CORRIGE-BAREME Série D

CORRIGE	Barème
Exercice 1 (2 points)	
1-F 2-F 3-V 4-V	4×0,5 pts
Exercice 2 (2 points)	
1-B 2-A 3-B 4-A	4×0,5 pts
Exercice 3 (3 points)	
1- a) Je vérifie que 3i est solution de l'équation P(z) = 0	
P(3i) = 0 donc 3i est solution de l'équation P(z) = 0	0,25 pt
b) Je détermine les nombres complexes *a* et b tels que **$P(z) = (z - 3i)(iz^2+az+b)$**	
Méthode des coefficients indéterminés ou division euclidienne correcte	0,25 pt
$a = 2 - 2i \;\; et \;\; b = 2 - 3i$	2×0,25 pt
2- a) Je calcule $(2 + i)^2$	
$(2 + i)^2 = 3 + 4i$	0,25 pt
b) Je résous l'équation (E)	
$\Delta = -4(3 + 4i) = [2i(2 + i)]^2$	0,25 pt
$z_1 = -1 \; et \; z_2 = 3 + 2i$	2×0,25 pt
c) Je déduis de 1-a) et 2-b) les solutions de l'équation P(z) = 0	
D'après 1-a) et 2-b) les solutions de l'équation P(z) = 0 sont 3i, -1 et 3 +2i	0,25 pt
3- a) Je détermine l'affixe du point K	
$z_K = \frac{(zA+zB)}{2} = 1 + i$	0,25 pt
b) Je justifie que B appartient à (Γ)	
On vérifie que $\vert z_B - 1 - i\vert = \sqrt{5}$	0,25 pt
c) Je détermine (Γ)	
$\vert z - 1 - i\vert = \sqrt{5} \Rightarrow KM = \sqrt{5}$, donc (Γ) est le cercle de centre K et de rayon $\sqrt{5}$	0,25 pt
Exercice 4 (4 points)	
1- a) Je justifie que f est croissante sur [0 ;1].	
Pour tout $x \in [0;1], f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$; $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $[0;1]$.	0,5 pt
b) Je démontre par récurrence	
• $u_0 = 0$ or $u_0 \in [0;1]$ • $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \in [0\,;1] \Rightarrow f(u_k) \in [\,f(0)\,;f(1)]$	0,25 pt

$\Rightarrow u_{k+1} \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ or $\left[\frac{1}{2} ; 1\right] \subset [0 ; 1]$ Pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$	0,5 pt
c) Je démontre que (u_n) est convergente. $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$	0,5 pt
or $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n+2}{u_n+4} > 0$ et $-(u_n - 1) > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante. De plus (u_n) est majorée par 1 donc (u_n) est convergente.	0,25 pt
2-a) Je démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$: $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ Alors $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2}{5}\left(\frac{u_n-1}{u_n+2}\right)$	0,5 pt
$v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$ alors (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et 1[er] terme	0,25 pt
$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = -\frac{1}{2}$	0,25 pt
b) J'exprime v_n en fonction de n. $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$ $v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$	0,25 pt
c) Expression de u_n $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$ $u_n = \frac{-\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$	0,5 pt
d) Je calcule la limite de (u_n) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$	0,25 pt

Exercice 5 (4 points)

1- **a) Je calcule la limite de *f* en +∞**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{e^x} = 0$ ---------- 0,25 pt

- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ $en\ +\infty$ ---------- 0,25 pt

b) Je démontre que (C) admet une branche parabolique en -∞.

En posant $X = -x$,

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X^2-3}{2} e^X$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X^2-3}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X^2-3}{-2X} e^X$

$$= \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{-2} e^X$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{X}{2} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \end{cases}$$

---------- 0,25 pt

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) ---------- 0,25 pt

2- **a) Démonstration**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^{-x} + \left(\frac{x^2-3}{2}\right)(-e^{-x})$$
$$= e^{-x}\left(x - \frac{x^2-3}{2}\right)$$
$$= e^{-x}\left(\frac{2x - x^2 + 3}{2}\right)$$
$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{3 + 2x - x^2}{2}\right)$$

---------- 0,25 pt

b) J'étudie le signe de f'(x) et je dresse son tableau de variation

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^{-x}}{2} > 0$, $f'(x)$ à le même signe que $3 + 2x - x^2$ alors :

$\forall x \in\ ]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]3;+\infty[, f'(x) < 0$

$\forall x \in\ ]-1;3[, f'(x) > 0$

---------- 0,25 pt

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e$	↗	$3e^{-3}$	↘	0

0,25 pt

3 – a) J'étudie la position relative de (C) et l'axe (OI).

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2} \geq 0$

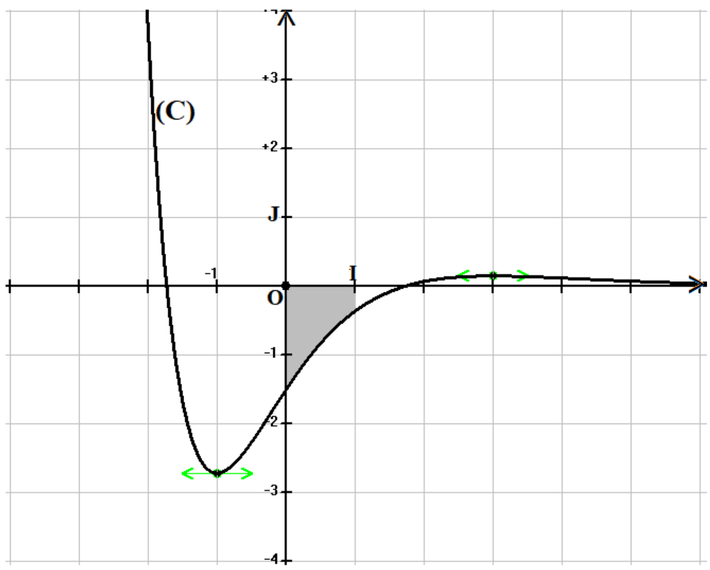
Alors

$\forall\, x \in \left]-\infty\,; -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}; +\infty\right[, f(x) > 0$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (OI)

