CORRIGE-BAREME Série C

CORRIGE	Barème

Exercice 1 (2 points)

1-V
2-F
3-F
4-V

4×0,5 pts

Exercice 2 (2 points)

1-A
2-A
3-C
4-C

4×0,5 pts

Exercice 3 (2,5 points)

1-

a) **Démontrons que l'équation (E) admet au moins une solution.**

Détermine le $PGCD(19; 12)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

a	19	12	7	5	2
b	12	7	5	2	1
r	7	5	2	1	0
q	1	1	1	2	2

Donc $PGCD(19; 12) = 1$. D'où l'équation (E) admet au moins une solution.

0,25 pt

b) Vérifions que, le nombre N = 13×12*v*+6×19*u* est une solution de (S)

.

- $(u; v)$ est une solution de l'équation (E).

  Donc, $19u + 12v = 1$.

  $6 \times 19u + 6 \times 12v = 6$

  $6 \times 19u + 13 \times 12v = 6 + 7 \times 12v$

  $N = 6 + 12(7 \times v)$

  D'où $N \equiv 6[12]$

  0,25 pt

- $(u; v)$ est une solution de l'équation (E).

  Donc, $19u + 12v = 1$.

  $13 \times 19u + 13 \times 12v = 13$

  $6 \times 19u + 13 \times 12v = 13 - 7 \times 19u$

  $N = 13 - 19(7 \times u)$

  D'où $N \equiv 13[19]$.

  0,25 pt

Ainsi, N est une solution de (S).

2-

a) **Vérifions que le système (S) équivaut à $\begin{cases} \boldsymbol{n \equiv n_0[19]} \\ \boldsymbol{n \equiv n_0[12]} \end{cases}$.**

n_0 est solution de (S) donc $\begin{cases} n_0 \equiv 13[19] \\ n_0 \equiv 6[12] \end{cases}$

Pour tout nombre entier relatif n solution de (S) on a :

$n \equiv 13[19]$ et $n_0 \equiv 13[19]$ équivaut à $n \equiv n_0[19]$.

$n \equiv 6[12]$ et $n_0 \equiv 6[12]$ équivaut à $n \equiv n_0[12]$.

D'où : (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$.

0,25 pt

b) **Démontrons que le système $\begin{cases} \boldsymbol{n \equiv n_0[19]} \\ \boldsymbol{n \equiv n_0[12]} \end{cases}$ équivaut à $\boldsymbol{n \equiv n_0[12 \times 19]}$.**

- $n \equiv n_0[19] \Leftrightarrow 19|n - n_0$ et $n \equiv n_0[12] \Leftrightarrow 12|n - n_0$

Or $PGCD(19;12) = 1$. Donc, $12 \times 19|n - n_0$ c'est-à-dire $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

D'où $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ implique que $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

0,25 pt

- Réciproquement, si $n \equiv n_0[12 \times 19]$, alors $n - n_0 = 12 \times 19k, k \in \mathbb{Z}$. C'est-à-dire $n \equiv n_0[19]$ et $n \equiv n_0[12]$.

  Ainsi, $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

0,25 pt

3- a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide on obtient le couple $(-5;8)$.

Pour $(u;v) = (-5;8), N = 678$.

0,5 pt

b) Déterminons l'ensemble des solutions de (S).

On déduit des questions 2-a) et 2-b) que (S) équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$ avec n_0 une solution quelconque de (S). $N = 678$ est une solution de (S).

Donc (S) équivaut à $n \equiv 678[12 \times 19]$.

D'où, l'ensemble des solutions de (S) est $\{678 + 12 \times 19k, k \in \mathbb{Z}.\}$.

0,25 pt

4- **Déterminons le reste de cette division de n par 228.**

On a : $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$.

Donc $n \equiv 678[12 \times 19]$. C'est-à-dire $n \equiv 678[228]$.

