Direction Régionale de l'Éducation Nationale et de l'Alphabétisation Abidjan 1

BACCALAURÉAT BLANC — Coefficient : 4

SESSION 2026 — Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

Exercice 1 (2 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro suivi de **V** si l'affirmation est vraie ou de **F** si elle est fausse.

1. Toute fonction dérivable sur un intervalle K admet des primitives sur K.

2. Pour tous nombres complexes non nuls z et z', on a : $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. La valeur moyenne μ d'une fonction h continue sur un intervalle [p ; q] est telle que :
$\mu \times (q-p) = \int_p^q h(t)dt$

4. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K, alors pour tout nombre réel m de $f(K)$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans K.

Exercice 2 (2 points)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, quatre réponses A, B , C et D sont proposées dont une seule est juste. Écris le numéro la ligne suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	Enoncés incomplets	Compléments proposés	
1.	Si (Cf) est la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par ; $f(x) = x^3 - 2x + 1$,alors Ω est un point d'inflexion de (Cf) de coordonnées …	A	$(1\,;1)$
		B	$(0\,;1)$
		C	$(1\,;\frac{-5}{3})$
		D	$(1\,;0)$
2.	L'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ est : …	A	$\{0;2\}$
		B	$\emptyset$
		C	$\{0; e^{\frac{1}{2}}\}$
		D	$\{e; e^2\}$
3.	La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par …	A	$x \mapsto (\ln 2)e^{x\ln 2}$
		B	$x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$
		C	$x \mapsto -(\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^x$
		D	$x \mapsto (\ln x)\left(\frac{1}{2}\right)^x$
	$(-1+i\sqrt{3})^6$ est égal à …	A	64

4.		B	$64i$
		C	-64
		D	$-64i$

Exercice 3 **(4 points)**

Dans un village, avant d'être vendu, tout sac de fèves de cacao doit passer par le test d'humidité. Si le test d'humidité est positif, alors le sac de fèves de cacao ne peut pas être vendu. Les relevés statistiques montrent que 7% des sacs de cacao destinés à la vente ont des fèves humides.

- Lorsqu'un sac contient des fèves humides, le test d'humidité est positif à 87% des cas ;
- Lorsqu'un sac contient des fèves sèches, le test d'humidité est négatif à 98% des cas.

Pour un sac choisi au hasard, on note les évènements suivants:
H : « le sac contient des fèves humides » ;
T : « le test d'humidité est positif » ;

1- Dresse un arbre pondéré pour illustrer la situation.
2- Calcule la probabilité des événements ci-dessous :
A : « le sac contient des fèves humides et est testé négatif »
B : « le sac ne contient pas des fèves humides et est testé positif »
3- Justifie que la probabilité de l'évènement T est égale à 0,0795.
4- Calcule la probabilité qu'un sac ayant subi un test négatif contienne des fèves humides.
5- La coopérative du village veut vendre 100 sacs de fèves de cacao.
Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de sacs de fèves de cacao que la coopérative ne peut pas vendre.
a) Détermine la probabilité que la coopérative ait aux plus deux sacs de fèves de cacao invendus.
b) Justifie que la probabilité qu'il y ait au moins trois sacs de fèves de cacao invendus est 0,9884
c) Calcule, à l'unité près, le nombre moyen de sacs de fèves de cacao que la coopérative ne pourra pas vendre.

Exercice 4 **(2 points)**

Soit f la fonction numérique dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$

1. Justifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Justifie que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ on a : $\frac{3\sqrt{2}}{4} \leq f'(x) \leq \frac{6\sqrt{5}}{5}$

3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifie que :

pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ on a : $\frac{6\sqrt{5}}{5}(x-1) \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)$

4. Détermine un encadrement de l'intégrale $K = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J). unité: 2 cm.

1°) a. On considère la fonction h dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - 2x$

En utilisant le sens de variation de la fonction h, démontre que pour tout réel x, $e^x - 2x > 0$.

b. Déduis-en l'ensemble de définition de f.

2°) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = (2 - x)e^x - 2$.

a. Détermine les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

On admet que pour tout réel x, $g'(x) = (1 - x)e^x$.

b. Etudie les variations de g sur $\mathbb{R}$ et dresse son tableau de variation.

c. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1{,}59 ; 1{,}60[$.

d. Calcule g (0) puis justifie que :

$$\forall x \in]-\infty; 0[\, U \,]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0 \quad \text{et}$$
$$\forall x \in [0 ; \alpha], \quad g(x) \geq 0.$$

3°) a. Détermine la limite de f en $-\infty$ et donnes-en une interprétation graphique.

b. Démontre que la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c. Etudie la position relative de (C) par rapport à (D).

