CORRIGE-BAREME Série F2 et B

CORRIGE	Barème

Exercice 1 (3 points)

Soit E_V l'ensemble de validité
$E_V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; tel \; que \; x > 0 \; et - y > 0\}$
donc $E_V =]0; +\infty[\times] - \infty; 0[$ — 0,25 pt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ lnx + ln(-y) = ln3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ ln(-xy) = ln3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ -xy = 3 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(3 ;-1)\}$ — 0,5 pt

1- $\boldsymbol{P(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3}$

a) Je calcule P(3)

P(3) = 0 — 0,25 pt

- **Factorisation de $P(x)$**

$P(3) = 0$
donc $P(x)$ est factorisable par $x - 3$
Utilisation correcte de la division euclidienne ou de la méthode des coefficients indéterminés. — 0,25 pt
On obtient P(x) =($-x^2 - 2x - 1$) = $-(x + 1)^2(x - 3)$ — 0,25 pt

- **Signe de $P(x)$**

Le signe de $P(x)$ est celui de $-(x - 3)$ car $\forall x \epsilon \mathbb{R}, (x + 1)^2 \geq 0$
P(x) = 0 $\Leftrightarrow$ $x = 3$ ou $x = -1$ — 0,25 pt

Tableau de singe

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x + 3$		+	|	+	0	-	
P(x)		+	0	+	0	-	

— 0,25 pt

$\forall x \epsilon \;]-\infty; -1[\cup]-1; 3[, P(x) > 0$
$\forall x \epsilon]3; +\infty[, P(x) < 0$
$\forall x \epsilon \{-1; 3\}, P(x) = 0$
— 0,25 pt

b) Solution de l'inéquation

$x \in E_V \Leftrightarrow 2 - 3x > 0$
$-3x > -2 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$ Donc $E_V =]-\infty; \frac{2}{3}[$
Posons $\forall x \epsilon]0; +\infty[$, et $X \in \mathbb{R}, X = \ln(2 - 3x)$
L'inéquation devient : $-X^3 + X^2 + 5X + 3 \leq 0$ — 0,25 pt
Posons $P(X) \leq 0 \Leftrightarrow X \in [3; +\infty[$

L’ensemble des solutions de l’inéquation (I) est $S_{\mathbb{R}} =]0; \frac{e^3-2}{-3}]$ ------------→ 0,5 pt

Exercice 2 (3 points)

1- Soit M un point du plan d’affixe
$z = x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 + i(x - y + 1)$ avec x et y des nombres réels.

a) Je détermine l’ensemble des points M tel que $z \in \mathbb{R}$.

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$ ------------→ 0,25 pt

Donc (λ) est la droite d’équation $y = x + 1$. ------------→ 0,25 pt

b) Je détermine l’ensemble (φ) des points M du plan pour que : $z \in i\mathbb{R}$

$M \in (\varphi) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ ------------→ 0,25 pt

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ ------------→ 0,25 pt

Donc (φ) est le cercle de centre $\Omega(2\,;-1)$ et de rayon 3------------→ 0,5 pt

2- Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ un nombre complexe.

a) Je détermine la forme trigonométrique de j

$|j| = \left|\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ ------------→ 0,25 pt

$\theta = Arg(j) \Leftrightarrow$ θ=Arg(j) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ ------------→ 0,25 pt

Donc $j = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$ ------------→ 0,25 pt

b) Calculons j^2

$j^2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$ ------------→ 0,5 pt

c) Je détermine la nature du triangle ABC

Soient A, B et C les points images respectifs des nombres complexes 4, j et j^2

ABC est un triangle isocèle en ------------→ 0,25 pt

Exercice 3 (5 points)

1- a) **Tableau de calculs**

$\sum_{i=1}^{10} x_i$	$\sum_{i=1}^{10} y_i$	$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10} y_i^2$
310	4.170	135.610	10.414	1.791 .500

0,5 pt

b) Je justifie que le budget moyen et du chiffre d'affaire moyen sont respectivement $\overline{X} = 31$ **et** $\overline{Y} = 417$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

$$\overline{X} = 31$$

0,25 pt

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10}$$

$$\overline{Y} = 417$$

0,25 pt

c) Je calcule de V(X) , V(Y) et COV (X ,Y)

