right\rvert=1$ si et seulement si $z+\bar{z}=4$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.</u>** $\left\lvert\frac{z-1}{z-3}\right\rvert=1 \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq 3 \\ \lvert z-1\rvert=\lvert z-3\rvert \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z\neq 3 \\ \lvert z-1\rvert^2=\lvert z-3\rvert^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z\neq 3 \\ (z-1)(\bar{z}-1)=(z-3)(\bar{z}-3) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z\neq 3 \\ z\bar{z}-z-\bar{z}+1=z\bar{z}-3z-3\bar{z}+9 \end{cases}$	Identifie $\left\lvert\frac{z-1}{z-3}\right\rvert=1$ ***I*** **0,5pts**	Utilise $\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$ ***I*** **1pt**	Trouve $\left\lvert\frac{z-1}{z-3}\right\rvert=1$ si et seulement si $z+\bar{z}=4$ ***I I*** **1pt**	

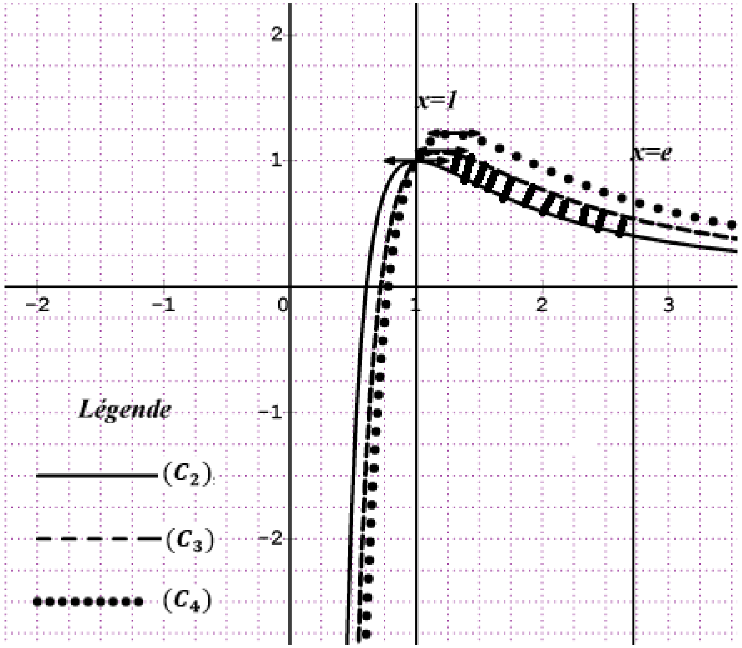
	$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 3 \\ z + \bar{z} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 4 \quad \text{car } 3 + \bar{3} \neq 4$ D'où $\left\lvert\frac{z-1}{z-3}\right\rvert = \mathbf{1}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{z + \bar{z} = 4}$				
b)	<u>**Résolvons alors dans $\mathbb{C}$, le système $(\boldsymbol{S})$**</u> $(S): \begin{cases} \left\lvert\dfrac{z-2}{z-4i}\right\rvert = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left\lvert\dfrac{z-1}{z-3}\right\rvert = 1 \end{cases}$ De la question précédente, on a : $\left\lvert\frac{z-1}{z-3}\right\rvert = \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{z + \bar{z} = 4}$ $\left\lvert\frac{z-2}{z-4i}\right\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 4i \\ \lvert z-2\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}\lvert z-4i\rvert \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 4i \\ \lvert z-2\rvert^2 = \frac{1}{2}\lvert z-4i\rvert^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 4i \\ (z-2)(\bar{z}-2) = (z-4i)(\bar{z}+4i) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 4i \\ z\bar{z} + (-4-4i)z + (-4+4i)\bar{z} + 8 = 0 \end{cases}$ Alors $\left\lvert\frac{z-2}{z-4i}\right\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{z\bar{z} + (-4-4i)z + (-4+4i)\bar{z} + 8 = 0}$ **Ainsi** $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 4 \\ z\bar{z} + (-4-4i)z + (-4+4i)\bar{z} + 8 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \bar{z} = 4 - z \\ z(4-z) + (-4-4i)z + (-4+4i)(4-z) + 8 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z} = 4 - z \\ -z^2 + (4-8i)z - 24 + 16i = 0 \end{cases}$ Soit Δ le discriminant de $-z^2 + (4-8i)z - 24 + 16i$ $\Delta = (4-8i)^2 - 4(-1)(-24+16i)$	Identifie $(S): \begin{cases} \left\lvert\dfrac{z-2}{z-4i}\right\rvert = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left\lvert\dfrac{z-1}{z-3}\right\rvert = 1 \end{cases}$ $\left\lvert\frac{z-1}{z-3}\right\rvert = 1 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 4$ ***I I*** **1pts**	Ecrit $\left\lvert\frac{z-2}{z-4i}\right\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} z \neq 4i \\ \lvert z-2\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}\lvert z-4i\rvert \end{cases}$ et Utilise $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$ Utilise Méthode de résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ ***I I*** **2pts**	Trouve $(S) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} z + \bar{z} = 4 \\ z\bar{z} + (-4-4i)z + (-4+4i)\bar{z} + 8 = \end{cases}$ ***I I*** $(S) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \bar{z} = 4 - z \\ -z^2 + (4-8i)z - 24 + 16i = 0 \end{cases}$ ***I*** $\Delta = -144 = (-12i)^2$ ***I*** $\boldsymbol{F = \{2 + 2i\,;2 - 10i\}}$ ***I I*** **3pts**	