4°) a. Justifie que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

b. Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variation.

5°) a. Justifie que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$.

b. Déduis-en un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

6°) Construis (D) et (C).

7°) Soit t un nombre réel supérieur à 1 et $A(t)$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations : $x = 1$; $x = t$; la courbe (C) et la droite (D).

a. Calcule l'aire $A(t)$ en cm².

b. Justifie que $\lim_{t\to+\infty} A(t) = 4 - 4\ln(e-2)$ cm².

Exercice 6 (5 points)

Ton grand cousin, grand cultivateur, souhaite aussi se lancer dans l'élevage semi-intensif afin d'obtenir les ressources nécessaires pour subvenir aux besoins de la grande famille. Pour réaliser ce projet, il envisage de louer un terrain auprès d'un propriétaire terrien du village.

Un technicien lui indique, sur le plan de lotissement du village muni d'un repère orthonormé d'unité 100 m, que le terrain demandé est de forme triangulaire et que ses sommets ont pour affixes les solutions de l'équation (E): $z \in \mathbb{C}$, $iz^3 + (5-2i)z^2 - (4+9i)z - 9 - 6i = 0$, dont l'une est un imaginaire pur.

Il souhaite s'assurer que le terrain forme bien un triangle rectangle isocèle et connaître également son aire afin d'organiser plus efficacement son projet, mais il ne dispose pas des compétences nécessaires. Il te sollicite.

À l'aide de tes connaissances mathématiques au programme, aide-le.

Correction

Exercice I

1 – V
2 – F
3 – V
4 – V

Exercice II

1°) Pour determiner les Coordonneés du point d'inflexion Ω de (C_f)
On derive f deux fois et on resoud $f''(x)=0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^3 - 2x + 1)' = 3x^2 - 2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (3x^2 - 2)' = 6x$

$f''(x) = 0 \iff 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0^3 - 2\times 0 + 1 = 1$ donc $\Omega(0;1)$.

1 – B

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

Posons $X = \ln x$

$X^2 - 3X + 2 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times 2\times 1 = 1$

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{2\times 1} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$

$x = e$ ou $x = e^2$ $\quad S_{\mathbb{R}} = \{e ; e^2\}$

2 – D

3°) La fonction $x \mapsto a^x = e^{x\ln a}$ et $(a^x)' = (e^{x\ln a})'$

$= (x\ln a)' e^{x\ln a}$

$= \ln a \, e^{x\ln a}$

La derivée de $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]'$ est: $\left(e^{x\ln\frac{1}{2}}\right)' = \left(x\ln\frac{1}{2}\right)' e^{x\ln\frac{1}{2}}$

$= \ln\frac{1}{2}\, e^{x\ln\frac{1}{2}} = -\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3 – C

4°) $(-1+i\sqrt{3})^6$

~~derter~~ determinons la forme exponentielle et trigonometrique de $-1+i\sqrt{3}$

$|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$, soit $\theta = \arg(-1+i\sqrt{3})$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

La forme trigonometrique de $-1+i\sqrt{3}$ est $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

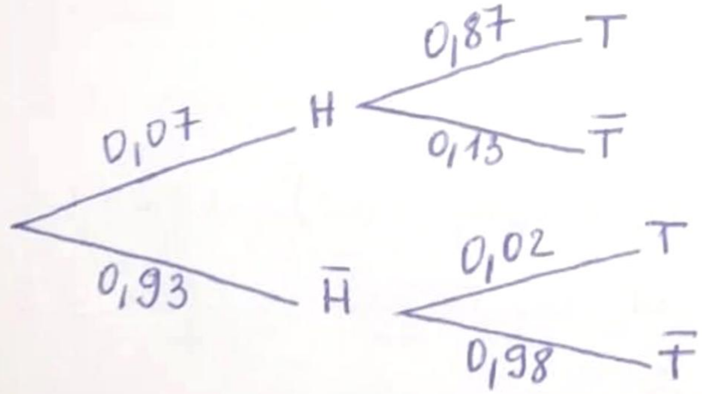
$(-1+i\sqrt{3})^6 = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^6 = 2^6\left(\cos 6\times\frac{2\pi}{3} + i\sin 6\times\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 64(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 64$

4-A.

