

# MATHÉMATIQUES

## SÉRIE D

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3  
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé*

### Exercice 1 (2 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si elle est fausse.

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle K admet des primitives sur K.
2. Pour tous nombres complexes non nuls  $z$  et  $z'$ , on a :  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
3. La valeur moyenne  $\mu$  d'une fonction  $h$  continue sur un intervalle  $[p ; q]$  est telle que :  
$$\mu \times (q - p) = \int_p^q h(t) dt$$
4. Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K, alors pour tout nombre réel  $m$  de  $f(K)$ , l'équation  $f(x) = m$  admet une unique solution dans K.

### Exercice 2 (2 points)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est juste. Écris le numéro la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Enoncés incomplets	Compléments proposés
1.	Si (Cf) est la représentation graphique de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par ; $f(x) = x^3 - 2x + 1$ , alors $\Omega$ est un point d'inflexion de (Cf) de coordonnées ...	A (1 ; 1)
		B (0 ; 1)
		C $(1 ; -\frac{5}{3})$
		D (1 ; 0)
2.	L'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}, (\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ est : ...	A {0 ; 2}
		B $\emptyset$
		C $\{0; e^{\frac{1}{2}}\}$
		D $\{e; e^2\}$
3.	La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ...	A $x \mapsto (\ln 2)e^{x \ln 2}$ .
		B $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ .
		C $x \mapsto -(\ln 2) \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .
		D $x \mapsto (\ln x) \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .
	$(-1 + i\sqrt{3})^6$ est égal à ...	A 64

4.	<b>B</b>	$64i$
	<b>C</b>	$-64$
	<b>D</b>	$-64i$

### Exercice 3 (4 points)

Dans un village, avant d'être vendu, tout sac de fèves de cacao doit passer par le test d'humidité. Si le test d'humidité est positif, alors le sac de fèves de cacao ne peut pas être vendu. Les relevés statistiques montrent que 7% des sacs de cacao destinés à la vente ont des fèves humides.

- Lorsqu'un sac contient des fèves humides, le test d'humidité est positif à 87% des cas ;
- Lorsqu'un sac contient des fèves sèches, le test d'humidité est négatif à 98% des cas.

Pour un sac choisi au hasard, on note les événements suivants:

H : « le sac contient des fèves humides » ;

T : « le test d'humidité est positif » ;

- 1- Dresse un arbre pondéré pour illustrer la situation.
- 2- Calcule la probabilité des événements ci-dessous :  
A : « le sac contient des fèves humides et est testé négatif »  
B : « le sac ne contient pas des fèves humides et est testé positif »
- 3- Justifie que la probabilité de l'évènement T est égale à 0,0795.
- 4- Calcule la probabilité qu'un sac ayant subi un test négatif contienne des fèves humides.
- 5- La coopérative du village veut vendre 100 sacs de fèves de cacao.  
Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de sacs de fèves de cacao que la coopérative ne peut pas vendre.
  - a) Détermine la probabilité que la coopérative ait aux plus deux sacs de fèves de cacao invendus.
  - b) Justifie que la probabilité qu'il y ait au moins trois sacs de fèves de cacao invendus est 0,9884
  - c) Calcule, à l'unité près, le nombre moyen de sacs de fèves de cacao que la coopérative ne pourra pas vendre.

### Exercice 4 (2 points)

Soit  $f$  la fonction numérique dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}$

1. Justifie que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$
2. Justifie que pour tout  $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  on a :  $\frac{3\sqrt{2}}{4} \leq f'(x) \leq \frac{6\sqrt{5}}{5}$
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifie que :  
pour tout  $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  on a :  $\frac{6\sqrt{5}}{5}(x-1) \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)$
4. Détermine un encadrement de l'intégrale  $K = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$

### Exercice 5 (5 points)

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x}$  et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J). unité: 2 cm.

1°) a. On considère la fonction  $h$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = e^x - 2x$   
En utilisant le sens de variation de la fonction  $h$ , démontre que pour tout réel  $x$ ,  $e^x - 2x > 0$ .

b. Déduis-en l'ensemble de définition de  $f$ .

2°) Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = (2 - x)e^x - 2$ .

a. Détermine les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

On admet que pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = (1 - x)e^x$ .

b. Etudie les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresse son tableau de variation.

c. Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]1,59 ; 1,60[$ .

d. Calcule  $g(0)$  puis justifie que :

$$\forall x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in [0 ; \alpha], g(x) \geq 0.$$

3°) a. Détermine la limite de  $f$  en  $-\infty$  et donnes-en une interprétation graphique.

b. Démontre que la droite (D) d'équation  $y = 1$  est une asymptote à (C) en  $+\infty$ .

c. Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

4°) a. Justifie que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ .

b. Déduis-en les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation.

5°) a. Justifie que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ .

b. Déduis-en un encadrement de  $f(\alpha)$  à  $10^{-2}$  près.

6°) Construis (D) et (C).

7°) Soit  $t$  un nombre réel supérieur à 1 et  $A(t)$  l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :  $x = 1$  ;  $x = t$  ; la courbe (C) et la droite (D).

a. Calcule l'aire  $A(t)$  en  $\text{cm}^2$ .

b. Justifie que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 4 - 4 \ln(e - 2) \text{ cm}^2$ .

### Exercice 6 (5 points)

Ton grand cousin, grand cultivateur, souhaite aussi se lancer dans l'élevage semi-intensif afin d'obtenir les ressources nécessaires pour subvenir aux besoins de la grande famille. Pour réaliser ce projet, il envisage de louer un terrain auprès d'un propriétaire terrien du village.

Un technicien lui indique, sur le plan de lotissement du village muni d'un repère orthonormé d'unité 100 m, que le terrain demandé est de forme triangulaire et que ses sommets ont pour affixes les solutions de l'équation (E) :  $z \in \mathbb{C}$ ,  $iz^3 + (5 - 2i)z^2 - (4 + 9i)z - 9 - 6i = 0$ , dont l'une est un imaginaire pur.

Il souhaite s'assurer que le terrain forme bien un triangle rectangle isocèle et connaître également son aire afin d'organiser plus efficacement son projet, mais il ne dispose pas des compétences nécessaires. Il te sollicite.

À l'aide de tes connaissances mathématiques au programme, aide-le.