	$\Delta = -144 = (-12i)^2$ $-z^2 + (4-8i)z - 24 + 16i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4+8i-12i}{-2}$ ou $z = \frac{-4+8i+12i}{-2} \Leftrightarrow z = 2+2i$ ou $z = 2-10i$ Soit F l'ensemble des solutions de (S) $\boldsymbol{F = \{2+2i\,;2-10i\}}$			
c)	**<u>Déterminons z_1 et z_2</u>** z_1 et z_2 sont les solutions du système (S) et $Im(z_1) < Im(z_2)$ Or $Im(2-10i) < Im(2+2i)$ Donc $\boldsymbol{z_1 = 2-10i}$ **et** $\boldsymbol{z_2 = 2+2i}$	Identifie z_1 et z_2 sont les solutions du système (S) et $Im(z_1) < Im(z_2)$ ***I*** **0,5pt**	Ecrit $Im(2-10i) < Im(2+2i)$ ***I*** **1pt**	Trouve $z_1 = 2-10i$ et $z_2 = 2+2i$ ***I I*** **1pt**
8-	**<u>Déterminons les dimensions des bases de chacune des paillottes P_1 et P_2.</u>** La base de la paillotte P_1 a pour dimensions $L = \frac{\sqrt{26}}{2} \times \lvert z_1 \rvert m$ et $l = 5\sqrt{2} \times \lvert z_2 \rvert m$ $\lvert z_1 \rvert = \sqrt{(2)^2 + (-10)^2} = 2\sqrt{26}$ $\lvert z_2 \rvert = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$ Alors $L = \frac{\sqrt{26}}{2} \times 2\sqrt{26}\, m$ et $l = 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}m$ $\boldsymbol{L = 26\, m}$ **et** $\boldsymbol{l = 20m}$ La base de la paillotte P_2 est l'image de celle de P_1 par $H = s_{-\frac{1}{2}} \circ h$ h est la réflexion de plan (P) donc elle conserve les distances	Identifie $L = \frac{\sqrt{26}}{2} \times \lvert z_1 \rvert m$ et $l = 5\sqrt{2} \times \lvert z_2 \rvert m$ $z_1 = 2-10i$ et $z_2 = 2+2i$ La base de la paillotte P_2 est l'image de celle de P_1 par $H = s_{-\frac{1}{2}} \circ h$ h est la réflexion de plan (P) et	Utilise $\lvert z \rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ ***I*** $L' = \left\lvert -\frac{1}{2} \right\rvert L$ et $l' = \left\lvert -\frac{1}{2} \right\rvert l$ ***I*** **2pts**	Trouve $L = 26\, m$ et $l = 20m$ ***I I*** $L' = 13m$ et $l' = 10m$ ***I I*** **2pt**

	$s_{-\frac{1}{2}}$ est l'homothétie de centre $G_{-\frac{1}{2}}$ et de rapport $-\frac{1}{2}$ donc elle multiplie les distances par $\left\|-\frac{1}{2}\right\|$ Soit L' *et* l' les dimensions de la base de P_2 $L' = \left\|-\frac{1}{2}\right\| L = \frac{26}{2}m = 13m$ et $l' = \left\|-\frac{1}{2}\right\| l = \frac{20}{2}m = 10m$ **Alors $\boldsymbol{L' = 13m}$ et $\boldsymbol{l' = 10m}$**	$s_{-\frac{1}{2}}$ est l'homothétie de centre G_k et de rapport $-\frac{1}{2}$ ***I I I I*** **2pts**			
Total Problème 2		**15**	**11**	**29**	
Problème 3					
9-	**<u>Résolvons dans $\left]0\,;+\infty\right[$, l'inéquation : $\boldsymbol{n-2-2nln(x)>0}$ d'inconnue $\boldsymbol{x}$</u>** $n-2-2nln(x)>0 \Leftrightarrow ln(x)<\frac{n-2}{2n}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<e^{\frac{n-2}{2n}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]0\,;\,e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$ Soit S_1 l'ensemble des solutions de cette inéquation $\boldsymbol{S_1 = \left]0\,;\,e^{\frac{n-2}{2n}}\right[}$	Identifie L'inéquation ***I*** **0,5pts**	Ecrit $ln(x)<\frac{n-2}{2n}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<e^{\frac{n-2}{2n}} \end{cases}$ ***I*** **1pt**	Trouve $\boldsymbol{S_1 = \left]0\,;\,e^{\frac{n-2}{2n}}\right[}$ ***I I*** **1pt**	
10-	**<u>Etudions les variations de $\boldsymbol{f_n}$.</u>** $f_n(x) = \frac{1+nln(x)}{x^2}$ Soit D_n le domaine de définition de f_n $D_n = \{x \in IR/x \neq 0 \ \ et \ \ x>0\}$ $D_n =]\mathbf{0}\,,+\infty[$ Les fonctions $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto x^2$ sont continues et dérivables en tout point de $]0\,,+\infty[$. Donc la fonction $x \longmapsto 1+n\ln(x)$ est continue dérivable en tout point de $]0\,,+\infty[$ Aussi $\forall x \in]0\,,+\infty[$, $x^2 \neq 0$. Alors la fonction f_n est continue dérivable en tout point de $]0\,,+\infty[$	Identifie $f_n(x)$ L'ensemble des solutions de $n-2-2nln(x)>0$	Ecrit $D_n = \{x \in IR/x \neq 0 \ \ et \ \ x>0\}$ ***I*** Utilise les formules de dérivation de quotient de fonctions et de la fonction ln ***I***	Trouve $D_n =]\mathbf{0}\,,+\infty[$ ***I*** f_n est continue dérivable sur $]0\,,+\infty[$ ***I*** $f_n{}'(x) = \frac{n-2-2nln(x)}{x^3}$ ***I I*** Le signe de $f_n{}'(x)$	

	$\forall x \in]0,+\infty[,\quad {f_n}'(x) = \frac{\left(\frac{n}{x}\right)(x^2-2x(1+nln(x))}{x^4}$ $\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0},+\infty[,\quad {f_n}'(x) = \frac{n-2-2nln(x)}{x^3}$ **Alors** $\forall x \in]0,+\infty[;\ x^3 > 0$ Donc le signe de ${f_n}'(x)$ est celui de $n-2-2nln(x)$ $n-2-2nln(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0\ ;\ e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$ d'après 9) $n-2-2nln(x) = 0 \Leftrightarrow ln(x) = \frac{n-2}{2n}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = e^{\frac{n-2}{2n}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \boldsymbol{e^{\frac{n-2}{2n}}}$ Alors on a $\begin{cases} \forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}\,;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[;\ {f_n}'(x) > \mathbf{0} \\ \forall \boldsymbol{x} \in \left]e^{\frac{n-2}{2n}},+\infty\right[;\ {f_n}'(x) < \mathbf{0} \\ {f_n}'\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = 0 \end{cases}$ Donc la fonction f_n est strictement croissante sur $\left]\mathbf{0}\,;e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}},+\infty\right[$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f_n(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1+nln(x)}{x^2}$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \boldsymbol{f_n(x)} = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \big(ln(x)\big) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+nln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + n\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f_n(x)} = \mathbf{0}}$	***I I*** **1pt**	$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \big(ln(x)\big) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \end{cases}$ ***I*** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 0 \end{cases}$ ***I***	***I I*** Donne le sens de variation de f_n ***I*** $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \boldsymbol{f_n(x)} = -\infty}$ ***I*** $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f_n(x)} = \mathbf{0}}$ ***I***