Exercice III

1°) Dressons un arbre pondéré



2°) Calculons

* A « le sac contient des fèves humides et est testé négatif »

$P(A) = P(H \cap \overline{T}) = P(H) \times P_H(\overline{T}) = 0{,}07 \times 0{,}13 = 0{,}0091$

* B « le sac ne contient pas des fèves humides et est testé positif »

$P(B) = P(\overline{H} \cap T) = P(\overline{H}) \times P_{\overline{H}}(T) = 0{,}93 \times 0{,}02 = 0{,}0186$

3°) Justifions que $P(T) = 0{,}0795$

$P(T) = P(H \cap T) + P(\overline{H} \cap T) = P(H) \times P_H(T) + P(\overline{H} \cap T)$

$= 0{,}07 \times 0{,}87 + 0{,}0186 = 0{,}0795$

4°) Calculons la probabilité qu'un sac ayant subi un test negatif Contiennent des fèves humides. (3)

$$P_{\overline{T}}(H) = \frac{P(H \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} \quad \text{or} \quad P(\overline{T}) = 1 - P(T)$$

$$= \frac{P(H) \times P_H(\overline{T})}{1 - P(T)} = \frac{0{,}07 \times 0{,}13}{1 - 0{,}0795} = 0{,}01.$$

5°) a- Calculons la probabilité que la Coopérative ait aux plus deux sacs de fèves de cacao invendus.

La Coopérative choisit un sac de fèves, on s'interesse à deux resultats T: << test positif, sac de fève ne peut être vendu>> ; $\overline{T}$ << Test négatif, sac de fève peut être vendu >>. Cette ~~épreuve~~ expérience est une épreuve de bernouilli. On a $P(T) = 0{,}0795$.

L'epreuve étant repété ~~...~~ sur 100 sacs de fève (100 fois) et de façon indépendante, on a un schéma de bernouilli où la variab aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = P(T)$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= C_{100}^{0}(0{,}0795)^0(0{,}9205)^{100} + C_{100}^{1}(0{,}0795)^1(0{,}9205)^{99} + C_{100}^{2}(0{,}0795)^2(0{,}9205)^{98}$$

$$= 0{,}0116$$

b- Justifions que La probabilité qu'il y ait au moins trois sacs invendus est 0,9884

L'evènement Contraire d'avoir au moins 3 sacs invendus est au plus deux sacs invendus. donc $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= 1 - 0{,}0116$$

$$= 0{,}9884$$

c°) Calculons le nombre moyen

Il s'agit de calculer $E(X)$. Comme on a une loi binomiale

$$E(X) = n \times p = 100 \times 0,0795 = 7,95 \approx 8.$$

Exercice 4

1°) Justifions que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(x\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\right)'$$

$$= (x)'\sqrt{x^2+1} + \left(\sqrt{x^2+1}\right)' x - \left(\sqrt{2}\right)'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \times x$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times x$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2°) Justifions que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right],\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et $\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 1$

$$\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 1 \qquad\qquad \frac{1}{4}+1 \leq x^2+1 \leq 1+1$$

$$\frac{1}{2} \leq 2x^2 \leq 2 \qquad\qquad \frac{5}{4} \leq x^2+1 \leq 2$$

$$\frac{1}{2}+1 \leq 2x^2+1 \leq 2+1 \qquad\qquad \frac{\sqrt{5}}{2} \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq 2x^2+1 \leq 3 \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Alors $\forall x \in [\frac{1}{2};1]$, $\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \leq (2x^2+1) \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 3 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \leq f'(x) \leq \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

3°) On a: $\forall x \in [\frac{1}{2};1]$, $\frac{3\sqrt{2}}{4} \leq f'(x) \leq \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[x;1]$, on a:

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}(1-x) \leq f(1)-f(x) \leq \frac{6\sqrt{5}}{5}(1-x) \text{ or } f(1)=0$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4}(1-x) \leq -f(x) \leq \frac{6\sqrt{5}}{5}(1-x)$$

$$-\frac{6\sqrt{5}}{5}(1-x) \leq f(x) \leq -\frac{3\sqrt{2}}{4}(1-x)$$

donc $\frac{6\sqrt{5}}{5}(x-1) \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)$

4°) <u>Determinons un encadrement de $K = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$</u>

$\forall x \in [\frac{1}{2};1]$, $\frac{6\sqrt{5}}{5}(x-1) \leq f(x) \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)$