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \overline{X}^2$$

V(X) = 80 ,4

0,5 pt

$$V(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \overline{Y}^2$$

V(Y) = 5261

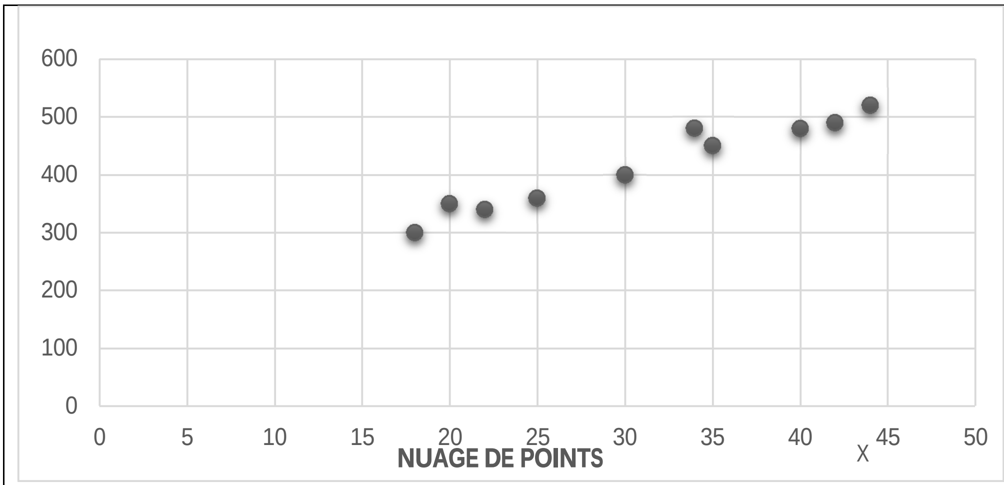
0,5 pt

$$COV(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i}{10} - \overline{X}.\overline{Y}$$

COV(X, Y) = 634

0,5 pt

2- a) Je construis le nuage de points



0,5 pt

b) Un ajustement linéaire est possible car les points du nuage sont pratiquement alignés . 0,25 pt

3- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire.

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X).\mathrm{V(Y)}}}$$

r = 0 ,97 0,5 pt

4- Je détermine une équation de la droite de régression (D)

On a (D) : y= ax+b

$a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$ = 7 ,89 0,25 pt

$b = \overline{Y} - a\overline{X}$ = 172 ,41 0,25 pt

Donc (D) : y= 7,89x+172,41 0,25 pt

5- Calcul du chiffre d'affaire

On a : y = 7,89x+172,41

Pour x = 50 , y = 7,89×50 + 172,41

Y = 566,91 0,25 pt

Donc le chiffre d'affaires est **566.910 .000** FCFA 0,25 pt

Problème (9 points)

Partie A (3,5 points)

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} - 4lnx$

1- **a) Je calcule la limite en 0 et en** $+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} - 4lnx = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(1 - 4xlnx)$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$ 0,25 pt

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - 4lnx = -\infty$ 0,25 pt

b) **J'étudie les variations de g**

- **Je calcule la dérivée de g**

g est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = \frac{-1-4x}{x^2}$

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, g'(x) = \frac{-(1+4x)}{x^2}$ ------------------------------------→ 0,5 pt

- **Signe de la dérivée et sens de variation de g**

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, g'(x) < 0$, alors g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ ---------→ 0,5 pt

c) **Tableau de variation de g**

x	0	$\propto$	$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

------------------------------→ 0,5 pt

2 **-a) Je démontre que $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto \epsilon]0;+\infty[$**

g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc, g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$, or $0 \epsilon]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto \epsilon]0;+\infty[$ ------------------------------------→ 0,5 pt

b) **Signe de $g(x)$**

D'après le tableau de variation :

g est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$x \epsilon]0;\alpha[\Rightarrow x < \propto$ d'où $\forall x \epsilon]0;\propto[, g(x) > g(\propto) or\ g(\propto) = 0$.

Donc $\forall x \epsilon]0;\propto[, g(x) > 0$ ------------------------------------→ 0,25 pt

$x \epsilon]\alpha;+\infty[\Rightarrow x > \propto$ d'où $\forall x \epsilon]\propto;+\infty[, g(\propto) > g(x)\ or\ g(\propto) = 0$.

Donc $\forall x \epsilon]\propto;+\infty[, g(x) < 0$------------------------------------→ 0,25 pt

c) **Je démontre que $\propto \epsilon]1,22;1,23[$**

on a : $g(1{,}22) = 0{,}024$
$g(1{,}23) = -0{,}015$ ------------------------------------→ 0,25 pt

Comme $g(1{,}22) \times g(1{,}23) < 0$ alors $1{,}22 < \propto < 1{,}23$ ------------------------------→ 0,25 pt

<u>Partie B</u> **(5 points)**

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + 2(lnx)^2$

1- **a) Je calcule les limites de f aux bornes de D_f**

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} + 2(lnx)^2 = +\infty$ ------------------------------------→ 0,25 pt

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2(lnx)^2 = +\infty$ ------------------------------→ 0,25 pt

b) Je calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}+2(lnx)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{2(lnx)^2}{x} = 0$ → 0,25 pt

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$. → 0,25 pt

2- a) **Je démontre que** $\forall x \epsilon]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x} g(x)$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$\forall x \epsilon]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} \times lnx$

