

2-

a) Vérifions que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$.

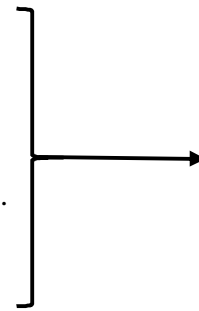
n_0 est solution de (S) donc $\begin{cases} n_0 \equiv 13[19] \\ n_0 \equiv 6[12] \end{cases}$

Pour tout nombre entier relatif n solution de (S) on a :

$n \equiv 13[19]$ et $n_0 \equiv 13[19]$ équivaut à $n \equiv n_0[19]$.

$n \equiv 6[12]$ et $n_0 \equiv 6[12]$ équivaut à $n \equiv n_0[12]$.

D'où : (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$.



0,25 pt

b) Démontrons que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

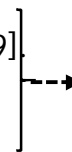
• $n \equiv n_0[19] \Leftrightarrow 19|n - n_0$ et $n \equiv n_0[12] \Leftrightarrow 12|n - n_0$

Or $PGCD(19; 12) = 1$. Donc, $12 \times 19|n - n_0$ c'est-à-dire $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

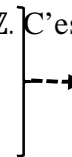
D'où $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ implique que $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

• Réciproquement, si $n \equiv n_0[12 \times 19]$, alors $n - n_0 = 12 \times 19k, k \in \mathbb{Z}$. C'est-à-dire $n \equiv n_0[19]$ et $n \equiv n_0[12]$.

Ainsi, $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.



0,25 pt



0,25 pt

3- a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide on obtient le couple $(-5; 8)$.

Pour $(u; v) = (-5; 8), N = 678$.



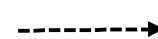
0,5 pt

b) Déterminons l'ensemble des solutions de (S) .

On déduit des questions 2-a) et 2-b) que (S) équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$ avec n_0 une solution quelconque de (S) . $N = 678$ est une solution de (S) .

Donc (S) équivaut à $n \equiv 678[12 \times 19]$.

D'où, l'ensemble des solutions de (S) est $\{678 + 12 \times 19k, k \in \mathbb{Z}\}$.



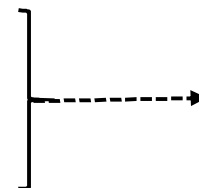
0,25 pt

4- Déterminons le reste de cette division de n par 228.

On a : $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$.

Donc $n \equiv 678[12 \times 19]$. C'est-à-dire $n \equiv 678[228]$.

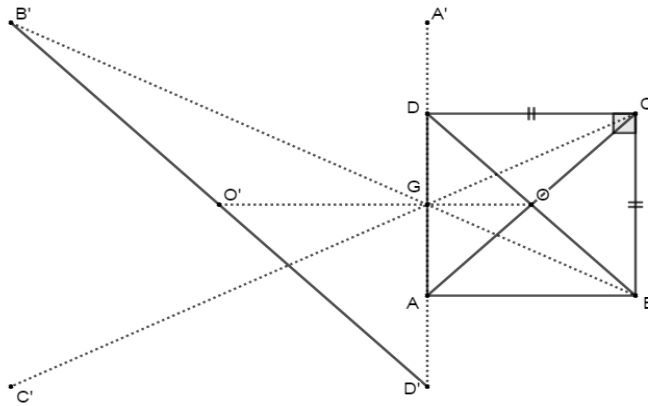
Or $678 \equiv 222[228]$. Donc, $n \equiv 222[228]$ et comme $222 < 228$, alors le reste de la division euclidienne de n par 228 est 222.



0,25 pt

Exercice 4 (3,5 points)

1- a) $G = \text{bar}\{(A; 2), (B; -1) \text{ et } (C; 1)\} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{BC}$



*Le carré
ABCD et le
point G
0,25*

*Pour les
autres
points :
-2 points
représentés=
0,25 pt
-au moins 3
points
représentés=
0,5 pt*

b) Démontrons que h est une homothétie de centre G dont on précisera le rapport.