	car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=0 \end{cases}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & e^{\frac{n-2}{2n}} & & +\infty \\ \hline f'_n(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f_n(x) & 0 & \nearrow & f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) & \searrow & -\infty \end{array}$		Réalise la forme du TV ***I*** **5pts**	Trouve le TV ***I I*** **5,5pts**
11- a)	**<u>Etudions les branches infinies des courbes</u> $(\boldsymbol{C_n})$** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f_n(x)=-\infty$ **Alors la droite d'équation $\boldsymbol{x=0}$ est une asymptote à** (C_n). $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ **Alors la droite d'équation $\boldsymbol{y=0}$ est une asymptote à** (C_n) au voisinage de $+\infty$	Identifie $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f_n(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ ***I I*** **1pt**		Trouve la droite d'équation $x=0$ est une asymptote à (C_n) ***I I*** la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à (C_n) au voisinage de $+\infty$ ***I I*** **2pts**
b)	**<u>Etudions la position relative des courbes</u> $(\boldsymbol{C_n})$ <u>et</u> $(\boldsymbol{C_{n+1}})$** $f_n(x)=\frac{1+nln(x)}{x^2}$ et $f_{n+1}(x)=\frac{1+(n+1)ln(x)}{x^2}$ $\forall x\in\,]0\,,+\infty[;\ f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{1+(n+1)\ln(x)}{x^2}-\frac{1+nln(x)}{x^2}$ $\forall x\in\,]0\,,+\infty[;\ f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{ln(x)}{x^2}$	Identifie $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ ***I I*** **1pt**	Calcule $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ Ecrit ou utilise $\begin{cases} \forall \boldsymbol{x}\in\,]\boldsymbol{0}\,;1[;\ ln(x)<\boldsymbol{0} \\ \forall \boldsymbol{x}\in\,]1\,,+\infty[;\ \ln(x)>\boldsymbol{0} \\ \ln(1)=0 \end{cases}$ ***I I***	Trouve $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$ ***I*** Le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ Suivant les valeurs de x ***I***

	$\forall x \in]0\,,+\infty[;\ x^2 > 0$ Donc le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est celui de $\ln(x)$ Or $\begin{cases} \forall \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0}\,;1[;\ \ ln(x) < \boldsymbol{0} \\ \forall \boldsymbol{x} \in]1\,,+\infty[;\ \ln(x) > \boldsymbol{0} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$ **Donc** $\begin{cases} \forall \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0}\,;1[;\ \ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ < \boldsymbol{0} \\ \forall \boldsymbol{x} \in]1\,,+\infty[;\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ > \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{pour\ x = 1},\ \ f_{n+1}(x) - f_n(x) \ = 0 \end{cases}$ **D'où** **Sur** $]\boldsymbol{0}\,;1[$**,** (C_{n+1}) est en dessous de (C_n), **Sur**$]1\,,+\infty[$**,** (C_{n+1}) est au-dessus de (C_n), Pour $x = 1$, $C_{n+1})$ et (C_n) sont sésonte		**2pts**	La position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) ***I*** **1,5pts**
c)	**Traçons $(\boldsymbol{C_2})$, $(\boldsymbol{C_3})$ et $(\boldsymbol{C_4})$ et hachurons le domaine $(\boldsymbol{D_2})$.** 	Identifie le tableau de variation des fonctions f_2, f_3 et f_4 ***I I I*** **1,5pts**	Trace le repère Trace les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ ***I I*** **2pts**	Trace Les courbes (C_2), (C_3) et (C_4) ***I I I I I I*** Hachure le domaine (D_2) ***I*** **3,5pt**

12-	Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de chacun des domaines (D_n). $\mathcal{A} = \left(\int_1^e \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right) dx\right) ua$ Or $\forall x \in]0\,,e[;\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{ln(x)}{x^2}$ ainsi $\mathcal{A} = \left(\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2} dx\right) ua$ Posons $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ On a : $u'(x) = \frac{1}{x}$ et on peut prendre $v(x) = -\frac{1}{x}$ $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx$ $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$ $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \left(-\frac{1}{e} - 1\right)$ $\int_1^e \frac{ln(x)}{x^2} dx = 1$ $\boldsymbol{A = 1ua}$	Identifie (D_n) ***I*** **0,5pts**	Ecrit Utilise le théorème de l'intégration par partie ***I*** **1pt**	Trouve $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{ln(x)}{x^2}$ $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx =$ $\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx$ $\boldsymbol{A = 1ua}$ ***I I I*** **1,5pt**
Total Problème 3		**11**	**11**	**30**
Récapitulatif		**40**	**30**	**80**

Recommandations

-Lire attentivement la production de chaque élève

Soit N la note sur 90 obtenue par l'apprenant par rapport à l'ensemble des trois critères minimaux, et p la note de perfectionnement (à attribuer sur 10) :

- **PREMIER CAS** : Si $N < 40, alors\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$;
- **DEUXIEME CAS** : $Si\ 40 \leq N < 60, alors\ p \in \{0,\ 2,\ 4,\ 5\}$;

REPARTITION DES 5 POINTS

- ✓ **Aucune modalité** du deuxième indicateur de perfectionnement observée donne droit à **0 points** ;
- ✓ **Une seule modalité** du deuxième indicateur de perfectionnement observée donne droit à **2 points** ;
- ✓ **Deux modalités** du deuxième indicateur de perfectionnement observées donnent droit à **4 points** ;
- ✓ **Les trois modalités** du deuxième indicateur de perfectionnement observées donnent droit à **5 points**.

- **TROISIEME CAS** : Si $N \geq 60, alors\ p \in \{0, 4, 7, 10\}$.

REPARTITION DES 10 POINTS

- ✓ **Aucune modalité** du deuxième indicateur de perfectionnement observée donne droit à **0 points** ;
- ✓ **Une seule modalité** du deuxième indicateur de perfectionnement observée donne droit à **4 points** ;
- ✓ **Deux modalités** du deuxième indicateur de perfectionnement observées donnent droit à **7 points** ;
- ✓ **Les trois modalités** du deuxième indicateur de perfectionnement observées donnent droit à **10 points**.

☐ Ainsi pour le deuxième et le troisième cas, l'enseignant appréciera la copie de l'apprenant en tenant compte des aspects (lisibilité de la copie, propreté de la copie, originalité de la production) pour attribuer la valeur de p.

NB : Dans l'application de cette disposition, le correcteur doit mettre la note de perfectionnement en haut de la copie, à côté de la note sur 90 et déduire la note finale sur 100 puis sur 20.

Baccalauréat Blanc Départemental / Session d'avril 2024

Épreuve : Mathématiques   Durée : 4 heures   Séries : C   Coefficients : 06

Contexte : Projet de construction d'une ferme moderne.

L'opérateur économique, Abou désire mettre en place un verger d'arbres fruitiers dans sa ferme située dans la commune de Dounia. Le nombre a pieds d'orangers et celui b pieds de manguiers vérifient le système :

$$(S)\ \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3PPCM(a;b) = ab \\ b > 7 \end{cases}$$

Les deux vergers sont séparés par une allées dont l'aire A mesure en unité d'aire:

$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} 24\pi cos^3(x) sin2x\, dx \right|$. On munit le plan de la ferme d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Des robinets d'alimentation en eau sont installés en des points du verger dont les affixes sont les solutions de l'équation (E): $z^3 + 2i\bar{z} = 0$. L'opérateur économique, a aussi développé dans ce champ l'élevage de la volaille et est à la recherche d'un point stratégique Ω où il placera une caméra de bonne résolution afin de suivre tout ce passe dans champ depuis sa maison.

Majoie, la fille de Abou, élève en terminale scientifique, a eu accès à ces données et se demande comment obtenir les coordonnées de Ω, la mise en place des différents équipements du verger en construction et la détermination du volume du réservoir d'eau de la volaille.

Tâche : Tu es invité à trouver des solutions aux préoccupations de Majoie en résolvant les problèmes suivants.

Problème 1 :

1) **a**- Prouve que le $PGCG(a, b) = 3$.

   b- Détermine le nombre de manguiers et d'orangers dans le verger.

2) **a**-Démontre que pour tout nombre réel x, $cos^3(x) sin2x = \frac{1}{8}\sin 5x + \frac{3}{8}\sin 3x + \frac{1}{4} sinx$

b- Calcule l'aire A.

3) **a**- Démontre que z est solution de (E) si $z = 0$ ou : $|z| = \sqrt{2}$.

b- Déduis-en que z est solution de (E) si et seulement $si\ z = 0\ ou\ si\ z$ est une racine quatrième de (-4i)

c- Résous alors l'équation (E).

Problème 2 :

Pour la sécurité du lieu, il a été prévu la construction d'une cabine ayant la forme d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête $\sqrt{2}$ posé sur la face $EFGH$ dans l'espace orienté. Des lampes d'éclairage solaire sont installées sur l'ensemble (T) des points M de l'espace tels : $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 - 2MD^2 = -4$. On désigne par I le centre de la face $ABCD$ et S le point défini par $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB}$. Le puits à grand diamètre du verger des manguiers est l'image de celui des orangers par une transformation φ, qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que : $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{IM}$.

4) **a**- Démontre que le point I est le barycentre des points pondérés $(A; 1), (B; -2), (C; 1)$ et $(D; -2)$.

b- Détermine l'ensemble (T) .

c- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(IA)} \circ S_{(IB)}$. où $S_{(IA)}$ et $S_{(IB)}$ sont des demi-tours d'axes respectifs (IA) et (IB).

d- Détermine l'image de (T) par $S_{(IA)} \circ S_{(IB)}$.

5) Démontre que le quadruplet $(A, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IA})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

6) **a**- Démontre que la transformation φ est une translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}$.

b- Détermine une équation cartésienne de l'image du plan (IAB) par φ.

7) Une plaque d'indication fut plantée dans le champ et est assimilable à une portion du plan (P) d'équation $6x - 8y + 7z - 57 = 0$ dans le repère $(A, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IA})$.

a- Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $6u + 7v = 57$.

b- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de (P) et du plan de repère $(A;\ \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})$.

c- Démontre qu'il existe un seul point Ω de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels et qui appartient au plan de repère $\left(A;\ \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}\right)$. Détermine alors les coordonnées de Ω.

Problème 3 :

L'opérateur économique Abou, a construit un réservoir d'eau pour la volaille en se servant de la pierre locale. La contenance de ce réceptacle est approximativement égale au volume du solide obtenu par la rotation de la courbe (C) de la fonction numérique f d'une variable réelle définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}\,.e^{-x}$ autour de l'axe $(O;\ \vec{\imath})$ du repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

8) **a**- Détermine l'ensemble de définition de D de f.

b- Étudie la continuité de f en 0.

c- Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

9) **a**- Étudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

b- Étudie la dérivabilité de f sur $]0; +\infty[$ puis démontre que pour tout x élément de $]0; +\infty[$ $f'(x) = (\frac{1-3x}{3x})f(x)$.

c-Achève l'étude des variations de f.

10) Construis la courbe (C). Unité graphique 3 cm.

11) **a**- Démontre que pour tout x élément de $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

b- Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\propto$ dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

c- Démontre que pour tout x élément de $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $|f(x) - \propto| \leq \frac{2}{3}\ |x - \propto|$.

12) En faisant une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ en cinq intervalles de même longueur, calcule une valeur approchée du volume V du solide obtenu par rotation d'une portion de la courbe(C) sur $[0, 1]$ autour de l'axe des abscisses par la méthode des trapèzes à 10^{-2} près. (Prends $\pi \approx 3{,}14$).

Fin.

Bonne composition.

Corrigé type de l'épreuve de mathématiques (C) de l'examen blanc départemental du BAC / Session d'avril 2024

N°question	Eléments de réponses	Capacité « Analyser » **1CA** $\longrightarrow$ $\mathbf{0,5\ pt}$ Le candidat : identifie :	Capacité « Mathématiser » **1 CM** $\longrightarrow$ $\mathbf{1\ pt}$ Le candidat : Utilise :	Capacité « Opérer » **1CO** $\longrightarrow$ $\mathbf{0,5\ pt}$ Le candidat : Trouve :	Total des points
	Problème 1 (18,5 pts)				

1) a –	**Prouvons que pgcd (a; b) = 3** On a $3ppcm\ (a\ ;\ b) =\ a.b$, Or on sait que $pgcd(a,b) \times ppcm(a;b) = ab$, donc $pgcd(a,b) \times ppcm(a;b) = 3ppcm\ (a\ ;\ b)$ $pgcd(a,b) \times ppcm(a;b) = 3ppcm\ (a\ ;\ b)$ *équivaut à* $pgcd(a,b) = 3$	$3ppcm\ (a\ ;\ b) =\ a.b$ **I**	$pgcd(a,b) \times ppcm(a;b) = ab$ **I**	$pgcd(a,b) = 3$ **I**	**2 pts**
b --	**Déterminons le nombre de manguiers et d'orangers** Résolvons le système (S) $(S): \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3ppcm(a;b) = ab \\ b > 7 \end{cases}$ On sait que $pgcd(a,b) = 3$ $pgcd(a,b) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3a' \\ b = 3b' \\ pgcd(a',b') = 1 \end{cases}$ $a^2 - b^2 = 405 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 405$ $\Leftrightarrow (a'-b')(a'+b') = 45$ On a : $\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases} \Leftrightarrow a' = 23\ et\ b' = 22$ Il en résulte que $a = 69$ et b=66. $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases} \Leftrightarrow a' = 7\ et\ b' = 2$ Il en résulte que $a = 21$ et b=6. Or $b > 7$ donc on a : $a = 69\ et\ b = 66$.	Le système (S) **I**	*Utilise une caractérisation du pgcd *Utilise une méthode pour obtenir les deux systèmes *Utilise une méthode pour résoudre les systèmes **I I**	$*(a'-b')(a'+b') = 45$ $* \begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$ et $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$ $* a' = 23\ et\ b' = 22$ $* a = 69$ et b=66. $* a' = 7\ et\ b' = 2$ $* a = 21$ et b=6 * **69 manguiers** et **66 orangers** **I I I I**	**4,5 pts**