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}\int_{1/2}^{1}(x-1)\,dx \leq \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}\int_{1/2}^{1}(x-1)\,dx$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1/2}^{1} \leq \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1/2}^{1}$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right] \leq \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{1}{8}\right) \leq \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \leq \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$\boxed{-\frac{3\sqrt{5}}{20} \leq \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \leq \frac{-3\sqrt{2}}{32}}$$

Exercice 5

1°) a- $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (e^x - 2x)' = e^x - 2$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$e^x - 2$		$-$	0	$+$	

- $\forall x \in]-\infty; \ln 2[$, $h'(x) < 0$ donc h est continue et strictement decroissante sur $]-\infty; \ln 2[$.
- $\forall x \in]\ln 2; +\infty[$, $h'(x) > 0$ donc h est continue et strictement croissante sur $]\ln 2; +\infty[$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	$2 - 2\ln 2$	$\nearrow$	

$\forall x \in \mathbb{R}$, h admet un minimum absolu $2 - 2\ln 2 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2x > 0$

b°) Determinons D_f

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - 2x > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

2°) a- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2-x)e^x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x - xe^x - 2 = -2$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -2 = -2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2-x)e^x - 2 = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2$

b- $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (1-x)e^{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ depend de celui de $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$\forall x \in]-\infty;1[,\ g'(x) > 0$, donc g est continue et strictement croissante sur $]-\infty;1[$.
$\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) < 0$ donc g est continue et strictement decroissante sur $]1;+\infty[$.

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	-2	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

c- $\forall x \in]1;-\infty[$, g est continue et strictement decroissante et en particulier sur $]1{,}59;1{,}60[$,

$\left.\begin{array}{l} g(1{,}59) = 0{,}01 \\ g(1{,}60) = -0{,}02 \end{array}\right\}$ $g(1{,}59) \times g(1{,}6) < 0$ donc $1{,}59 < \alpha < 1{,}60$

d- $* g(0) = (2-0)e^{0} - 2 = 2-2 = 0$

- $\forall x \in]-\infty;0[$, g est continue et strictement croissante.
$g(]-\infty;0[) =]-2;0[< 0$, donc $\forall x \in]-\infty;0[,\ g(x) < 0$.

- $\forall x \in]0;1]$, g est continue et strictement croissante.
$g(]0;1]) =]0;e-2[> 0$, donc $\forall x \in]0;1[,\ g(x) > 0$.

- $\forall x \in [1;\alpha[$, g est continue et strictement decroissante.
$g([1;\alpha[) =]0;e-2[> 0$, donc $\forall x \in]1;\alpha[,\ g(x) > 0$

- $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, g est continue et strictement decroissante.
$g(]\alpha;+\infty[) =]-\infty;0[< 0$, donc $\forall x \in]-\infty;0[,\ g(x) < 0$

en conclusion $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[,\ g(x) < 0 \\ \forall x \in [0;\alpha],\ g(x) > 0. \end{array}\right.$

3°) a- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-2}{e^x-2x} = \lim_{x\to-\infty} (e^x-2)\times\frac{1}{e^x-2x}$ (8)

$= 0$ car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} e^x-2 = -2 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-2x} = 0 \end{cases}$

La droite d'equation $y=0$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$

b°) $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-1] = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-2}{e^x-2x} - 1$ (9)

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-\frac{2}{e^x})}{e^x(1-\frac{2x}{e^x})} - 1$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{e^x}}{1-\frac{2x}{e^x}} - 1 = 0$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{e^x} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2x}{e^x} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} -1 = -1 \end{cases}$

Alors la droite (D) d'equation $y=1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

c°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-1 = \frac{e^x-2}{e^x-2x} - 1$

$= \frac{2x-2}{e^x-2x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2x-2$		$-$	0	$+$	
e^x-2x		$+$		$+$	
$\frac{2x-2}{e^x-2x}$		$-$	0	$+$	

$\forall x \in]-\infty; 1[$, $f(x)-1<0$, donc $(\mathcal{C})$ est en dessous de (D)

$\forall x \in]1; +\infty[$, $f(x)-1>0$, donc $(\mathcal{C})$ est au dessus de (D).

