



MATHÉMATIQUES

Série C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Le candidat utilisera deux (02) feuilles de papier millimétré

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque proposition suivie de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse. Aucune justification n'est demandée.

N°	AFFIRMATIONS
1	Soit (D) une droite ; A un point n'appartenant pas à (D) et A' le projeté orthogonal de A sur (D) . L'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MA'} = \ln 2$ est une conique.
2	Pour tout nombre réel a tel que $0 < a < 1$, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
3	La partie imaginaire du nombre complexe $i^2\sqrt{3}$ est $\sqrt{3}$
4	Soit a et b deux nombres réels et f une fonction continue et décroissante sur $]a ; b[$. Si f est minorée sur $]a ; b[$ alors f admet une limite finie à droite en a .

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B et C et permettent d'obtenir trois réponses dont une seule est vraie.

Tu recopieras sur ta copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

N°	ENONCÉS	REponses	
1	Soit f une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que f soit dérivable sur \mathbb{R} et f^{-1} sa bijection réciproque. Si $f(1) = 0$ et $f'(1) = -\frac{1}{3}$ alors $f^{-1} \dots$	A	est dérivable en 1
		B	est dérivable en 0
		C	n'est pas dérivable en 0
2	Si f est une fonction telle que : $\forall x \in]5; +\infty[, f(x) - 2 \leq \frac{x+3}{x^2}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$	A	$+\infty$
		B	2
		C	0
3	La dérivée de la fonction $f: x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4}\right)$ sur $]0; +\infty[$ est...	A	$f'(x) = 1 + \sqrt{x}$
		B	$\ln(4)$
		C	$f'(x) = \frac{1}{2x + 2\sqrt{x}}$
4	$\overline{1110110}$ est l'écriture en base 2 du nombre ...	A	118
		B	200
		C	124

EXERCICE 3 (3 points)

1. Résous dans \mathbb{Z}^2 le système (S): $\begin{cases} x + 3y \equiv 0[5] \\ 2x + 3y \equiv 1[5] \end{cases}$

Dans la suite, on admet que les solutions du système (S) sont les couples $(5k + 1; 5k + 3)$ où k est un entier relatif.

2. Deux nombres entiers naturels m_1 et m_2 s'écrivent : $m_1 = \overline{1p00q2}^8$ et $m_2 = \overline{p1q003}^7$
- Démontre que m_1 et m_2 sont divisibles par 5 si et seulement si le couple $(p; q)$ est solution du système(S).
 - Déduis-en les valeurs de p et q pour que m_1 et m_2 soit divisibles par 5 et soient maximum.
 - Détermine les valeurs de m_1 et m_2 .
3. On admet que $m_1 = 57370$ et $m_2 = 104275$ et que 5737 est un nombre premier.
4. Détermine le nombre de diviseurs positifs de m_1 .

EXERCICE 4 (3,5 points)

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on donne un carré $ABCD$ de centre I tel que $AB = 3$ et F est le barycentre des points pondérés $(A; 4); (B; -1)$ et $(D; -1)$.

1. Démontre que A est milieu du segment $[FI]$ et que $FB^2 = \frac{45}{2}$.
2. On admet que $FB = FD$.
Détermine et construis (E_1) l'ensemble des points M du plan tels que : $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (B, \vec{i}, \vec{j}) , tels que $\vec{i} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{3}\vec{BA}$, On admet que la droite (AD) a pour équation : $y = 3$.
Soit (E_2) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que : $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(y - 3)^2 - 27$.
- Démontre que le point F a pour coordonnées $(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$.
 - Sachant que pour tout point M du plan, $4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 2MF^2 - 27$, justifie qu'une équation de (E_2) dans le repère (B, \vec{i}, \vec{j}) est : $\frac{4(x+\frac{3}{2})^2}{3} + (y - 5)^2 = 1$.
 - Déduis-en que (E_2) est une ellipse dont on précisera le centre Ω et l'excentricité e .
 - Détermine les sommets de (E_2) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Construis (E_2) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 5 (4,5 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x-1}} + 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = (x - 1)\ln(x) + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$

D'unité 2cm et (Δ) la première bissectrice.

- Démontre que f est dérivable en 1.
- Démontre que : $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ et $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$
 - Démontre que f est croissante sur $]-\infty; 1[$
 - On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et f est croissante sur $]1; +\infty[$

- Dresse le tableau de variation de f .
- Justifie que (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction.
 - a) Démontre que : $\forall x \in]-\infty; 1[, f(x) - (x + 1) = (x - 1) \left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] - 1$
 b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
 c) On admet que : $\forall x \in]-\infty; 1[, \frac{x-1}{x-2} \leq (x - 1) \left[e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right] \leq 1$
 Détermine la position de relative de (C) par rapport à (D) sur $] -\infty; 1[$.
 - Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -1; -\frac{1}{2}[$
 - Détermine les coordonnées des points d'intersection A et B de (C) avec (Δ)
 - Trace (C) , (D) et (Δ) dans le même repère.

EXERCICE 6 (5 points)

Pour conserver ses produits agricoles, M. Yeo, un cultivateur de la région du PORO désire se faire confectionner un grenier en bois. Il confie son projet à l'ébéniste Zié, un féru des mathématiques qui après réflexion lui fait une proposition.

Zié explique que pour satisfaire les exigences de M. Yéo, le grenier aura la forme d'une pyramide $ABCDE$ comme l'indique la figure ci-dessous. $ABCD$ est un rectangle.

$ABCD$ est un rectangle.

Pour maintenir le grenier en équilibre stable, il calera une poutre contre la face ABE en un point H tel que : $5\vec{EH} = \vec{EA} + \vec{EB}$. La poutre touchera le sol en un point G .

Pour parvenir à la réalisation de son ouvrage, Zié munit l'espace du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ d'unité 2m. Dans cet espace, il obtient les informations suivantes :

- $A(1; -1; 3)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(0; 2; 1)$ et $E(3; 1; 2)$
- Le support (Δ) de la poutre est perpendiculaire au plan du sol et dirigé par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

Ayant entendu ces informations, M. Yeo désire connaître avec précision le point de contact de la poutre avec le sol et aussi la hauteur du grenier.

Ne sachant comment les exploiter, il sollicite son fils Daouda élève en classe de Terminale C qui, à son tour te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds aux préoccupations de M. Yeo.

