BACCALAURÉAT BLANC
AVRIL 2025

SÉRIE D – Coefficient 4
Durée : 4 h

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1 / 3, 2 / 3 et 3 / 3
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (2 *points*)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si elle est fausse.

1. Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
2. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(z_A), B(z_A)$ et $M(z)$.
   L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\text{Arg}\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, est
   la droite (AB) privée du point B.
3. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est $\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx$.

4. La suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 5 \\ 2U_{n+1} = -U_n \end{cases}$ est une suite géométrique.

EXERCICE 2 (2 *points*)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à l'affirmation juste.

1. a est un nombre réel strictement positif, m et n sont deux entiers naturels non nuls.
   $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{a}$ est égale à….
   A. $\sqrt[m+n]{a^{n+m}}$. B. $\sqrt[m\times n]{a^{n+m}}$. C. $\sqrt[m+n]{a^{n\times m}}$. D. $\sqrt{a^{m+n}}$.
2. Soit M, P et Q les points d'affixes respectives z ; 2 et i. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2| = |z-i|$ est : ….
   A. le cercle de centre Q et rayon 2 B. la perpendiculaire à (PQ) passant par P.
   C. la médiatrice du segment [PQ] D. le cercle de centre P et rayon 1

3. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
   On appelle variable aléatoire réelle une application de :
   A. $\Omega \to \mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \to \Omega$. C. $[0;1] \to \Omega$ D. $\Omega \to [0;1]$.
4. La forme exponentielle du nombre complexe $1-i$ est …..
   A. $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. B. $\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. C. $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. D. $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

EXERCICE 3 (3,5 *points*)

Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + (-5-i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$.

1- a) Calcule $P(2i)$.

b) Déduis - en que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$, où b et c sont des nombres complexes que tu préciseras.

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (-5 + i)z + 8 - 4i = 0$.

d) Déduis - en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2- Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J) unité graphique 1cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $3 + i$ et $2 - 2i$.

a) Place les points A, B et C dans le repère orthonormé direct (O, I, J).

b) Détermine la nature du triangle ABC.

EXERCICE 4 (4 *points*)

Soit g la fonction dérivable sur I et définie par : $g(x) = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$, où $I = [-2; -1]$.
On admet qu'il existe un nombre réel α tel que $-2 < \alpha < -1$ et $g(\alpha) = \alpha$.

1. a) Étudie les variations de g sur I.

b) Démontre que $g(I) \subset I$.

c) Démontre que : $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}.$$

a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in I$.

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|.$$

c) Démontre : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.

d) Étudie la convergence de la suite (U_n).

e) Détermine le plus petit entier naturel p tel que ; $\forall n \geq p$, U_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

EXERCICE 5 (3,5 *points*)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 - 2|x| \ln|x| \text{ , si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$,

(C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Justifie que f est continue en 0.

b) Étudie la dérivabilité de f en 0, puis interprète graphiquement le résultat.

Pour la suite, on étudiera f sur $[0; +\infty[$.

2. a) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.

3. a) Justifie que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -2(\ln(x) + 1)$.
   b) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 6 (*5 points*)

Dans le cadre de l'introduction des TIC à l'école, un établissement scolaire a organisé une visite d'étude dans une usine de fabrique de microprocesseurs.

Le directeur de la fabrique informe les élèves que 95% de la production journalière ne présentent pas de défaut.

Le service de contrôle qualité a mis en place un système de vérification systématique des microprocesseurs. Cette vérification sur la production journalière présentant un défaut n'est pas parfaite. 94% des microprocesseurs défectueux sont rejetés à l'issue du test et 3% des microprocesseurs qui ne présentent aucun défaut sont également rejetés.

Le Directeur affirme que le système de contrôle est fiable car sa marge d'erreur est inférieure à 2% .

les élèves veulent vérifier si l'information donnée par le directeur est correcte.

À l'aide d'une production argumentée et cohérente, réponds à leur préoccupation.