BACCALAURÉAT BLANC Session de février 2024

LYCÉE NATIONAL Léon MBA — **Département de Mathématiques**

Durée : 4 heures — **Coefficient : 5**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n°1 : QCM et Restitution organisée des connaissances — 4 points

Partie I : ROC

1. Donner la somme des n premiers nombres entiers naturels et démontrer le résultat par la suite.
2. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donner la fonction dérivée de $x \longmapsto e^{u(x)}$, Puis démontrer le résultat.

Partie II : QCM

Pour chacune des questions, **vous indiquerez sur votre copie la lettre correspondante à la réponse choisie**. Le barème est le suivant : 1 **point pour une réponse exacte** et 0 **point pour une réponse fausse ou une absence de réponse**. Aucune justification n'est demandée et une seule des quatre propositions est exacte.

1. Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit M_1 le point d'affixe $z = 1 - \mathrm{i}$. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par M_n le point d'affixe z^n .

   (a) l'écriture trigonométrique de z^n , $n \geq 1$ est $\left(\sqrt{x}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$

   (b) Les entiers naturels n tels que les points M_n soient sur la droite d'équation $y = x$ sont tels que : $(n+1)$ est multiple de 8 ou $(n+5)$ est multiple de 7.

   (c) M_2 appartient à la droite d'équation $y = x$.

   (d) Un point M_n appartient à la droite d'équation y=x , si et seulement si, $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}}\right) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2. On considère la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Soit F la primitive de f sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F(\sin x)$.
   Alors la dérivée g' de la fonction g est :

   (a) $g'(x) = 1$

   (b) $g'(x) = \sin x$

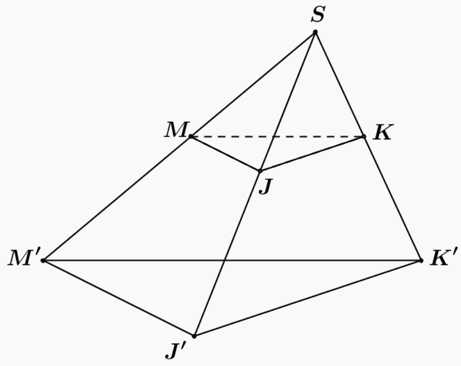
   (c) $g'(x) = f(x)$

   (d) $g'(x) = f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f.

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace — 3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.
On considère les points $I(1,1,0)$, $J(0,1,1)$ et $K(1,0,-1)$.

1. (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.
   (b) En déduire que les points I , J , et K déterminent un plan dont une équation est $x - y + z = 0$.
2. Soit le point $S(1,-1,1)$. Montrer que le volume du tétraèdre $SIJK$ est égal à $\frac{1}{2}$.
3. Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.
   (b) Déterminer alors le volume du tétraèdre $SMJK$.
4. Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.
   (a) Déterminer une équation du plan plan P' image du plan P par h.
   (b) Le plan P' coupe les demi-droite $[SM[$, $[SJ[$ et $[SK[$ respectivement en M' , J' et K'.
   Montrer que le volume du solide $MJKM'J'K'$ est égal à $\frac{7}{2}$



Exercice 3 : Isométrie du plan — 3 points

Dans le plan orienté , on considère un carré $ABCD$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On considère le point E de la demi-droite $[BC)$ tel que $C \in [BE]$ et $CE = AC$.

1. Faire la figure.
2. (a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f vérifiant $f(A) = C$ et $f(C) = E$.
   (b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.
   (c) Construire le centre Ω de cette rotation.
3. (a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement g vérifiant $g(A) = C$ et $g(C) = E$.
   (b) Calculer $g \circ f^{-1}(C)$ et $g \circ f^{-1}(E)$ et en déduire que $g = S_{(BC)} \circ f$.
   (c) Vérifier que g ne peut pas être une symétrie orthogonale.
   (d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 4 : Conique et Arithmétique — 5 points

Partie I

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) la droite d'équation $x = 6$.
On considère les points $E(6;0)$, $F(8;0)$ et $G(6;5)$. mes$\left(\widehat{\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}}\right) = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
θ est tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. **(On prendra pour unité graphique** $0,5$ **cm))**
Soit M un point du plan, la parallèle à (EF) issue de M coupe la droite (EG) en H et la parallèle à (FG) issue de M coupe la droite (EG) en M'. On note $\Gamma_\theta = \{M \in (P) / MM' = MF\}$.

1. Faire la figure.

2. (a) Justifier que mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MH}}\right) = \theta + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

   (b) En déduire que (Γ_θ) , l'ensemble des points M du plan est tel que : $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

3. Préciser la nature de (Γ_θ) selon la valeur de θ.
4. Construire la courbe (Γ_0) correspondant à $\theta = 0$.
5. (a) Préciser la nature $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

   (b) Écrire une équation cartésienne de la courbe.

   (c) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de cette courbe).

   (d) Construire $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$

Partie II

On donne l'égalité $1000 = 13 \times 76 + 12$. Soit n un entier naturel.

1. Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13.
2. Déterminer, suivant les valeurs de n , le reste de la division euclidienne de $10^{3n+1} + 10^{3n}$ par 13.
3. En déduire le reste de la division euclidienne par 13 de 11.000.000.000000.
4. Quel est le reste de la division euclidienne par 13 de $25 \times 10^{15} + 1$.

Exercice 5 : Étude d'une fonction Logarithme — 5 points

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur

$$I =]0; +\infty[\quad \text{par} \quad f_n(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[\quad f_n(x) = \sqrt{x}\,(\ln x)^n$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. (a) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[\;;\; \sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$, en déduire que f_n est continue à droite en 0.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

   (c) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[\;;\; \dfrac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   (d) Calculer , suivant la parité de n , $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad ; \quad f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)$$

(b) Vérifier que : $\forall n \geq 2 \quad , \quad f_n'(x) = 0$ si et seulement si $\left(x = 1 \text{ ou } x = e^{-2n}\right)$

(c) Étudier, suivant la parité de n , le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

(d) Montrer que si n est impaire et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n).

Partie II

Soit $a \in]1; e[$ un réel fixe. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad u_n = f_n(a)$$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$; $\quad 0 < u_n < \sqrt{e}$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. (a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1; e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3. On pose : $\quad l = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

   (a) Montrer que : $\quad 1 < l < e$

   (b) Montrer que : $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$

   (c) Montrer que si $\quad l < e \quad$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$

   (d) En déduire la valeur de l.

BAC BLANC SESSION FEVRIER 2024

Lycée National Léon M'ba

Corrigé rédigé par Gildas Mba Obiang

Exercice 1. QCM et Restitution organisée des connaissances
Partie I : ROC

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On pose $S_n := 0+1+2+\cdots+n = \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k$. Montrons à l'aide de deux méthodes l'égalité :
   $$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
   Méthode 1 : Cette méthode consiste à calculer $2S_n$.
   On a :
   $$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1+2+\cdots+n \\ S_n & = & n+n-1+\cdots+1 \end{array}$$
   donc $2S_n = (n+1)+(n-1+2)+\cdots+(n+1) = \underbrace{(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ termes tous égaux à } (n+1)} = n(n+1)$
   d'où le résultat.
   Méthode 2 : raisonnement par récurrence.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $\mathcal{P}(n)$: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Pour $n=0$ on a : $S_0 = 0 = \sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée. Supposons le résultat pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\begin{array}{rcl} S_{n+1} & = & \sum_{k=1}^{n+1} k = n+1+\sum_{k=1}^{n} k \\ S_{n+1} & = & n+1+S_n \underset{H.R}{=} n+1+\frac{n(n+1)}{2} \\ S_{n+1} & = & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{array}$$
   donc on a montré $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Ainsi, par le principe du raisonnement par récurrence on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto e^x$ toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa fonction sur $\mathbb{R}$ est définie par : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

   Démonstration. Soit $f : x \mapsto e^{u(x)}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

   - **1$^{\text{re}}$ cas** : u est la fonction constante égale à $u(x_0)$ sur $\mathbb{R}$.
     Dans ce cas, f est la fonction constante égale à $e^{u(x_0)}$ sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 = u'(x)e^{u(x)}$.
   - **2$^{\text{e}}$ cas** : u n'est pas la fonction constante égale à $u(x_0)$ sur $\mathbb{R}$.
     Dans ce cas et puisque que u est continue en x_0 car dérivable, il existe un intervalle I centré en x_0 tel que pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, $u(x) \neq u(x_0)$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$,
     $$\begin{array}{rcl} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & = & \frac{e^{u(x)}-e^{u(x_0)}}{x-x_0} \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & = & \frac{e^{u(x)}-e^{u(x_0)}}{u(x)-u(x_0)} \times \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

Or, $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur I et en posant $Y = u(x)$ on a

$$\lim_{x - x_0} \frac{e^{u(x)} - e^{u(x_0)}}{u(x) - u(x_0)} = \lim_{Y \to Y_0} \frac{e^Y - e^{Y_0}}{Y - Y_0} = e^{Y_0} = e^{u(x_0)}$$

donc on en déduit :

$$\lim_{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x - x_0} \left[\frac{e^{u(x)} - e^{u(x_0)}}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \right] \underset{\text{par produit}}{=} u'(x_0) e^{u(x_0)}$$

ainsi, on a montré que f est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et $f'(x_0) = u'(x_0) e^{u(x_0)}$ d'où le résultat. $\square$

Partie II : QCM

On pose $z = 1 - i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = z^n$ l'affixe du point M_n dans le plan affine complexe. On a :

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = z^n = \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = (\sqrt{2})^n e^{-i\frac{n\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points M_n appartiennent à la droite $y = x$ si et seulement si $\arg(z_n) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow -\frac{n\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \Leftrightarrow n + 1 = -4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par suite, on rejette **les reponses a et b**. De plus, pour tout $n > 1$, M_n appartient à la droite $y = x$ si et seulement si $\arg(z_n) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ c'est-dire si et seulement si $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}_n}}) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$ d'où **réponse d**.

2. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $-1 < \sin x < 1$ donc $x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x) F'(\sin(x)) \\ g'(x) &= \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} \\ g'(x) &= \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} \underset{\text{car } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}{=} \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = 1 \end{aligned}$$

d'où la **réponse a**.

Lycée National Léon M'ba

Corrigé rédigé par Gildas Mba Obiang

Exercice 2. Géométrie dans l'espace

1. a) Après calcul on obtient : $\vec{\mathrm{IJ}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathrm{IK}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathrm{IJ}} \wedge \vec{\mathrm{IK}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) D'après la question précédente, on a $\vec{\mathrm{IJ}} \wedge \vec{\mathrm{IK}} \neq \vec{0}$ donc les points I,J et K définissent un plan de vecteur normal $\vec{\mathrm{IJ}} \wedge \vec{\mathrm{IK}}$. De plus, ce plan a une équation cartésienne dans le répère orthonormée direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de la forme : $x - y + z + d = 0$. Puisque I est un point de ce plan, alors $d = 0$ par suite l'équation cartésienne cherchée est : $x - y + z = 0$.

2. Soit $S(1, -1, 1)$.

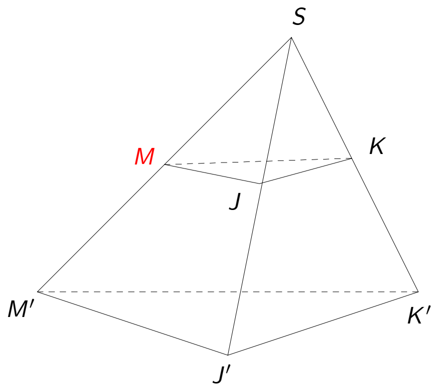


Figure.

Après calcul on obtient : $\vec{\mathrm{SI}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathrm{SJ}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathrm{SK}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathrm{SI}} \wedge \vec{\mathrm{SJ}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Soit V le volume du tétraèdre SIJK en unité de volume alors on a :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}|(\vec{\mathrm{SI}} \wedge \vec{\mathrm{SJ}}) \cdot \vec{\mathrm{SK}}| \\ V &= \frac{1}{6}|2 \times 0 + 1 \times 1 - 2 \times 2| \\ V &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. a) Le vecteur $\vec{\mathrm{KJ}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc (Δ) a pour équation paramétrique le système :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \text{ , } t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Soit $M(x, y; z) \in (\Delta)$ alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = 1 - t$, $y = 1 + t$ et $z = 2t$. Après calcul on obtient : $\vec{\mathrm{MJ}}\begin{pmatrix} t - 1 \\ -t \\ 1 - 2t \end{pmatrix}$, $\vec{\mathrm{MK}}\begin{pmatrix} t \\ -1 - t \\ -2t - 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathrm{MJ}} \wedge \vec{\mathrm{MK}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par suite, on en déduit :

$$\vec{\mathrm{MI}} \wedge \vec{\mathrm{MK}} = \vec{\mathrm{IJ}} \wedge \vec{\mathrm{IK}}$$

b) On a $\vec{\mathrm{MJ}} \wedge \vec{\mathrm{MK}} = \vec{\mathrm{IJ}} \wedge \vec{\mathrm{IK}}$ donc $\frac{1}{2}\|\vec{\mathrm{MJ}} \wedge \vec{\mathrm{MK}}\| = \frac{1}{2}\|\vec{\mathrm{IJ}} \wedge \vec{\mathrm{IK}}\|$ donc les triangles MJK ont une aire fixe égale à celle du triangle IJK quelque soit la position du point M sur la droite (Δ). De plus, les points M,I,J et K sont coplanaires donc les tétraèdre SMJK et SIJK ont la même hauteur d'où $V' = V = \frac{1}{2}$.

Vérifions-le par calcul :

On a $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} -t \\ t+2 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SM}\wedge\overrightarrow{SJ}\begin{pmatrix} 2-4t \\ 1-2t \\ 2-t \end{pmatrix}$.Soit V' le volume du tétraèdre SMJK en unité de volume alors on a :

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{6}|(\overrightarrow{SM}\wedge\overrightarrow{SJ})\cdot\overrightarrow{SK}| \\ V' &= \frac{1}{6}|(2-4t)\times 0+(1-2t)\times 1-2\times(2-t)| \\ V' &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. a) Soit M de coordonnées (x, y, z) et M' son image par l'homothétie h les coordonnées (x', y', z') on a $SM' = 2SM$ donc les coordonnées (x', y', z') sont par le système $\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-3 \\ z' = 2z-1 \end{cases}$.
   Ainsi, on en déduit $\begin{cases} x = \frac{x'+1}{2} \\ y = \frac{y'+3}{2} \\ z = \frac{z'+1}{2} \end{cases}$.
   $M(x, y, z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \frac{x'+1}{2} - \frac{y'+3}{2} + \frac{z'+1}{2} = 0 \Leftrightarrow x'-y'+z'-1=0 \Leftrightarrow M'(x', y', z')\in\mathcal{P}'$ où $\mathcal{P}'$ est le plan d'équation :
   $$x-y+z=1$$
   b) Notons V'' le volume du tétraèdre $SM'J'K'$ en unité de volume on a : $V''=8V'$ par suite, le volume en unité de volume du solide $MJKM'JK'$ est :
   $$\mathcal{V} = V''-V' = 8V'-V' = 7V' = \frac{7}{2}$$

Exercice 3. Isométrie du plan

1. Faisons une figure

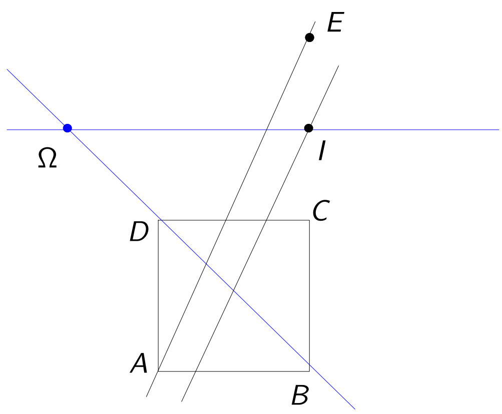


Figure.

2. a) A, C et E sont trois points non aligné tels que $CA = CE$ alors il existe un unique déplacement f vérifiant $f(A) = C$ et $f(C) = E$. Plus précisément :
   - ou bien f est une translation
   - ou bien f est une rotation.

b) Puisque $\overrightarrow{CA} \neq \overrightarrow{CE}$ on en déduit que f est une rotation d'angle $\theta = \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CE})}$. De plus,

$$\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CE})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE})} + \pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{7\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

ainis, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

c) Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments [AC] et [EC].

3. a) A, C et E sont trois points non alignés tels que CA = CE alors, il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(A) = C$ et $g(C) = E$. Plus précisément :

- ou bien g est une symétrie axiale
- ou bien g est une symétrie glissante

b) $f^{-1}(C) = A$ et $f^{-1}(E) = C$ donc $g \circ f^{-1}(C) = g(A) = C$ et $g \circ f^{-1}(E) = g(C) = E$. $g \circ f^{-1}$ est un antidéplacement car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement. De plus, $g \circ f^{-1}$ fixe les points E et C donc, il s'agit d'une symétrie axiale d'axe (BC) ainsi, on en déduit $g \circ f^{-1} = S_{(BC)}$ et par conséquent : $g = S_{(BC)} \circ f$

c) On a $g \circ g(A) = g(C) = E \neq A$ donc $g \circ g$ n'est pas l'identité du plan, par suite g n'est pas une symétrie axiale.

d) Posons (D) et $\vec{u}$ l'axe et le vecteur de f. On a alors $f = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$.
$g \circ g(A) = g(C) = E$ donc $2\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ par suite $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Soit I le milieu de [CE].

$$g(A) = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}} \circ S_{(D)}(A) = S_{(D)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}(A) = S_{(D)}(E) = C$$

donc (D) est la droite parallèle à la droite (AE) passant par I par suite, g est la symétrie glissante de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et d'axe la droite (D).

Exercice 4. Conique Arithmétique

1. Faisons une figure

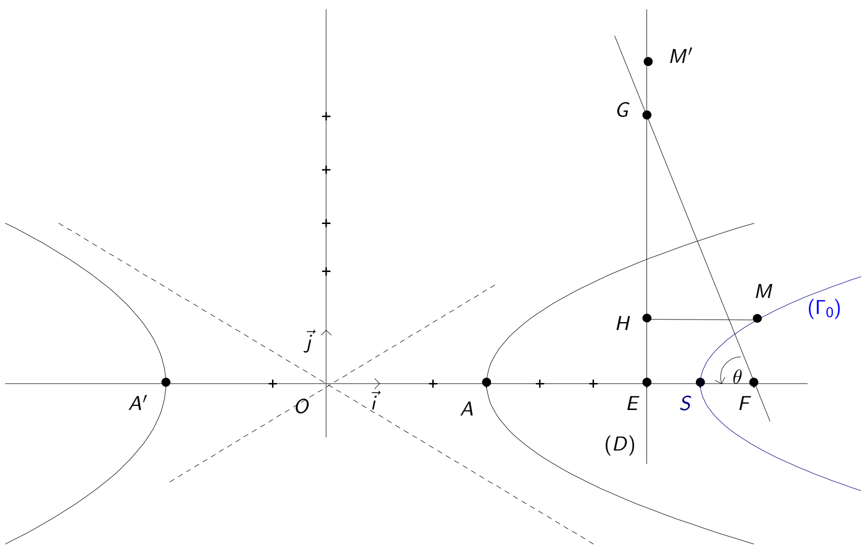


Figure.

2. a) Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires donc on en déduit,

$$\widehat{(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE})} = \widehat{(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MH})}$$

de même les vecetuers $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ sont colinéaires par suite, on a l'égalité :

$$\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}, \overrightarrow{\mathrm{MH}})} = \theta + 2k\pi$$

b) Dans le triangle MM'H on a $\cos\theta = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MM}'}$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{MH}}{\cos\theta} = \mathrm{MM}'$ car $\cos\theta \neq 0$ puisque $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc par suite, on en déduit l'équivalence :

$$M \in (\Gamma_\theta) \Leftrightarrow \mathrm{MM}' = \mathrm{MF} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{MH}}{\cos\theta} = \mathrm{MF} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

3. Pour $\theta = 0$ on a $M \in (\Gamma_\theta) \Leftrightarrow \mathrm{MF} = \mathrm{MH}$ donc (Γ_θ) est la parabole de foyer F et de directrice (D). De plus, la fonction $\psi : \theta \mapsto \frac{1}{\cos\theta}$ est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\psi(\theta) > 1$ donc pour $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, (Γ_θ) est une hyperbole.
4. Voir figure.
5. a) Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$ on a $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ donc $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ est une hyperbole de foyer F, de directrice (D), d'excentricité $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

   b) Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour tout $M(x, y)$ on a :

$$\mathrm{MH}^2 = (x-6)^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{MF}^2 = (x-8)^2 + y^2$$

   Or M est un point de la conique $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$, si et seulement si :

$$(x-8)^2 + y^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 (x-6)^2$$

   Ce qui donne successivement :

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 64 + y^2 &= \frac{4}{3}(x^2 - 12x + 36) \\ -\frac{1}{3}x^2 + y^2 &= -16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(4\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \end{aligned}$$

   donc $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ est l'hyperbole de centre O, de foyer $F(8,0)$ et $F(-8,0)$, de directrice (D) d'équation $x = 6$, d'axe focal l'axe des abscisses, de sommet $A(4\sqrt{3}, 0)$ et $A'(-4\sqrt{3}, 0)$. De plus, $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ admet pour asymptotes les droites d'équations $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ et $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.
6. Voir figure.

Partie II

1. D'après l'égalite $1000 = 13 \times 76 + 12$ on en déduit $10^3 \equiv 12[13]$ donc on a successivment $10^4 \equiv 3[13]$, $10^5 \equiv 4[13]$, $10^6 \equiv 1[13]$ par suite $10^{3n} \equiv 1[13]$ si n est pair et $10^{3n} \equiv 12[13]$ si n est impair donc le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13 est 1 si n est pair et 12 sinon.
2. $10^{3n+1} + 10^{3n} = 10^{3n} \times 11$ donc a pour reste 11 dans la division euclidienne par 13 si n est pair et 4 sinon.
3. $11.000.000.000.000 = 10^{13} + 10^{12} = 10^{12} \times 11$ donc d'après le question précédente, le reste de la division euclidienne de 11.000.000.000.000 par 13 est 11.
4. $10^{15} \equiv 12[13]$ et $25 \equiv 12[13]$ donc $25 \times 10^{15} + 1 \equiv 12[13]$ donc le reste cherché dans la division euclidienne par 13 est 12.