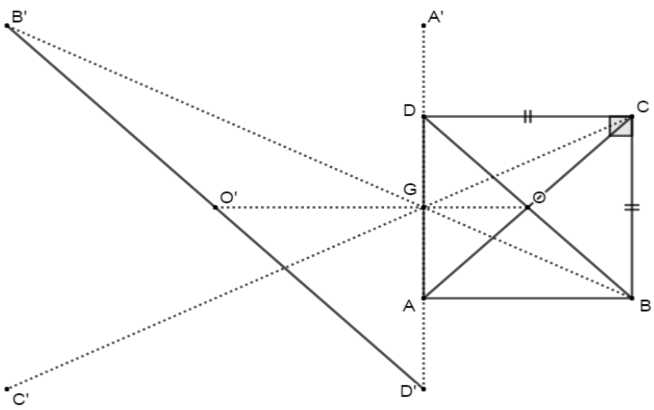
Or $678 \equiv 222[228]$. Donc, $n \equiv 222[228]$ et comme $222 < 228$, alors le reste de la division euclidienne de n par 228 est 222.

0,25 pt

Exercice 4 (3,5 points)

1- a) $G = bar\{(A;2),(B;-1)\ et\ (C;1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Le carré ABCD et le point G 0,25



Pour les autres points :
-2 points représentés= ***0,25 pt***
-au moins 3 points représentés= ***0,5 pt***

b) Démontrons que h est une homothétie de centre G dont on précisera le rapport.

Pour tous M et M' du plan, on a :

$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG}$ car $G = bar\{(A;2),(B;-1)\ et\ (C;1)\}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$

Donc h est l'homothétie de centre G et de rapport -2

0,25 pt

c) Construction des images O' ; A' ; B' ; $C'\ et\ D$ respectivement des points O ; A ; B ; $C\ et\ D$ par h.

$h(O) = O' \Leftrightarrow \overrightarrow{GO'} = -2\overrightarrow{GO}$

$h(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} = -2\overrightarrow{GA}$

$h(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} = -2\overrightarrow{GA}$

$h(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{GC'} = -2\overrightarrow{GC}$

$h(D) = D' \Leftrightarrow \overrightarrow{GD'} = -2\overrightarrow{GD}$

Voir figure

d) **Je justifie que G est le barycentre des points pondérés (A',2),(B';-1) et (C' ;1)**

On a :

$\overrightarrow{GA'} = -2\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA'} = -4\overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{GB'} = -2\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GB'} = 2\overrightarrow{GB}$

$h(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{GC'} = -2\overrightarrow{GC}$

Donc

$$2\overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GC'} = -4\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GC}$$

$$2\overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GC'} = -2\left(2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}\right)$$

$$2\overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0} \text{ car } G = bar\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$$

D'où $G' = bar\{(A';2),(B';-1),(C';1)\}$.

0,25 pt

2- **a) Je reproduis et je complète le tableau de correspondance de r.**

r	O	A	B	C	D
	O	B	C	D	A

0,25 pt

b) Je reproduis et je complète le tableau de correspondance de f.

f	O	A	B	C	D
	O'	B'	C'	D'	A'

0,25 pt

c) **Justifions que les droites $(B'D')$ *et* (AC) sont perpendiculaires telles que $B'D' = 2AC$.**

- h est l'homothétie de centre G et de rapport -2. Donc h est la similitude directe de centre G, de rapport 2 et d'angle π.
- r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc r est la similitude directe de centre O, de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- $f = hor$. Donc f est une similitude directe de rapport 2 et d'angle

$\left(\widehat{\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \left(\widehat{-\frac{\pi}{2}}\right)$.

Or $f(A) = B' et\ f(C) = D'$. Donc $B'D' = 2AC\ et\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B'D'}}\right) = -\frac{\pi}{2}$. D'où les droites $(B'D')\ et\ (AC)$ sont perpendiculaires telles que $B'D' = 2AC$ ------→ 0,5 pt

3- **a) Je détermine les affixes des points O ; A ; B ; C ; D et G.**

Points	O	A	B	C	D	G
Affixes	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$	0	1	$1+i$	i	$\frac{1}{2}i$

0,5 pt

b) Je détermine les écritures complexes des transformations du plan h, r et f.

- L'écriture complexe de h est : $z' = -2z + \frac{3}{2}i$
- L'écriture complexe de r est : $z' = iz + 1$ ------------------------→ 0,25 pt
- $f = hor$ Donc l'écriture complexe de f est : $z' = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$ ------→ 0,25 pt

c) **Déterminons le point invariant de f.**

Soit Ω d'affixe w le point invariant de f.

