

Prof : M. ATADE

Sujet 1

MATHÉMATIQUES

**EXERCICE 1**

I. Soit  $f_n$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n; \forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; I; J)$  d'unité graphique 2cm.

1. a) Montrer que la fonction  $f_n$  est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de la fonction  $f_n$  à droite en 0

c) Calculer les limites  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $\frac{f_1(x)}{x}$  et  $\frac{f_2(x)}{x}$  en  $+\infty$

2. Etudier la monotonie des fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .

3. a) Etudier la position relative des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

b) Construire dans le même repère les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

4. Soit la fonction suivante :  $h(x) = x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)$

a) Montrer que la fonction  $h$  est une primitive de  $f_1$  sur  $]0; +\infty[$

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}; \forall x < 0$

II. Soit  $u_n = \int_e^1 f_n(x) dx; \forall n \in \mathbb{N}$

1. a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$

b) Déterminer le signe de la quantité  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  sur l'intervalle  $[1; e]$

c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq u_n$

d) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

2. a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right) u_n$

b) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire du domaine du plan délimité par les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  et par les droites d'équations

$x = 1$  et  $x = e$ .

Calculer  $\mathcal{A}$  en  $cm^2$ .

## EXERCICE 2

**I.** Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx - 2$$

Soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O ; I ; J)$  d'unité graphique 1cm.

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$  puis interpréter graphiquement le résultat.  
b) Montrer que la courbe  $(C)$  admet en  $-\infty$  une asymptote  $(\Delta_n)$  dont on déterminera une équation cartésienne.
2. a) Montrer que la fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R} ; f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$   
b) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$   
c) En déduire le sens de variation de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$  (On distinguera les deux cas :  $n = 0$  et  $n \geq 1$ ).
3. a) Détermine l'équation de la tangente à la courbe  $(C_n)$  au point d'abscisse 0  
b) Construire dans le même repère les courbes  $(C_0)$  et  $(C_2)$ .

**II.** On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f_0(u_n)$

1. a) Montrer que l'équation  $f_0(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$   
b) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; |f'_0(x)| \leq \frac{1}{2}$
2. a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$   
b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$   
c) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .