CORRIGE-BAREME Série G2

CORRIGE	Barème

Exercice 1 (5 points)

Soit E_V l'ensemble de validité

$E_V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ tel\ que\ x > 0\ et - y > 0\}$

donc $E_V =]0; +\infty[\times] - \infty; 0[$ ------→ 0,25 pt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ lnx + ln(-y) = ln3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ ln(-xy) = ln3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ -xy = 3 \end{cases}$$ ------→ 0,5 pt

La résolution de ce système donne $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ = {(3 ;-1)} ------→ 2×0,5 pt

1- $\boldsymbol{P(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3}$

a) Je calcule P(3)

P(3) = 0 ------→ 0,25 pt

- **Factorisation de $P(x)$**

$P(3) = 0$

donc $P(x)$ est factorisable par $x - 3$ ------→ 0,25 pt

Utilisation correcte de la division euclidienne ou de la méthode des coefficients indéterminés. ------→ 0,5 pt

On obtient P(x) =($-x^2 - 2x - 1$) = $-(x + 1)^2(x - 3)$ ------→ 0,5 pt

- **Signe de $P(x)$**

Le signe de $P(x)$ est celui de $-(x - 3)$ car $\forall x \epsilon \mathbb{R}, (x + 1)^2 \geq 0$

P(x) = 0 ⇔ x = 3 ou x = - 1 ------→ 0,25 pt

Tableau de singe

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
-x + 3		+	|	+	0	-	
P(x)		+	0	+	0	-	

------→ 0,25 pt

$\forall x \epsilon\ ]-\infty; -1[\cup]-1; 3[, P(x) > 0$

$\forall x \epsilon]3; +\infty[, P(x) < 0$

$\forall x \epsilon \{-1; 3\}, P(x) = 0$

------→ 0,5 pt

b) Solution de l'inéquation

$x \in E_V \Leftrightarrow 2 - 3x > 0$

$-3x > -2 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$ Donc $E_V =] - \infty; \frac{2}{3}[$

Posons $\forall x \epsilon]0; +\infty[$, et $X \in \mathbb{R}, X = \ln(2 - 3x)$

L'inéquation devient : $-X^3 + X^2 + 5X + 3 \leq 0$ ------→ 0,25 pt

Posons $P(X) \leq 0 \Leftrightarrow X \in [3; +\infty[$

L’ensemble des solutions de l’inéquation (I) est $S_{\mathbb{R}} =]0; \frac{e^3-2}{-3}]$	0,5 pt

Exercice 2 (5 points)

1- a) **Tableau de calculs**

$\sum_{i=1}^{10} x_i$	$\sum_{i=1}^{10} y_i$	$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10} y_i^2$
310	4.170	135.610	10.414	1.791 .500

0,5 pt

b) Je justifie que le budget moyen et du chiffre d’affaire moyen sont respectivement $\overline{X} = 31$ **et** $\overline{Y} = 417$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

$\overline{X} = 31$ 0,25 pt

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10}$$

$\overline{Y} = 417$ 0,25 pt

a) Je calcule de V(X) , V(Y) et COV (X ,Y)

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \overline{X}^2$$

V(X) = 80 ,4 0,5 pt

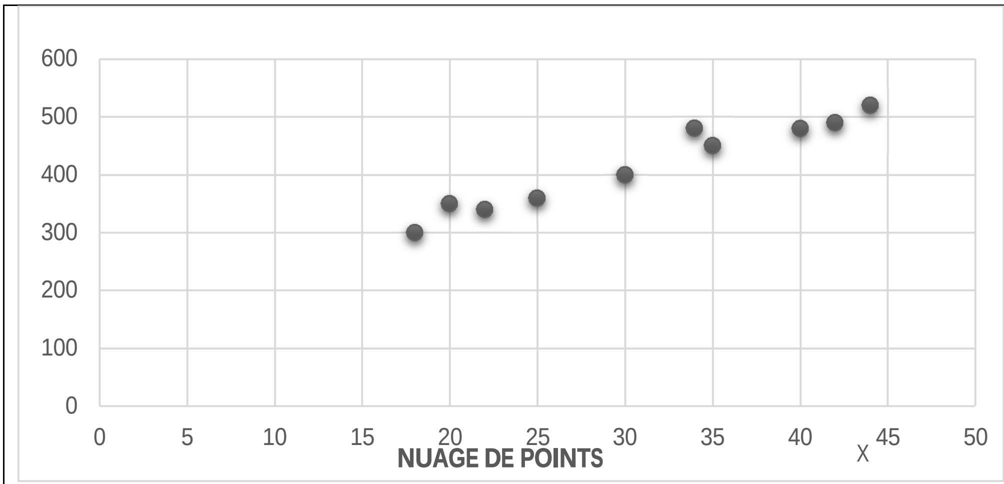
$$V(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \overline{Y}^2$$

V(Y) = 5261 0,5 pt

$$COV(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i}{10} - \overline{X}.\overline{Y}$$

COV(X, Y) = 634 0,5 pt

2- a) Je construis le nuage de points



0,5 pt

b) Un ajustement linéaire est possible car les points du nuage sont pratiquement alignés . 0,25 pt

3- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire.