On a : $w = \frac{-2+\frac{3}{2}i}{1+2i} = \frac{1}{5} + \frac{11}{10}i$ ------------------------------→ 0,25 pt

EXERCICE 5 (5 points)

Partie A

1- **Je justifie f est continue en** 0

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} xe^{\frac{-1}{nx}} = 0 \; car \left\{ \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{nx}} = \lim_{X\to -\infty} e^{X} = 0 \; en\ posant\ que\ X = \frac{-1}{nx} \right.$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0 = f_n(0) = 0$ donc f_n est continue en 0 -------------→ 0,5 pt

2- **Je justifie que (c_n) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.**

$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{xe^{\frac{-1}{nx}}-0}{x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{nx}} = 0$ ainsi $f_n{}'(0) = 0$ donc (c_n) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 ----------------------------→ 0,5 pt

3- **Je calcule la limite de $f_n en + \infty$**

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{-1}{nx}} = +\infty \; car \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{-1}{nx}} = \lim_{X\to 0} e^{X} = 1 \; en\ posant\ que\ X = \dfrac{-1}{nx} \\ \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \end{array} \right.$$

---→ 0,25 pt

4- **Je justifie f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$**

f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$\forall x \in \,]0; +\infty[,\ f_n{}'(x) = e^{\frac{-1}{nx}} + \frac{1}{nx^2}(e^{\frac{-1}{nx}})x = (1 + \frac{1}{nx})e^{\frac{-1}{nx}}$ et pour $x > 0$ ------------→ 0,25 pt

$\left(1 + \frac{1}{nx}\right) > 0 \; et \; e^{\frac{-1}{nx}} > 0$ d'où $f_n{}'(x) > 0$ et

f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ --------------------------------→ 0,25 pt

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f_n{}'(x)$		
$f_n(x)$	0 ↗	$+\infty$

--------------------------------→ 0,25 pt

5- **a)** Pour $t > 0$, $g(t) = e^{-t} + t - 1$ et $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{2}t^2$

j'en déduis que $0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$

On a $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{1}{2}t^2$ pout t = $\frac{1}{nx}$

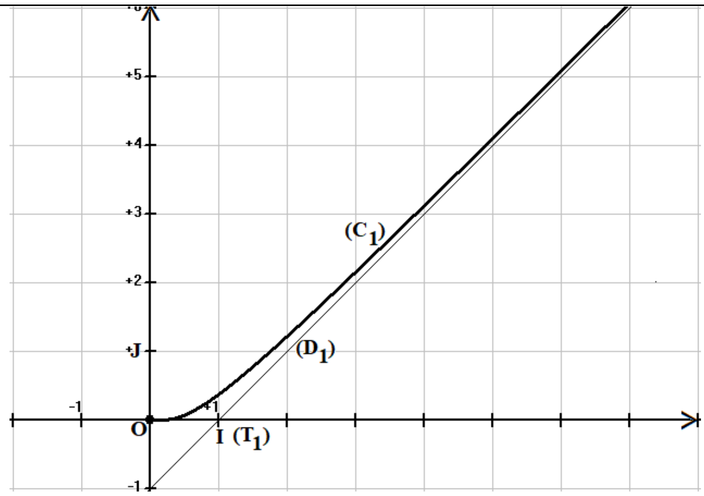
on a $0 \leq e^{-\frac{1}{nx}} + \frac{1}{nx} - 1 \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{nx})^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq xe^{-\frac{1}{nx}} - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$ ainsi $0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$ ------→ 0,5 pt

b) Justifie que la droite (D_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote à (c_n)

$\lim_{x\to +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0$ donc $\lim_{x\to +\infty} f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) = 0$ donc la droite (D_n) d'équation $y = (x - \frac{1}{n})$ est une asymptote à (c_n) en $+\infty$ --------------→ 0,25 pt

c) **Construction : voir annexe**



0,75 pt

Partie B

1- **Je démontre que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique u_n sur $]1;+\infty[$.**

f_n est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $f_n([1;+\infty[) = \left[e^{\frac{-1}{n}};+\infty\right[$ or $1 \in \left[e^{\frac{-1}{n}}:+\infty\right[$

Donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique u_n sur $]1;+\infty[$. 0,25 pt

2- **Je démontre que u_n est solution de l'équation $xlnx = \frac{1}{n}$**

$f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n e^{\frac{-1}{nu_n}} = 1 \Leftrightarrow u_n = e^{\frac{1}{nU_n}} \Leftrightarrow lnu_n = \frac{1}{nu_n} \Leftrightarrow u_n lnu_n = \frac{1}{n}$

donc u_n est solution de l'équation $xlnx = \frac{1}{n}$. 0,25 pt

3- **a) Je justifie que la fonction h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$**