4°) a- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\frac{e^x-2}{e^x-2x}\right)'$

$= \frac{(e^x-2)'(e^x-2x) - (e^x-2x)'(e^x-2)}{(e^x-2x)^2}$

$= \frac{e^x(e^x-2x) - (e^x-2)(e^x-2)}{(e^x-2x)^2}$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\frac{e^{2x}-2xe^{x}-e^{2x}+2e^{x}+2e^{x}-4}{(e^{x}-2x)^2}$$

$$=\frac{4e^{x}-2xe^{x}-4}{(e^{x}-2x)^2}$$

$$=\frac{2\left[2e^{x}-xe^{x}-2\right]}{(e^{x}-2x)^2}=\frac{2\left[(2-x)e^{x}-2\right]}{(e^{x}-2x)^2}$$

$$=\frac{2\,g(x)}{(e^{x}-2x)^2}$$

b- $\forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{2}{(e^{x}-2x)^2}>0$ donc le signe de $f'(x)$ depend de $g(x)$

$\forall x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]\alpha;+\infty[$, $g(x)<0$ alors $f(x)<0$ donc f est Continue et stictement decroisante sur $]-\infty;0[$ et sur $]\alpha;+\infty[$.

$\forall x\in[0;\alpha]$, $g(x)>0$ ~~don~~ Alors $f'(x)>0$ donc f est Continue et stictement croissante sur $[0;\alpha]$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-2}{e^{x}-2x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(1-\frac{2}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1-\frac{2x}{e^{x}}\right)}=1$$

$$f(0)=\frac{e^{0}-2}{e^{0}-0}=-1$$

5°) a- $\forall x\in\mathbb{R},\ f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-2}{e^{\alpha}-2\alpha}$ or $g(\alpha)=0 \iff (2-\alpha)e^{\alpha}-2=0$

$\iff e^{\alpha}=\dfrac{2}{2-\alpha}$. alors $f(\alpha)=\dfrac{\frac{2}{2-\alpha}-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\dfrac{\frac{2-4+2\alpha}{2-\alpha}}{\frac{2-4\alpha+2\alpha^2}{2-\alpha}}$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{-2+2\alpha}{2-\alpha}}{\frac{2\alpha^2-4\alpha+1}{2-\alpha}} = \frac{2\alpha-2}{2-\alpha} \times \frac{2-\alpha}{2(\alpha^2-2\alpha+1)}$$

$$= \frac{2(\alpha-1)}{2(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

b- $\forall \alpha \in]1{,}59;1{,}60[$, $1{,}59 < \alpha < 1{,}60$

$$1{,}59-1 < \alpha-1 < 1{,}60-1$$

$$0{,}59 < \alpha-1 < 0{,}60$$

$$\frac{1}{0{,}60} < \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{0{,}59}$$

$$1{,}67 < f(\alpha) < 1{,}69.$$

6°) Voir papier millimetré

7°) a- $A(t) = I(t) \cdot U.A$ or $U.A = 2\,cm \times 2\,cm = 4\,cm^2$

$$I(t) = \int_1^t [f(x)-1]\,dx$$

$$= \int_1^t \left[\frac{e^x-2}{e^x-2x} - 1\right] dx = \int_1^t \frac{e^x-2}{e^x-2x}\,dx - \int_1^t dx$$

Posons $U(x) = e^x - 2x$

$U'(x) = e^x - 2$

Une primitive de $\frac{e^x-2}{e^x-2x}$ est $\ln|e^x-2x|$ or $\forall x \in [1;t],\ e^x-2x>0$

donc $\ln|e^x-2x| = \ln(e^x-2x)$.

$$I = \int_1^t \frac{e^x-2}{e^x-2x}\,dx - \int_1^t dx = \left[\ln(e^x-2x)\right]_1^t - \left[x\right]_1^t$$

$$= \ln(e^t-2t) - \ln(e-2) - t + 1$$

donc $A(t) = \left[\ln(e^t-2t) - t + 1 - \ln(e-2)\right] \times 4\,cm^2$

b- $\lim\limits_{t \to +\infty} A(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 4\left[\ln(e^t - 2t) - t + 1 - \ln(e-2)\right] \cdot cm^2$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} 4\left[\ln\left(e^t\left(1 - \frac{2t}{e^t}\right)\right) - t + 1 - \ln(e-2)\right] cm^2$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} 4\left[\ln e^t + \ln\left(1 - \frac{2t}{e^t}\right) - t + 1 - \ln(e-2)\right] cm^2$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} 4\left[t \ln e + \ln\left(1 - \frac{2t}{e^t}\right) - t + 1 - \ln(e-2)\right] cm^2$

$= \lim\limits_{t \to +\infty} 4\left[t + \ln\left(1 - \frac{2t}{e^t}\right) - t + 1 - \ln(e-2)\right] cm^2$

$= 4\left[1 - \ln(e-2)\right] cm^2$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{2t}{e^t}\right) = 0$

$= \left[4 - 4\ln(e-2)\right] cm^2$.