Pour tous M et M' du plan, on a :

$$\begin{aligned} h(M) = M' &\Leftrightarrow \vec{GM'} = 2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} \\ &\Leftrightarrow \vec{GM'} = 2\vec{MG} \text{ car } G = \text{bar}\{(A; 2), (B; -1) \text{ et } (C; 1)\} \\ &\Leftrightarrow \vec{GM'} = -2\vec{GM} \end{aligned}$$

Donc h est l'homothétie de centre G et de rapport -2

---> 0,25 pt

c) Construction des images O' ; A' ; B' ; C' et D respectivement des points O ; A ; B ; C et D par h.

$$\begin{aligned} h(O) = O' &\Leftrightarrow \vec{GO'} = -2\vec{GO} \\ h(A) = A' &\Leftrightarrow \vec{GA'} = -2\vec{GA} \\ h(B) = B' &\Leftrightarrow \vec{GB'} = -2\vec{GB} \\ h(C) = C' &\Leftrightarrow \vec{GC'} = -2\vec{GC} \\ h(D) = D' &\Leftrightarrow \vec{GD'} = -2\vec{GD} \end{aligned}$$

Voir figure

d) Je justifie que G est le barycentre des points pondérés (A', 2), (B', -1) et (C', 1)

On a :

$$\begin{aligned} \vec{GA'} = -2\vec{GA} &\Leftrightarrow 2\vec{GA'} = -4\vec{GA} \\ \vec{GB'} = -2\vec{GB} &\Leftrightarrow -\vec{GB'} = 2\vec{GB} \\ h(C) = C' &\Leftrightarrow \vec{GC'} = -2\vec{GC} \end{aligned}$$

Donc

$$2\vec{GA'} - \vec{GA'} + \vec{GC'} = -4\vec{GA} + 2\vec{GA} - 2\vec{GC}$$

$$2\vec{GA'} - \vec{GA'} + \vec{GC'} = -2(2\vec{GA} - 2\vec{GA} + \vec{GC})$$

$$2\vec{GA'} - \vec{GA'} + \vec{GC'} = \vec{0} \text{ car } G = \text{bar}\{(A; 2), (B; -1), (C; 1)\}$$

D'où $G' = \text{bar}\{(A'; 2), (B'; -1), (C'; 1)\}$.

---> 0,25 pt

2- a) Je reproduis et je complète le tableau de correspondance de r .

r ↻	O	A	B	C	D	----->
	O	B	C	D	A	

0,25 pt

b) Je reproduis et je complète le tableau de correspondance de f .

f ↻	O	A	B	C	D	----->
	O'	B'	C'	D'	A'	

0,25 pt

c) Justifions que les droites $(B'D')$ et (AC) sont perpendiculaires telles que $B'D' = 2AC$.

- h est l'homothétie de centre G et de rapport -2 . Donc h est la similitude directe de centre G, de rapport 2 et d'angle π .
- r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc r est la similitude directe de centre O, de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- $f = hor$. Donc f est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $(\widehat{\pi + \frac{\pi}{2}}) = (\widehat{-\frac{\pi}{2}})$.

Or $f(A) = B'$ et $f(C) = D'$. Donc $B'D' = 2AC$ et $Mes(\widehat{AC, B'D'}) = -\frac{\pi}{2}$. D'où les droites $(B'D')$ et (AC) sont perpendiculaires telles que $B'D' = 2AC$ ----->

0,5 pt

3- a) Je détermine les affixes des points O ; A ; B ; C ; D et G.

Points	O	A	B	C	D	G	
Affixes	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$	0	1	$1 + i$	i	$\frac{1}{2}i$	----->

0,5 pt

b) Je détermine les écritures complexes des transformations du plan h, r et f .

- L'écriture complexe de h est : $z' = -2z + \frac{3}{2}i$
- L'écriture complexe de r est : $z' = iz + 1$ ----->
- $f = hor$ Donc l'écriture complexe de f est : $z' = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$ ----->

0,25 pt

0,25 pt

c) Déterminons le point invariant de f .

Soit Ω d'affixe w le point invariant de f .