La fonction h est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $\forall x \in [1;+\infty[$, $h'(x) = lnx + 1$ et pour $x \geq 1$; $lnx + 1 > 0$

D'où $h'(x) > 0$ h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. 0,25 pt

b) Je justifie que u_n est décroissante

u_n est solution de l'équation $h(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(u_n) = \frac{1}{n}$ $et\ h(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

or pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\Leftrightarrow$ $h(u_{n+1}) < h(u_n)$

et h étant croissante $u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante. 0,5 pt

c) Je justifie que la suite (u_n) est convergente

On a $u_n \in]1;+\infty[$,

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente. 0,25 pt

Exercice 6 (5 points)

Pour calculer le cout total du matériel de construction de l'arrêt de bus, je vais ;
- utiliser la géométrie analytique de l'espace.
- calculer les longueurs FG et GH.
- calculer la surface S du toit puis le prix P_1 du toit.
- déterminer une équation du plan (ABC).
- calculer la longueur de la poutre HC qui est la distance du point H au plan (ABC)
- calculer le prix d'une poutre puis celui P_2 des trois poutres.
- calculer le prix total du matériel $P_T = P_1 + P_2$

Résolution

- je calcule les longueurs FG et GH.

On a F(-2 ;-1 ;1) G(2 ;-1 ;1) H(2 ;$\frac{3}{2}$; 1)

FG = $\sqrt{(2+2)^2 + (-1+1)^2 + (1-1)^2} = 4$ de même HG = $\frac{5}{2}$

- je calcule la surface S du toit puis le prix P_1 du toit

S= FG.GH = 4 . $\frac{5}{2} = 10\, m^2$ le prix du toit est $P_1 = 20000.10$= 200000f

- je détermine une équation du plan (ABC)

Le plan (ABC) passe par le point A$(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(2;1;2)$ il a pour équation $2\left(x+\frac{1}{2}\right) + 1\left(x+\frac{1}{2}\right) + 2\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$ donc

$$2x + y + 2z + \frac{5}{2} = 0$$

- je calcule la longueur de la poutre HC qui est la distance du point H au plan (ABC)

HC =$\frac{\left|2.\ 2+1.\ \frac{3}{2}+2.1+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{10}{3}$ m

- je calcule le prix d'une poutre puis celui P_2 des trois poutres

Le prix d'une poutre est p=$\frac{10}{3}$.22000=$\frac{220000}{3}$ le prix des trois poutres est $P_2 = 220000f$

- je calcule le prix total du matériel $P_T = P_1 + P_2$

$P_T = P_1 + P_2$= 200000f+220000f =420000f

GRILLE DE CORRECTION CRITERIEE

Critères	Indicateurs	Barème
CM1 pertinence des outils mathématiques en rapport avec le contexte	-utilisation de géométrie analytique de l'espace -calcul de longueur -calcul de surface - détermination d'équation de plan - calcul de distance d'un point à un plan - calcul de prix	**0,75 point** 1 indic sur 6⟶0,25pt 3 indic sur 6⟶0,5pt 4 indic sur 6⟶ 0,75 pt
CM2 utilisation correcte des outils mathématiques	- utilisation correcte de la formule FG = $\sqrt{(2+2)^2+(-1+1)^2+(1-1)^2}$ - Détermination correcte de l'équation du plan (ABC) -Utilisation correcte de la formule HC =$\frac{\left\|2.\ 2+1.\ \frac{3}{2}+2.1+\frac{1}{2}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{10}{3}$ - Calcul correcte de surface. - Calcul correcte de prix	**2,5 points** 1 indic sur 5⟶0,5 pt 2 indic sur 5⟶ 1 pt 3 indic sur 5⟶1,5pt 4 indic sur 5⟶2,5 pt
CM3 cohérence des réponses	• Démarche correcte • Précision • réponse correcte	**1,25 points** 1 indic sur 3 ⟶0,75 pt 2 indic sur 3 ⟶1,25 pt
CP critères de perfectionnement	• Concision • Originalité • Bonne présentation	**0,5 point** 1 indic sur 3 ⟶0,25 pt 1 indic sur 3 ⟶0,5 pt