	Il y a **69 manguiers** et **66 orangers** dans le verger.				
	2) a-**démontrons que pour tout nombre réel x** $\boldsymbol{cos^3xsin2x = \frac{1}{8}sin5x + \frac{3}{4}sin3x + \frac{1}{4}\sin x}$ $cos^3xsin2x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3 \times (\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i})$ $= \frac{1}{16i}(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+ \quad e^{-i3x})(e^{i2x}-e^{-i2x})$ $=\frac{1}{16i}\ [(e^{i5x}-e^{-i5x})+3(e^{i3x}-e^{-i3x})+2(e^{ix}-e^{-ix})]$ $=\frac{1}{8}sin5x + \frac{3}{4}sin3x + \frac{1}{4}\sin x$	I $cos^3xsin2x$	Utilise les formules d'Euler I	$\frac{1}{16i}\ [(e^{i5x}-e^{-i5x})+3(e^{i3x}-e^{-i3x})+2(e^{ix}-e^{-ix})]$ I	**2 pts**
	b- **Calculons l'aire A** A=$\left\|\int_0^{\frac{\pi}{3}} 24\pi cos^3xsin2x\ dx\right\| = \left\|\int_0^{\frac{\pi}{3}} 24\pi(\frac{1}{8}sin5x + \frac{3}{4}sin3x + \frac{1}{4}sin\ x)\ dx\right\| = 12\pi.$	A I	Utilise une formule appropriée pour obtenir les primitives I	A=12π I	**2pts**
	3) a- **Démontrons que z solution de (E)**⇒ $\boldsymbol{z = 0\ ou\ \|z\| = \sqrt{2}}$ z solution de (E)⇒ $z^3 + 2i\vec{z}$ =0 z solution de (E)⇒ $z^3 = -2i\vec{z}$	(E) I	Utilise une propriété sur le module I		**2 pts**

	$\Rightarrow\ \lvert z^3\rvert = \lvert -2i\vec{z}\rvert$ $\Rightarrow\ \lvert z\rvert(\lvert z\rvert^2 - 2) = 0$ $\Rightarrow\ \lvert z\rvert = 0\ ou\ \lvert z\rvert = \sqrt{2}$ $\Rightarrow z = 0$ ou $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ b- **déduisons que z solution de (E) ⇔ $z = 0$ ou z est une racine quatrième de (-4i)** z solution de (E) ⇔ $z^3 + 2i\vec{z}$ =0 $\Leftrightarrow \begin{cases} z^3 + 2i\vec{z} = 0 \\ z = 0\ \ ou\ \lvert z\rvert = \sqrt{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z^3 + 2i\vec{z} = 0 \\ z = 0\ \ ou\ \lvert z\rvert^2 = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z^3 + 2i\bar{z} = 0 \\ z = 0\ \ ou\ \bar{z} = \frac{2}{z} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z^3 + 2i\bar{z} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} z^3 + 2i\bar{z} = 0 \\ \bar{z} = \frac{2}{z} \end{cases}$ $\Leftrightarrow\ z = 0$ ou $z^4 = -4i$ c- **Résolvons l'équation (E).** z solution de (E) ⇔ $z = 0$ ou $z^4 = -4i$ résolvons $z^4 = -4i$ $z^4 = -4i \Leftrightarrow z^4 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $\Leftrightarrow z_k = \sqrt[4]{4}\, e^{i(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4})};\ \ k \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\Leftrightarrow\ z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})};\ \ k \in \{0, 1, 2, 3\}$ On a : $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}$; $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}$;	(E) I z solution de (E) ⇔ $z = 0$ ou $z^4 = -4i$ I	*Utilise une méthode appropriée pour un système équivalent à (E) *Utilise $z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$ I I Utilise la propriété sur les racines n[ieme] I Utilise la définition de barycentre	$z = 0$ ou $\lvert z\rvert = \sqrt{2}$ I * $\begin{cases} z^3 + 2i\bar{z} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} z^3 + 2i\bar{z} = 0 \\ \bar{z} = \frac{2}{z} \end{cases}$ * $z = 0$ ou $z^4 = -4i$ I I * $z = 0$, $z_0, z_1, z_2\ et\ z_3$ *L'ensemble S I I	 **3,5 pts** **2,5 pts**

	$z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{8}}$ Soit S l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ $S=\left\{0;\ \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}};\ \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}};\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{8}};\ \sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{8}}\right\}$		I		
	<u>Problème 2</u> **(32,5 pts)** **4)** a- **Démontrons que le point $\boldsymbol{I}$ est le barycentre des points pondérés $(\boldsymbol{A};\mathbf{1}),(\boldsymbol{B};-\mathbf{2}),(\boldsymbol{C};\mathbf{1})\ \ (\boldsymbol{D};-\mathbf{2})$.** On a : $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)-2\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}\right)=\vec{O}$ Donc le point I est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-2),(C;1)\ et\ (D;-2)$.	$*(A;1),$ $(B;-2),(C;1)$ $et\ (D;-2)$ I	Utilise la propriété de la fonction scalaire de Leibniz I	$*\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{O}$ * I barycentre I I	**2,5 pts**
	b- Déterminons l'ensemble $(\boldsymbol{T})$ $(T)=\{M\in\mathcal{E}/MA^2-2\,MB^2+MC^2-2\,MD^2=-4\}$ Soit M un point de l'espace M$\in(T)\Leftrightarrow\ -\mathbf{2}IM^2+IA^2-2IB^2+IC^2-2ID^2=-4$ $\Leftrightarrow\ 2IM^2=4-2IA^2$ Le triangle ADC étant rectangle en D, d'après la propriété de Pythagore on a $AC^2=AD^2+DC^2=4$ $IA^2=\frac{AC^2}{4}=1.$ M$\in(T)\ \Leftrightarrow IM=1$ $\Leftrightarrow$ M appartient à la sphère de centre I et de rayon 1. D'où (T) est la sphère de centre I et de rayon 1.	I (T)	Utilise la propriété de la composée de demi-tours d'axes perpendiculaires I Utilise la propriété appropriée pour déterminer l'image I	*M$\in(T)\Leftrightarrow$ $-\mathbf{2}IM^2+IA^2-2IB^2+IC^2-2ID^2=-4$ $*\ IA^2=IB^2=IC^2$=$ID^2=1$ *M$\in(T)\ \Leftrightarrow IM=1$ $*\ (T)$ est la sphère de centre I et de rayon 1 I I I I	**3,5 pts**