$= -\frac{1}{x}(\frac{1}{x} - 4lnx)$ → 0,25 pt

$\forall x \epsilon]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x} g(x)$ car $g(x) = \frac{1}{x} - 4lnx$ → 0,25 pt

b) **J'étudie le signe de $f'(x)$ et je dresse le tableau de variation de f**

le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$ car $\forall x \epsilon]0; +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ → 0,25 pt

or $\left.\begin{array}{l} \forall x \epsilon]0; \propto [, g(x) > 0 \\ \forall x \epsilon] \propto; +\infty[, g(x) < 0 \end{array}\right\}$ → 0,25 pt

D'où $\forall x \epsilon]0; \propto [, f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $]0; \propto [$, → 0,25 pt

$\forall x \epsilon] \propto; +\infty[, f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $] \propto; +\infty[$ → 0,25 pt

Tableau de variation de *f*

x	0		$\propto$	
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		$+\infty$ ↘	$f(\propto)$	↗ $+\infty$

→ 0,5 pt

3- a) **Je démontre que $f(\propto) = \frac{1}{8\propto^2} + \frac{1}{\propto}$**

on a : $f(\propto) = \frac{1}{\propto} + 2(ln \propto)^2$

$g(\propto) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\propto} - 4ln \propto = 0$

$\Leftrightarrow -4ln \propto = -\frac{1}{\propto}$

$\Leftrightarrow ln \propto = \frac{1}{4\propto}$ → 0,25 pt

Ainsi, $f(\propto) = \frac{1}{\propto} + 2(\frac{1}{4\propto})^2$

$= \frac{1}{\propto} + \frac{2}{16\propto^2}$

Donc $f(\propto) = \frac{1}{8\propto^2} + \frac{1}{\propto}$ → 0,5 pt

b) J'**encadre $f(\propto)$ à 10^{-2} près et je donne une valeur approchée de $\propto$ à 10^{-1} par défaut.**

On a : $1,22 < \propto < 1,23$

$(1,22)^2 < \propto^2 < (1,23)^2$

$8(1,22)^2 < 8 \propto^2 < 8(1,23)^2$

$\frac{1}{8(1,23)^2} < \frac{1}{8\propto^2} < \frac{1}{8(1,22)^2}$

On a : $\frac{1}{1,23} < \frac{1}{\propto} < \frac{1}{1,22}$

Par somme membre à membre, on a :

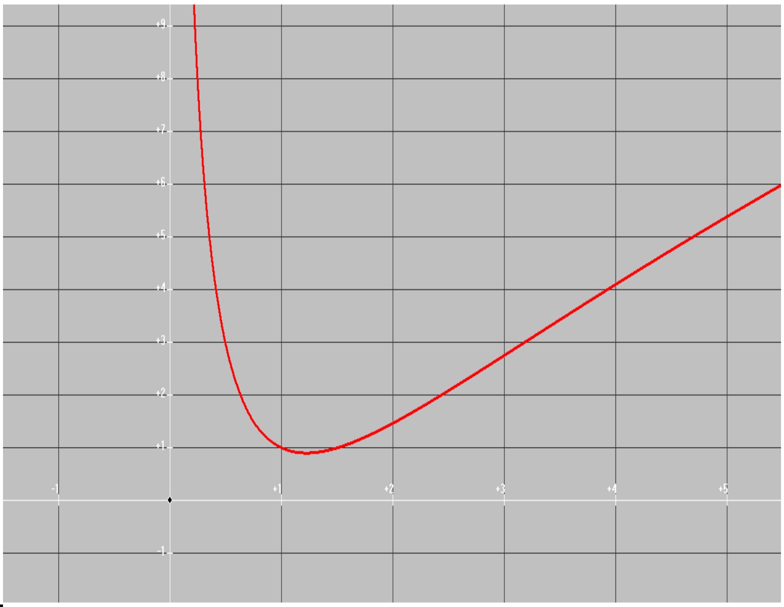
$\frac{1}{8(1,23)^2} + \frac{1}{1,23} < \frac{1}{8\propto^2} + \frac{1}{\propto} < \frac{1}{8(1,22)^2} + \frac{1}{1,22}$ 0,25 pt

$0,89 < f(\propto) < 0,90$

$0,8 < f(\propto) < 0,9$ 0,25 pt

Donc $f(\propto) = 0,8$ par défaut 0,25 pt

2- Construction de (C_f)



0,5 pt

Partie C (0,5 point)

Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x) = xlnx - x + 1$

a) Je démontre que h est une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \epsilon]0;+\infty[, h'(x) = lnx$ donc h est une primitive de la fonction ln sur]0 ;+∞[0,25 pt

b) Je calcule $h(e^2) - h(e)$

$h(e^2) - h(e) = e^2$ 0,25 pt