Exercice 6.

En vue d'aider mon grand cousin à s'assurer que le terrain forme bien un rectangle isocèle et connaitre son aire pour la realisation de son projet, nous allons utiliser notre cours sur les nombres Complexes. Pour cela nous allons procédé comme suit:

- Determiner la solution imaginaire pure de (E).
- Resoudre dans $\mathbb{C}$, L'equation (E).
- designer par A, B et C les points d'affixes respectives les solutions de (E). representer A, B et C
- Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et en deduire la nature du triangle.
- Calculer l'aire du triangle ABC
- Conclure.

- Determinons la solution imaginaire pure de (E).

soit $z_0 = ib$ la solution imaginaire de (E).

$\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $i(ib)^3 + (5-2i)(ib)^2 - (4+9i)(ib) - 9 - 6i = 0$

$$b^3 + (-b^2)(5-2i) - 4ib + 9b - 9 - 6i = 0$$

$$b^3 - 5b^2 + 2ib^2 - 4ib + 9b - 9 - 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 - 5b^2 + 9b - 9 = 0 & (1) \\ 2b^2 - 4b - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

(E_2) : $2b^2 - 4b - 6 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\times(-6)\times 2 = 16 + 48 = 64$$

$$b_1 = \frac{4-8}{2\times 2} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{ou} \quad b_2 = \frac{4+8}{2\times 2} = 3$$

Pour $b_1 = -1$, $(-1)^3 - 5(-1)^2 + 9\times(-1) - 9 = -1 - 5 - 9 - 9 = -24 \neq 0$

-1 n'est pas la solution

Pour $b_2 = 3$, $3^2 - 5(3)^2 + 9\times 3 - 9 = 27 - 45 + 27 - 9 = 54 - 54 = 0$

3 est la solution.

donc $\underline{z_0 = 3i}$.

- Resolvons (E)

$z_0 = 3i$ est solution de (E).

$$iz^3 + (5-2i)z^2 - (4+9i)z - 9 - 6i = 0 \Leftrightarrow (z-3i)(az^2 + bz + c) = 0$$

determinons a, b et c.

$iz^3 + (5-2i)z^2 - (4+9i)z - 9 - 6i$ | $z - 3i$

$-iz^3 - 3z^2$ | $iz^2 + (2-2i)z + 2 - 3i$

$\cdot \quad +(2-2i)z^2 - (4+9i)z$

$\quad -(2-2i)z^2 + 3i(2-2i)z$

$\quad \cdot \quad +(2-3i)z - 9 - 6i$

$\quad\quad -(2-3i)z + 6i + 9$

$\quad\quad \cdot \quad \cdot$

$a = i$; $b = 2-2i$ et $c = 2-3i$

(E) : $(z-3i)(iz^2+(2-2i)z+2-3i)=0$

$\Leftrightarrow$ $z-3i=0$ ou $iz^2+(2-2i)z+2-3i=0$

$z=3i$ ou $\Delta=(2-2i)^2-4\times i\times(2-3i)$

$\Delta=-12-16i$.

* determinons les racines de Δ.

Soit $\theta=x+iy$ tels que $\theta^2=\Delta$ on obtient : $\begin{cases} x^2-y^2=-12 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-12)^2+(-16)^2}=20 \\ 2xy=-16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-12 & (1) \\ x^2+y^2=20 & (2) \\ xy=-8 \end{cases}$