	c- Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}}$ on a : $(AC) \perp (BD)$ (diagonale du carré $ABCD$)) or $\{I\} = (AC) \cap (BD)$ $donc$ $(IA) \perp (IB)$. Il en résulte que $S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}$ est demi-tour d'axe (Δ) la perpendiculaire commune à (IA) et (IB) en I donc $(\Delta) = (IS)$.	$S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}$. I	Utilise la définition d'un repère orthonormé directe I	$S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)} = S_{(IS)}$ I	2 pts
	d- Déterminons l'image de $(\boldsymbol{T})$ par $\boldsymbol{S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}}$. (T) est la sphere de centre I et de rayon 1. On a $IA = 1$ donc $A\epsilon(T)$. On a aussi $S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}(A) = S_{(\Delta)}(A) = C$ et $S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}(I) = S_{(\Delta)}(I) = I$ donc l'image de (T) par $S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}$ est la sphère de centre I et de rayon $CI = AI = 1$ donc $S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}[(T)] = (T)$.	(T) et $S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}$ I I		$* A\epsilon(T)$, $S_{(\Delta)}(A) = C; S_{(\Delta)}(I) = I$ $S_{(IA)}{^\circ}S_{(IB)}[(T)] = (T)$. I I I	3,5 pts
	5) Démontrons que le quadruplet $(\boldsymbol{A};\ \overrightarrow{\boldsymbol{IB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{IS}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{IA}})$ est un repère orthonormé direct A est un point de l'espace, on a $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB}$ donc le triplet $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$ est une base directe par conséquent $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IA})$ est une base directe de l'espace. On a $IA = IB = \lVert\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB}\rVert = IS = 1$	$(\overrightarrow{A;IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$ I	*Utilise la propriété caractéristique d'une translation. * Propreté du produit vectoriel I	triplet $*(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$ est une base directe $* IA = IB = \lVert\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB}\rVert = IS = 1$ $* \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS} \perp \overrightarrow{IB}$ $* (A;\ \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS},\ \overrightarrow{IA})$ est un repère orthonormé directe. I I I	3 pts

	On a aussi : $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS} \perp \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IS} \perp \overrightarrow{IB}$. il résulte de tout ce qui précède que $(A;\ \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS},\ \overrightarrow{IA})$ est un repère orthonormé directe. **6) a- Démontrons que $\boldsymbol{\varphi}$ est une translation de vecteur $\boldsymbol{\vec{u} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}}$** Soit M un point de l'espace et M' son image par φ $\varphi(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{IM}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} - \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}$ Pour tout M élément de l'espace d'image M' son par φ , on a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}$ donc φ est la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}$. **b- Détermine une équation cartésienne de l'image du plan (IAB) par $\boldsymbol{\varphi}$.**	$\varphi, \vec{u} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}$ **I I** $(IAB), \varphi$	*Utilise la propriété appropriée pour déterminer l'expression analytique de φ. *Utilise la propriété appropriée pour déterminer l'image **I** *Utilise une méthode appropriée pour résoudre. *Utilise le théorème de Gauss **I** Utilise une méthode appropriée pour déterminer (P)⋂(IAB)	$* \varphi(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$. $* \varphi$ est la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}$. **I I** $*\varphi: \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 1 \\ z' = z \end{cases}$ $*(IAB): y = 0$ $M(x, y, z) \in (IAB)$ $\Leftrightarrow y' + 1 = 0$ *l'image de (IAB) par φ est le plan d'équation $y + 1 = 0$. **I I I**	**3 pts**

	On a : $\varphi = t_{\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}}$ et $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} \wedge (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = -\overrightarrow{IS}$. $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AB}\,(0,-1,0)$. Soit $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ tel que $\varphi(M) = M'$, on a : $\varphi : \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 1 \\ z' = z \end{cases}$ (IAB) a pour vecteur normal $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB}$ et on a $(IAB): y = 0$ Soit $M(x,y,z)$ un point de (IAB) et $M'(x',y',z')$ tel que $\varphi(M) = M'$, $\varphi(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 1 \\ z' = z \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' + 1 \\ z = z' \end{cases}$ $M(x,y,z) \in (IAB) \Leftrightarrow y' + 1 = 0$ D'où l'image de (IAB) par φ est le plan d'équation $y + 1 = 0$. **7) a- Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $6u + 7v = 57$.** On a : pgcd(6,7) =1 et 1=6(-1)+7(1) et 6(-57)+7(57)=57 $6u + 7v = 57 \Leftrightarrow \begin{cases} 6(u+57) = 7(-v+57) \\ 6 / 7(-v+57) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6(u+57) = 7(-v+57) \\ (-v+57) = 6k \quad, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (D'après le théorème de Gauss) $\Leftrightarrow (u,v) = (7k - 57, -6k + 57), k \in \mathbb{Z}$ Soit S_1 l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $S_1 = \{(7k - 57, -6k + 57), k \in \mathbb{Z}\}$	I I $6u + 7v = 57$ I $(P): 6x - 8y + 7z - 57 = 0$ et $(IAB): y = 0$	I Utilise une méthode appropriée pour déterminer les coordonnées de Ω. I	*Solution particulière : (-57, 57). *$S_1 = \{(7k - 57, -6k + 57), k \in \mathbb{Z}\}$ I I I I *$(P) \cap (IAB)$: $\begin{cases} x = \frac{-7}{6}t + \frac{57}{6} \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, (t \in IR)$. *P)∩(IAB) est la droite de repère (F ; $\vec{v}$) I I I I	**3,5 pts** **3,5 pts**

	b- Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de $(\boldsymbol{P})$ et (IAB) on a $(P) : 6x - 8y + 7z - 57 = 0$ et $(IAB) : y = 0$ $M(x,y,z) \in (P)\cap(IAB) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 8y + 7z - 57 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7}{6}t + \frac{57}{6} \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, (t \in IR)$ (P)⋂(IAB) est la droite passant par le point $F(\frac{57}{6}, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\ \left(\frac{-7}{6}, 0,1\right)$. **c- Démontrons qu'il existe un unique point Ω de $(\boldsymbol{P})\cap(\boldsymbol{IAB})$ et de coordonnées des entiers naturels.** Soit $M(x,y,z)$ un de l'espace avec (x,y,z) un triplet d'entiers relatifs. $M(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 8y + 7z - 57 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 7z = 57 \\ y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = 7k - 57 , y = 0 \ \ et \ z = -6k + 57;\ k \in \mathbb{Z}$ On sait que $0 \in IN$, on a :	I I $(P) : 6x - 8y + 7z - 57 = 0$ et $(IAB) : y = 0$ (x,y,z) un triplet d'entiers relatifs. I I	Ecris D en compréhension I Utilise la définition de la continuité en un pont I *Utilise une méthode appropriée pour calculer la limite * utilise $\lim\limits_{x\to-\infty} \lvert x\rvert^{\propto} e^{x} = 0$ I Utilise la définition de la dérivabilité en un point	$*x = 7k - 57 , y = 0 \ \ et \ z = -6k + 57;\ k \in \mathbb{Z}$. . $(x,z) \in IN \times IN$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. $k = 9$ $\Omega(6; 0; 3)$. I I I I D=[0, +∞[.	**4 pts** **4 pts**