$r = \dfrac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X).\text{V(Y)}}}$

r = 0 ,97 0,5 pt

4- Je détermine une équation de la droite de régression (D)

On a (D) : y= ax+b

$a = \dfrac{COV(X,Y)}{V(X)}$ = 7 ,89 0,25 pt

$b = \overline{Y} - a\overline{X}$ = 172 ,41 0,25 pt

Donc (D) : y= 7,89x+172,41 0,25 pt

5- Calcul du chiffre d'affaire

On a : y = 7,89x+172,41

Pour x = 50 , y = 7,89×50 + 172,41

Y = 566,91 0,25 pt

Donc le chiffre d'affaires est **566.910 .000** FCFA 0,25 pt

Problème (10 points)

Partie A (4 points)

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - 4lnx$

1- **a) Je calcule la limite en 0 et en** $+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} - 4lnx = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(1 - 4xlnx)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$$ 0,25 pt

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - 4lnx = -\infty$ 0,25 pt

b) **J'étudie les variations de g**

- **Je calcule la dérivée de g**

g est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = \frac{-1-4x}{x^2}$

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, g'(x) = \frac{-(1+4x)}{x^2}$ --→ 0,5 pt

- **Signe de la dérivée et sens de variation de g**

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, g'(x) < 0$, alors g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ ----------→ 0,5 pt

c) **Tableau de variation de g**

x	0	$\propto$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

------------------------→ 0,5 pt

2 **-a) Je démontre que $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto \epsilon]0;+\infty[$**

g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc, g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$, or $0\epsilon]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto \epsilon]0;+\infty[$ --→ 0,5 pt

b) **Signe de $g(x)$**

D'après le tableau de variation :

g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$x\epsilon]0;\alpha[\Longrightarrow x < \propto$ d'où $\forall x\epsilon]0;\propto[, g(x) > g(\propto) or\ g(\propto) = 0$.

Donc $\forall x\epsilon]0;\propto[, g(x) > 0$ --→ 0,5 pt

$x\epsilon]\alpha;+\infty[\Longrightarrow x > \propto$ d'où $\forall x\epsilon]\propto;+\infty[, g(\propto) > g(x)\ or\ g(\propto) = 0$.

Donc $\forall x\epsilon]\propto;+\infty[, g(x) < 0$--→ 0,5 pt

c) **Je démontre que $\propto \epsilon]1,22;1,23[$**

on a : $\left. \begin{array}{l} g(1{,}22) = 0{,}024 \\ g(1{,}23) = -0{,}015 \end{array} \right]$ --→ 0,25 pt

Comme $g(1{,}22) \times g(1{,}23) < 0$ alors $1{,}22 < \propto < 1{,}23$ --→ 0,25 pt

<u>Partie B</u> **(5,5 points)**

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + 2(lnx)^2$

1- **a) Je calcule les limites de f aux bornes de D_f**

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} + 2(lnx)^2 = +\infty$ --→ 0,25 pt

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2(lnx)^2 = +\infty$ --→ 0,25 pt

b) Je calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+2(lnx)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\frac{2(lnx)^2}{x} = 0$ ---------→ 0,25 pt

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$. ---------→ 0,25 pt

2- a) **Je démontre que** $\forall x\epsilon]0;+\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x}g(x)$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x\epsilon]0;+\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\times lnx$

$= -\frac{1}{x}(\frac{1}{x}-4lnx)$ ---------→ 0,25 pt

$\forall x\epsilon]0;+\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x}g(x)$ car $g(x) = \frac{1}{x}-4lnx$ ---------→ 0,25 pt

b) **J'étudie le signe de** $f'(x)$ **et je dresse le tableau de variation de** f

le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$ car $\forall x\epsilon]0;+\infty[, \frac{1}{x} > 0$ ---------→ 0,25 pt

or $\begin{cases}\forall x\epsilon]0;\propto[, g(x) > 0\\ \forall x\epsilon]\propto;+\infty[, g(x) < 0\end{cases}$ ---------→ 0,25 pt