$(1)+(2) \Leftrightarrow 2x^2=8$

$x^2=4$

$x=-2$ ou $x=2$

$(2)-(1) \Leftrightarrow 2y^2=32$

$y^2=16$

$y=4$ ou $y=-4$

Pour $x=-2$; $y=4$ d'où $\theta_1=-2+4i$

Pour $x=2$; $y=-4$ d'où $\theta_2=2-4i$

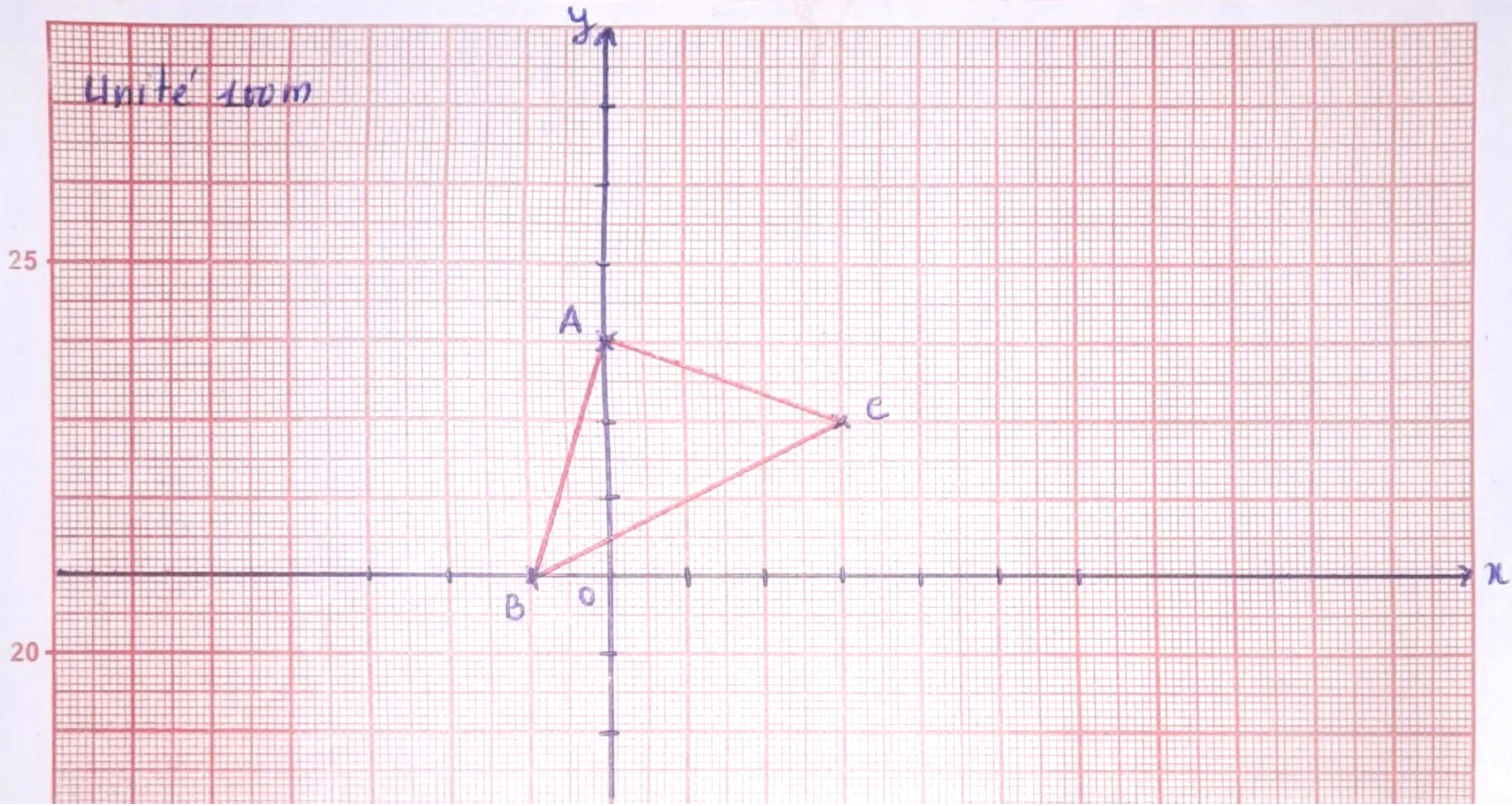
les racines Carrées de $-12-16i$ sont : $-2+4i$ et $2-4i$

$z_1=\dfrac{-(2-2i)-(2-4i)}{2i}=3+2i$ ou $z_2=\dfrac{-(2-2i)+(2-4i)}{2\times i}=-1$

donc $S_{\mathbb{C}}=\{3i\ ;\ -1\ ;\ 3+2i\}$

- Soit A, B, C les points d'affixes respectives $3i$; -1 et $3+2i$

<u>representation</u>. (Voir papier millimetré)


Unité 100m
y
A
C
B
O
x
25
20

- Calculons

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-1-3i}{3+2i-3i} = \frac{-1-3i}{3-i}$$

$$= \frac{(-1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$= \frac{-3-i-9i+3}{3^2+1^2} = \frac{-10i}{10} = -i$$

donc ABC est bien un triangle rectangle isocèle en A.