	$(x,z) \in IN \times IN \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\iff \begin{cases} 7k - 57 \geq 0 \\ -6k + 57 \geq 0 \end{cases}$ $\iff \frac{57}{7} \leq k \leq \frac{57}{6}$ $\iff k = 9$ Il existe un seul point Ω de coordonnées des entiers naturels et appartenant à (P)⋂(IAB). Pour $k = 9$ on a : $x_\Omega = 7 \times 9 - 57 = 6$ et $y_\Omega = -6 \times 9 + 57 = 3$ D'où $\Omega(6; 0; 3)$.	$f(x) = \sqrt[3]{x}$ I	I	I $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ f est continue en 0 I	**2 pts**
	<u>Problème 3</u> (39 pts) **8) a- Déterminons l'ensemble de définition D** f est une fonction numérique d'une variable réelle Définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$ $D = \{x \in IR / x \geq 0\}$ =$[0, +\infty[$.	$f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$ I	*Utilise les propriétés appropriées pour la dérivabilité sur un intervalle. *Utilise la propriété de dérivation de produits de fonctions I	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. la courbe admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$ I I	**2 pts**
	b- Étudions la continuité de f en 0 $0 \in D$ et $f(0)$= $\sqrt[3]{0}\, e^{-0} = 0$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, on a : $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0	$f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$ I	*Utilise une démarche appropriée pour étudier le signe de $f'(x)$	$*\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\frac{-2}{3}} = +\infty$ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{-x} = 1$ $* \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$	**2,5 pts**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
c- calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interprétons le résultat

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\, e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} e^{-x} =$
Posons X= -x , quand $x \to +\infty$, $X \to -\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to-\infty} (-X)^{\frac{1}{3}} e^{X} = 0$$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors la courbe admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 0$.

9) a- Etudions la dérivabilité de f en 0 puis interprétons

$0 \in D$ et f(0)=0
$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\sqrt[3]{x}\, e^{-x}}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\>}} x^{\frac{-2}{3}} e^{-x}$$
$$= +\infty \quad car \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x^{\frac{-2}{3}} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} e^{-x} = 1 \end{cases}$$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty\ et\ +\infty \notin IR$ donc f n'est dérivable en 0 .

Interprétation graphique : $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ alors la courbe (C) admet une demi-tangente à droite en 0 définie par $\begin{cases} x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$
</td>
<td>f

I</td>
<td>
*Utilise une démarche appropriée pour déterminer le sens de variation de f

*Réalise un tableau de variation
I I

*utilise un repère orthonormé
*utilise Le tableau de variation de f
*utilise le résultat de l'étude de la branche infinie
I I
</td>
<td>
*f n'est dérivable en 0
. (C) admet une demi-tangente à droite en 0 définie par $\begin{cases} x = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$
I I I I

*f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$.
$*f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} e^{-x}$
$* f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

I I I
</td>
<td>3,5 pts</td>
</tr>
</table>

	b- **Étudions la dérivabilité de f sur $]\mathbf{0};\ +\infty[$ et démontrons que pour tout x élément de $]\mathbf{0};\ +\infty[$ $\boldsymbol{f'(x) = (\frac{1-3x}{3x})f(x)}$** la fonction $x \longmapsto -x$ est dérivable sur IR comme fonction polynôme en particulier sur $]0;\ +\infty[$ donc $x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$. la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$. Pour tout x élément de $]0;\ +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\,e^{-x} = \left(\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} - x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-x}$ $= \left(\frac{1-3x}{3x \times x^{\frac{-1}{3}}}\right)e^{-x} = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$ **c- Achevons l'étude des variations de f** • signe de la dérivée $\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[\,,f'(x) = (\frac{1-3x}{3x})f(x)$ *et* on a $3x > 0$ *et* $f(x) > 0$ donc le signe de $f'(x)$ *est* de $1 - 3x$. $1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \left]0,\frac{1}{3}\right]$	$f,\ ]0;\ +\infty[$ I I $*f$ $*f'(x) = (\frac{1-3x}{3x})f(x)$		$*\ \forall\ x \left]0,\frac{1}{3}\right[\ ,f'(x) > 0;$ $*\forall\ x \left]\frac{1}{3};\ +\infty\right[$, $f'(x) < 0$; *Pour $x = \frac{1}{3}$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. le sens de variation de f Le tableau de variation de f **I I I I I**	**3,5 pts**

- ✓ $\forall x \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$, $f'(x) > 0$;
- ✓ $\forall x \in \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$, $f'(x) < 0$;
- ✓ Pour $x = \frac{1}{3}, f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$
- Sens de variation

  f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$;

  f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

Tableau de variation

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e}}$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt[3]{3e}}$	↘	0

10) Construisons la courbe

Les bornes de D

I I I

Les variations de f

I

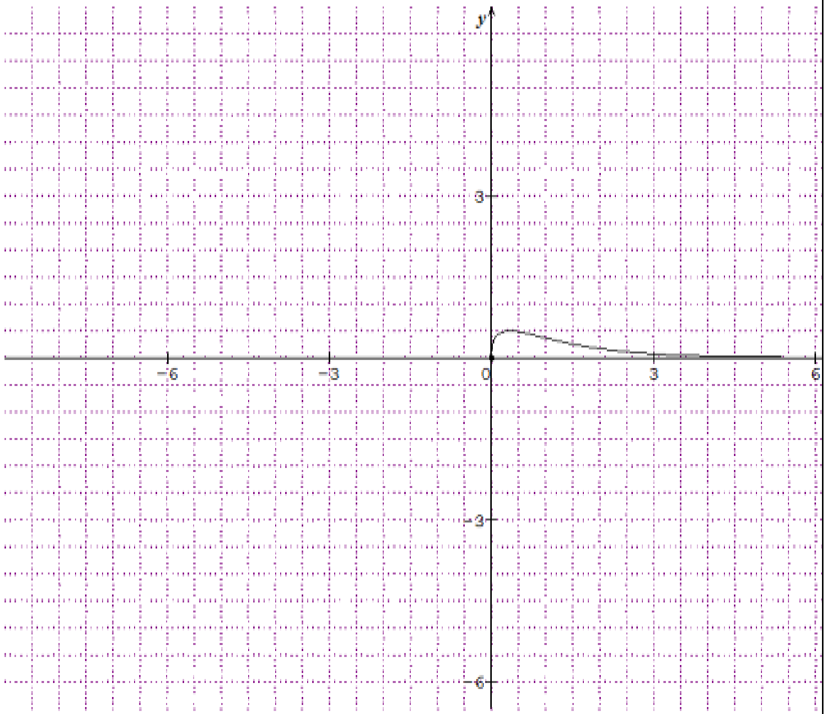
*La demi-tangente

*(C)