D'où $\forall x\epsilon]0;\propto[, f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $]0;\propto[$, ---------→ 0,5 pt

$\forall x\epsilon]\propto;+\infty[, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $]\propto;+\infty[$ ---------→ 0,5 pt

Tableau de variation de f

x	0		$\propto$	
$f'(x)$		-		+
$f(x)$		$+\infty$ ↘	$f(\propto)$	↗ $+\infty$

---------→ 0,5 pt

3- a) **Je démontre que** $f(\propto) = \frac{1}{8\propto^2}+\frac{1}{\propto}$

on a : $f(\propto) = \frac{1}{\propto}+2(ln\propto)^2$

$g(\propto) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\propto}-4ln\propto = 0$

$\Leftrightarrow -4ln\propto = -\frac{1}{\propto}$

$\Leftrightarrow ln\propto = \frac{1}{4\propto}$ ---------→ 0,25 pt

Ainsi, $f(\propto) = \frac{1}{\propto}+2(\frac{1}{4\propto})^2$

$= \frac{1}{\propto}+\frac{2}{16\propto^2}$

Donc $f(\propto) = \frac{1}{8\propto^2}+\frac{1}{\propto}$ ---------→ 0,5 pt

b) J'**encadre** $f(\propto)$ **à** 10^{-2} **près et je donne une valeur approchée de** $\propto$ **à** 10^{-1} **par défaut.**

On a : $1{,}22 < \propto < 1{,}23$

$(1{,}22)^2 < \propto^2 < (1{,}23)^2$

$8(1{,}22)^2 < 8\propto^2 < 8(1{,}23)^2$

$\frac{1}{8(1{,}23)^2} < \frac{1}{8\propto^2} < \frac{1}{8(1{,}22)^2}$

On a : $\frac{1}{1{,}23} < \frac{1}{\propto} < \frac{1}{1{,}22}$

Par somme membre à membre, on a :

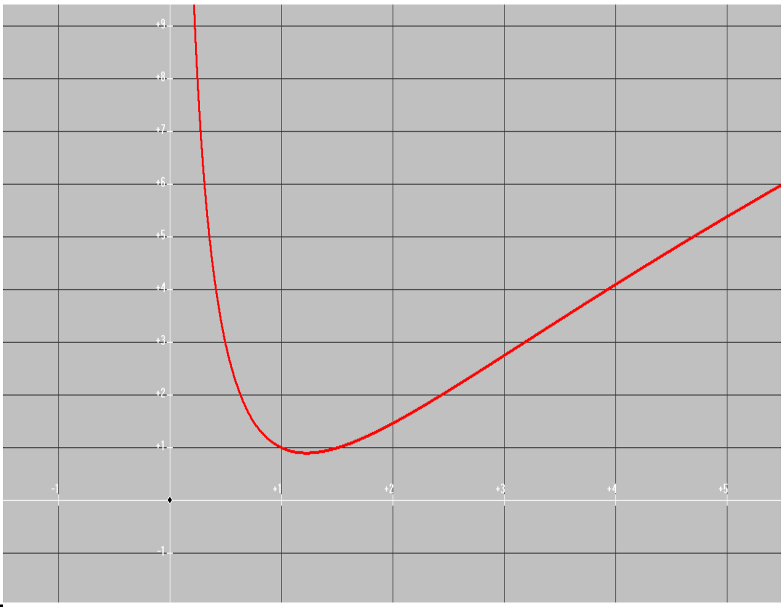
$\frac{1}{8(1{,}23)^2} + \frac{1}{1{,}23} < \frac{1}{8\propto^2} + \frac{1}{\propto} < \frac{1}{8(1{,}22)^2} + \frac{1}{1{,}22}$ 0,25 pt

$0{,}89 < f(\propto) < 0{,}90$

$0{,}8 < f(\propto) < 0{,}9$ 0,25 pt

Donc $f(\propto) = 0{,}8$ par défaut 0,25 pt

2- **Construction de (C_f)**



0,5 pt

<u>Partie C</u> (0,5 point)

Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $h(x) = xlnx - x + 1$

a) **Je démontre que h est une primitive de la fonction ln sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.**

h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \epsilon]0; +\infty[, h'(x) = lnx$ donc h est une primitive de la fonction ln sur]0 ;+∞[0,25 pt

b) **Je calcule $h(e^2) - h(e)$**

$h(e^2) - h(e) = e^2$ 0,25 pt