On a : $w = \frac{-2 + \frac{3}{2}i}{1 + 2i} = \frac{1}{5} + \frac{11}{10}i$ ----->

0,25 pt

EXERCICE 5 (5 points)

Partie A

1- Je justifie f est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{-1}{nx}} = 0 \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{nx}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ en posant que } X = \frac{-1}{nx} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0 = f_n(0) = 0$ donc f_n est continue en 0 ----->

0,5 pt

2- Je justifie que (c_n) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\frac{-1}{nx}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{nx}} = 0 \text{ ainsi } f_n'(0) = 0 \text{ donc } (c_n) \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0} \text{ ----->}$$

0,5 pt

3- Je calcule la limite de f_n en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{-1}{nx}} = +\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-1}{nx}} = \lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1 \text{ en posant que } X = \frac{-1}{nx} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right. \text{ ----->}$$

0,25 pt

4- Je justifie f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x \in]0; +\infty[, f_n'(x) = e^{\frac{-1}{nx}} + \frac{1}{nx^2} (e^{\frac{-1}{nx}}) x = \left(1 + \frac{1}{nx}\right) e^{\frac{-1}{nx}} \text{ et pour } x > 0 \text{ ----->}$$

0,25 pt

$\left(1 + \frac{1}{nx}\right) > 0$ et $e^{\frac{-1}{nx}} > 0$ d'où $f_n'(x) > 0$ et f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ ----->

0,25 pt

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		
$f_n(x)$	0	$+\infty$

----->

0,25 pt

5- a) Pour $t > 0$, $g(t) = e^{-t} + t - 1$ et $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{2}t^2$

$$\text{j'en déduis que } 0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$$

$$\text{On a } 0 \leq g(t) \leq \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{1}{2}t^2 \text{ pour } t = \frac{1}{nx}$$

$$\text{on a } 0 \leq e^{-\frac{1}{nx}} + \frac{1}{nx} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{nx}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x e^{-\frac{1}{nx}} - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x} \text{ ainsi } 0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x}$$

----->

0,5 pt

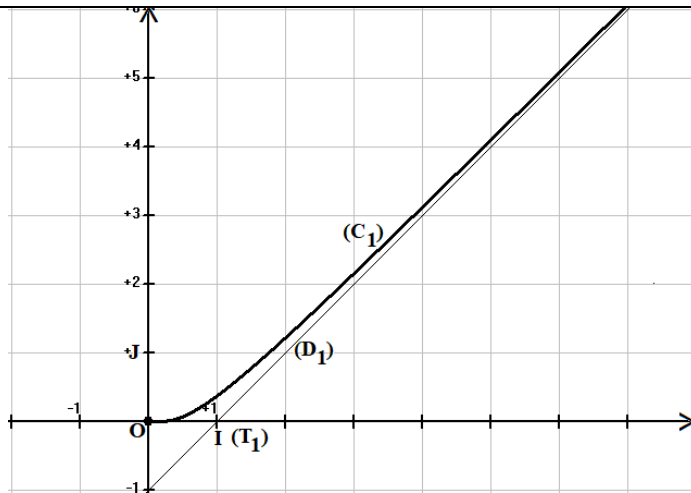
b) Justifie que la droite (D_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote à (c_n)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) = 0 \text{ donc la droite } (D_n)$$

d'équation $y = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ est une asymptote à (c_n) en $+\infty$ ----->

0,25 pt

c) Construction : voir annexe



0,75 pt

Partie B

1- Je démontre que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique u_n sur $]1; +\infty[$.

f_n est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ et $f_n(]1; +\infty[) = [e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ or $1 \in [e^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$

Donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique u_n sur $]1; +\infty[$.

0,25 pt

2- Je démontre que u_n est solution de l'équation $x \ln x = \frac{1}{n}$

$$f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow u_n e^{\frac{-1}{nu_n}} = 1 \Leftrightarrow u_n = e^{\frac{1}{nu_n}} \Leftrightarrow \ln u_n = \frac{1}{nu_n} \Leftrightarrow u_n \ln u_n = \frac{1}{n}$$

donc u_n est solution de l'équation $x \ln x = \frac{1}{n}$.