- Calculons Aire du triangle ABC

$$\text{Aire} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$$

Comme ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
Base = AB et Hauteur AC.

et $AB = AC = |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |-1-3i| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

$$\text{Aire} = \frac{AB \times AC}{2} \times U.A = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}{2} \times 100 \times 100\ m^2$$

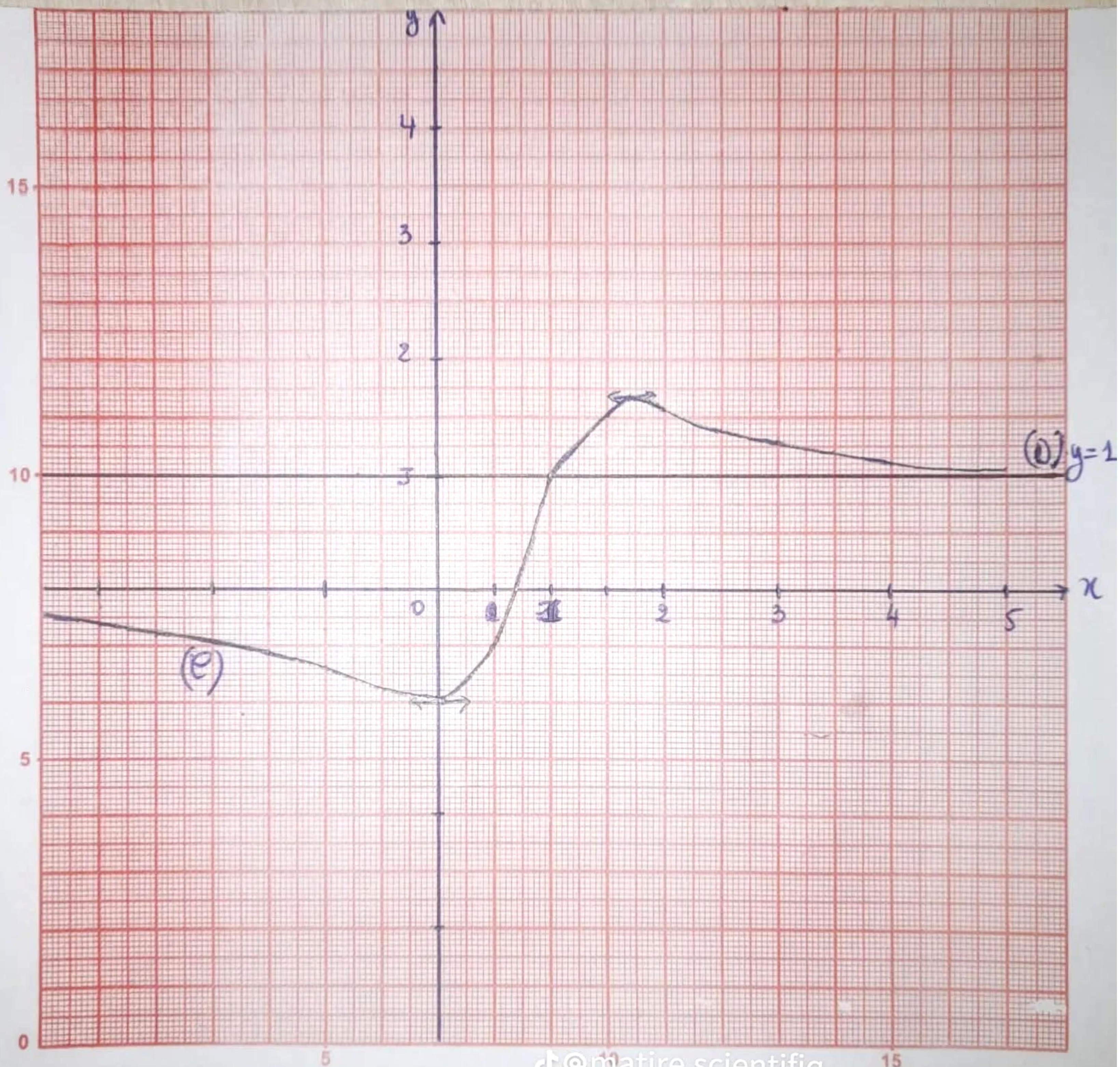
$$= 5 \times 1.0000\ m^2 = 50.000\ m^2 = 5\ ha$$

- Conclusion

le terrain est effectivement rectangle et isocèle et a une aire de 5 hectares. Alors Il peut se lancer dans l'élevage semi-intensif.

Representation de la Courbe (C) et (D) Exercice 5

x	-3	-2,5	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	0,6	1	1,5	1,7	2	2,5	3	3,5	4	5
$f(x)$	-0,3	-0,4	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,5		1	1,7	[illegible]	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	1,05


y
4
3
2
1
0
x
2
3
4
5
(C)
(D) y=1