I I I I I

6 pts

5 pts


y
3
−6
−3
0
3
6
-3
-6

	11) a-Démontrons pour tout x élément de $\left[\frac{1}{3},1\right]$ $\lvert f'(x)\rvert \leq \frac{2}{3}$ $\forall\, x \in \left[\frac{1}{3},1\right]$, $f'(x) = (\frac{1-3x}{3x})f(x) = (\frac{1}{3x}-1)f(x)$ $x \in \left[\frac{1}{3},1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1$ $\Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3e}}$ (Car f est décroissante Sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$) $x \in \left[\frac{1}{3},1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1$ $\Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq \frac{1}{3x} - 1 \leq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{3x} - 1 \leq \frac{2}{3}$ Il en résulte $x \in \left[\frac{1}{3},1\right] \Longrightarrow -\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$ $\Longrightarrow$	$f'(x)$, $\left[\frac{1}{3},1\right]$ I I	Utilise une démarche appropriée pour majorer $\lvert f'(x)\rvert$ I	$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3e}}$ *$0 \leq \frac{1}{3x} - 1 \leq \frac{2}{3}$ *$-\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$ *$\lvert f'(x)\rvert \leq \frac{2}{3}$ I I I	**3,5 pts**
	b- Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $\left[\frac{1}{3},1\right]$. soit x élément de $\left[\frac{1}{3},1\right]$, f(x) =x $\Leftrightarrow$ $f(x) - x = 0$ soit h la fonction définie sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$ par h(x)= $f(x) - x$ la fonction h est continue et dérivable sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$, $\forall\, x \in \left[\frac{1}{3},1\right]$, $h'(x) = f'(x) - 1$ et $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$, de plus h($\frac{1}{3}$) $= f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} > 0$, h(1) $= f(1) - 1$ et $f(1) - 1 < 0$, h est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$,	$f(x) = x$ I	Utilise une démarche appropriée pour résoudre l'équation I	*$\forall\, x \in \left[\frac{1}{3},1\right]$, $h'(x) = f'(x) - 1$ *$h'(x) < 0$ * h est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$ * $h(\frac{1}{3}) \times h(1) < 0$ * $f(x) = x$ admet une solution $\propto$ dans $\left[\frac{1}{3},1\right]$. I I I I	**3,5 pts**

	et $h(\frac{1}{3}) \times h(1) < 0$ donc h(x)=0 admet une solution unique $\propto$ dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ par conséquent f(x)=x admet une solution $\propto$ dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. **c) Démontre que pour tout élément x de $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ $\lvert f(x) - \propto\rvert \leq \frac{2}{3}\lvert x - \propto \rvert$** f est dérivable sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ et $\forall\, x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $\lvert \boldsymbol{f'(x)}\rvert \leq \frac{2}{3}$ pour x *et* $\propto$ deux éléments de $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ on a d'après la conséquence du théorème des inégalité des accroissements finis : $\lvert f(x) - f(\propto)\rvert \leq \frac{2}{3}\lvert \boldsymbol{x} - \propto \rvert$ $\forall\, x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ $\lvert f(x) - \propto\rvert \leq \frac{2}{3}\lvert \boldsymbol{x} - \propto \rvert$. **12) Calculons une valeur approchée de V** On a : V=$(\int_0^1 \pi[f(x)]^2\, dx)$ uv= $(\pi \int_0^1 [\sqrt[3]{x}\, e^{-x}]^2\, dx)$ uv =$(\pi \int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\, e^{-2x} dx)$ uv Posons $u(x) = x^{\frac{2}{3}}\, e^{-2x}$; $\frac{b-a}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$; $x_0 = 0, x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 04$; $x_3 = 0{,}6; x_4 = 0{,}8$; $x_5 = 1$ Soit $S = 0{,}2[\frac{u(0)+u(1)}{2} + u(0{,}2) + u(0{,}4) + u(0{,}6) + u(0{,}8)]$ On a : $S \approx 0,1857$; $V \approx 3{,}14 \times 0{,}1857\, uv$; $V \approx 0{,}58\, uv$ **Fin**	$\left[\frac{1}{3}, 1\right]$; $\propto, f$ I I I (C) ; f I I	Utilise la conséquence du théorème des inégalités des accroissements finis I Utilise la propriété du volume d'un engendré par la rotation d'une courbe autour d'un axe * utilise la méthode des trapèzes I	* f est dérivable sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ *$\forall\, x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $\lvert f'(x)\rvert \leq \frac{2}{3}$ *$\forall\, x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ $\lvert f(x) - \propto\rvert \leq \frac{2}{3}\lvert x - \propto \rvert$. I I I * V=$(\int_0^1 \pi[f(x)]^2\, dx)$ uv *V=$(\pi \int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\, e^{-2x} dx)$ uv. * $S \approx 0,1857$ * $V \approx 0{,}58\, uv$. I I I	**4 pts** **3,5 pts**

Note relative aux critères de perfectionnement :

Soit N le total des notes sur 90.

- Si N < 40 alors CP=0 ;
- Si $40 \leq N < 60$ alors $0 \leq CP \leq 5$;
- Si $N \geq 60$ alors $0 \leq CP \leq 10$.

RECOMMANDATIONS

- Lire attentivement la production de chaque candidat ;
- Pour chaque consigne présentez la note obtenue par candidat dans la marge comme suit : CA +CM+ CO= t et encerclez t.
- Soit T la note sur 100, $T = \frac{N+CP}{100}$, on en déduit la note sur 20 arrondi à l'unité supérieur.

COURS INTENSIFS juillet 2024

(COURS DE RENFORCEMENT 2024)

Classes ouvertes : 3ème – 1ères (C, D) Tles (ABCD)

MODALITES DE PAIEMENT

Option 1 **:** Payez la totalité à l'inscription.

Option 2 **:** Payez **10.000F** à l'inscription et le reste au plus tard le **lundi 10 juillet 2024**

Pour plus d'informations appeler :96 38 92 49 - 52 81 89 60 95 51 17 61

OBJECTIF VISE : PROGRAMMES DES CLASSES OUVERTES

$$\begin{cases} 3\text{è} \quad \text{SA1} - \text{SA2} - \text{SA3} - \text{SA4} \\ Tle\ CD - \text{SA1} - \text{SA2} - \text{SA3} \\ 1\text{è}res - \text{SA1} - \text{SA2} - \text{SA3} \end{cases}$$ en deux MOIS.

- **DEROULEMENT** : Du 03 **Juillet** au **31 Août 2024**
- **DUREE DE FORMATION : 09** Semaines
- **JOURS ET HEURES** : Du lundi **au** Jeudi de **8H30** à **13H00**

- **LIEU** : ***EPP GBEGAMEY SUD GROUPE ABC (après le CEG GBEGAMEY en face du Collège Notre-Dame des Apôtres de Cotonou)***

NB : Les inscriptions sont prévues du 01 mai au 17 juin 2024.

Au Groupe la Certitude, c'est l'expérience et le travail bien fait.