0,25 pt

3- a) Je justifie que la fonction h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

La fonction h est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $h'(x) = \ln x + 1$ et pour $x \geq 1$; $\ln x + 1 > 0$

D'où $h'(x) > 0$ h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

0,25 pt

b) Je justifie que u_n est décroissante

$$u_n \text{ est solution de l'équation } h(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(u_n) = \frac{1}{n} \text{ et } h(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{or pour } n \geq 1, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow h(u_{n+1}) < h(u_n)$$

et h étant croissante $u_{n+1} < u_n$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

0,5 pt

c) Je justifie que la suite (u_n) est convergente

On a $u_n \in]1; +\infty[$,

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

0,25 pt

Exercice 6 (5 points)

Pour calculer le cout total du matériel de construction de l'arrêt de bus, je vais ;

- utiliser la géométrie analytique de l'espace.
- calculer les longueurs FG et GH.
- calculer la surface S du toit puis le prix P_1 du toit.
- déterminer une équation du plan (ABC).
- calculer la longueur de la poutre HC qui est la distance du point H au plan (ABC)
- calculer le prix d'une poutre puis celui P_2 des trois poutres.
- calculer le prix total du matériel $P_T = P_1 + P_2$

Résolution

- je calcule les longueurs FG et GH.

On a $F(-2 ; -1 ; 1)$ $G(2 ; -1 ; 1)$ $H(2 ; \frac{3}{2} ; 1)$

$$FG = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-1 + 1)^2 + (1 - 1)^2} = 4 \text{ de même } HG = \frac{5}{2}$$

- je calcule la surface S du toit puis le prix P_1 du toit

$$S = FG \cdot GH = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10 \text{ m}^2 \text{ le prix du toit est } P_1 = 20000 \cdot 10 = 200000f$$

- je détermine une équation du plan (ABC)

Le plan (ABC) passe par le point $A(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2})$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$

il a pour équation $2(x + \frac{1}{2}) + 1(x + \frac{1}{2}) + 2(x + \frac{1}{2}) = 0$ donc

$$2x + y + 2z + \frac{5}{2} = 0$$

- je calcule la longueur de la poutre HC qui est la distance du point H au plan (ABC)

$$HC = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 1 + \frac{5}{2}|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{10}{3} \text{ m}$$

- je calcule le prix d'une poutre puis celui P_2 des trois poutres

Le prix d'une poutre est $p = \frac{10}{3} \cdot 22000 = \frac{220000}{3}$ le prix des trois poutres est $P_2 =$

$220000f$

- je calcule le prix total du matériel $P_T = P_1 + P_2$

$$P_T = P_1 + P_2 = 200000f + 220000f = 420000f$$

GRILLE DE CORRECTION CRITERIEE

Critères	Indicateurs	Barème
CM1 pertinence des outils mathématiques en rapport avec le contexte	-utilisation de géométrie analytique de l'espace -calcul de longueur -calcul de surface - détermination d'équation de plan - calcul de distance d'un point à un plan - calcul de prix	0,75 point 1 indic sur 6 → 0,25pt 3 indic sur 6 → 0,5pt 4 indic sur 6 → 0,75 pt
CM2 utilisation correcte des outils mathématiques	- utilisation correcte de la formule $FG = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-1 + 1)^2 + (1 - 1)^2}$ - Détermination correcte de l'équation du plan (ABC) -Utilisation correcte de la formule $HC = \frac{ 2 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} }{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{10}{3}$ - Calcul correcte de surface. - Calcul correcte de prix	2,5 points 1 indic sur 5 → 0,5 pt 2 indic sur 5 → 1 pt 3 indic sur 5 → 1,5pt 4 indic sur 5 → 2,5 pt
CM3 cohérence des réponses	<ul style="list-style-type: none"> • Démarche correcte • Précision • réponse correcte 	1,25 points 1 indic sur 3 → 0,75 pt 2 indic sur 3 → 1,25 pt
CP critères de perfectionnement	<ul style="list-style-type: none"> • Concision • Originalité • Bonne présentation 	0,5 point 1 indic sur 3 → 0,25 pt 1 indic sur 3 → 0,5 pt