$\forall\, x \in \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[, f(x) < 0$ alors $(\mathcal{C})$ est au-dessous de (OI)

0,5 pt

b) Représentation graphique 0,5 pt



4 - a) Je calcule *A*

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

$$A = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$$
$$= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1$$
$$= -e^{-1} - e^{-1} + e^0$$
$$A = -2e^{-1} + 1$$ 0,5 pt

b) Justification

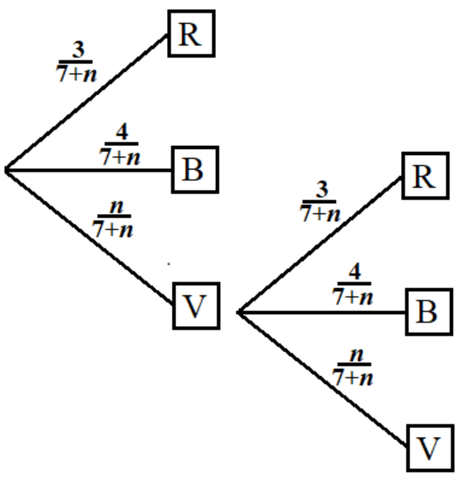
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, -f'(x) + xe^{-x} = \frac{-(3 + 2x - x^2)e^{-x}}{2} + xe^{-x}$$
$$= \frac{(-3 - 2x + x^2 + 2x)}{2}e^{-x}$$
$$= \frac{(x^2 - 3)}{2}e^{-x}$$
$$-f'(x) + xe^{-x} = f(x)$$ 0,25 pt

c) Calcul de l'aire $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \left(-\int_0^1 f(x)dx\right) \times ua$$
$$= \left(\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 xe^{-x}dx\right) \times 8cm^2$$
$$= ([f(x)]_0^1 - A) \times 8cm^2$$
$$= \left(-e^{-1} + \frac{3}{2} + 2e^{-1} - 1\right) \times 8cm^2$$
$$= \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\right)8cm^2$$ 0,5 pt

Exercice 6 (5 points)

Arbre de probabilité



VALEURS DE X : $-2400;\ -600;\ -500; 1600; 3200$

$P(X = -2400) = \dfrac{4}{7+n}$

$P(X = -600) = \dfrac{n}{7+n} \times \dfrac{4}{7+n} = \dfrac{4n}{(7+n)^2}$

$P(X = -500) = \dfrac{n}{7+n} \times \dfrac{n}{7+n} = \dfrac{n^2}{(7+n)^2}$

$P(X = 3200) = \dfrac{3}{7+n}$

$P(X = 1600) = \dfrac{n}{7+n} \times \dfrac{3}{7+n} = \dfrac{3n}{(7+n)^2}$

$E(X) = \dfrac{-2400 \times 4}{7+n} + \dfrac{-600 \times 4n}{(7+n)^2} + \dfrac{-500n^2}{(7+n)^2} + \dfrac{1600 \times 3n}{(7+n)^2} + \dfrac{3200 \times 3}{7+n}$

$E(X) = \dfrac{-500n^2 + 2400n}{(7+n)^2}$

Le signe de $E(X)$ est celui de $-500n^2 + 2400n$.
Donc $E(X) = 0 \Leftrightarrow -500n^2 + 2400n = 0$. On obtient $n = 0\ ou\ n = 4{,}8$
Par conséquent $E(X) > 0\ pour\ n \in]0; 4{,}8[$.
Conclusion : pour que la loterie soit favorable aux femmes de l'association, il faut que $E(X) > 0$, donc le nombre de boules vertes à introduire au minimum est : 1.

GRILLE DE CORRECTION CRITERIEE

CM1	• Leçon probabilité • Choix des évènements • Calculs des probabilités • Valeurs de la variables X • Espérance mathématiques E(X) • Signe de E(X) • conclusion	0,75 pt 2 indic sur 8 ⟶ 0,25 pt 4 indic sur 8 ⟶ 0,5 pt 5 indic sur 8 ⟶ 0,75 pt
CM2	• Traduction exacte des données • Calculs exact des probabilités • Valeurs prises par X • Calcul exact de E(X) • Étude correcte du signe de E(X) • Valeur exacte de n • réponse correcte	**2,5 pts** 1 indic sur 7 ⟶ 0,25 pt 2 indic sur 7 ⟶ 0,75 pt 3 indic sur 7 ⟶ 1 pt 4 indic sur 7 ⟶ 1,25 pt 5 indic sur 8 ⟶ 2,5 pt
CM3	• Démarche correcte • Précision • réponse correcte	**1,25 pts** 1 indic sur 3 ⟶ 0,75 pt 2 indic sur 3 ⟶ 1,25 pt
CP	• Concision • Originalité • présentation	**0,5 pt** 1 indic sur 3 ⟶ 0,25 pt 2 indic sur 3 ⟶ 0,5 pt