LYCEE MODERNE DE COCODY
COMPOSITION - FÉVRIER 2023

Durée : 4H
Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Seules les calculatrices non graphiques sont autorisées.
On utilisera une feuille de papier millimétré pour la construction des courbes.

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation du tableau ci-dessous suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie et de **FAUX** si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Si A et B sont deux évènements incompatibles d'un univers Ω, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2	Pour tout nombre réel x strictement positif, $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$.
3	Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre réel positif noté $\|z\|$ tel que $\|z\| = x^2 + y^2$
4	Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K tels que : $a < b$. S'il existe un nombre réel M tel que : pour tout $x \in [a; b], \|f'(x)\| \leq M$, alors : $-M(b-a) \leq f'(x) \leq M(b-a)$

EXERCICE 2 (2 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque énoncé quatre réponses sont proposées dont une seule d'entre elles est exacte. Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	ÉNONCÉS		RÉPONSES
1	On donne la loi de probabilité suivante : $Y = y_i$: -2 ; 4 ; 7 $P(Y = y_i)$: $0,33$; $0,25$; $0,42$ L'arrondi d'ordre 2 de la variance $V(Y)$ est égale à	A	29,18
		B	36,66
		C	15,14
		D	22,62
2	Les solutions de l'équation $(E) : (5 - \log x)(\log x - \frac{1}{2}) = 0$ sont :	A	5 et $\frac{1}{2}$
		B	10^5 et $\sqrt{10}$
		C	e^5 et $e^{\frac{1}{2}}$
		D	10^5 et $\sqrt{e}$
3	La courbe représentative (C_h) de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 5$ admet un point d'inflexion P de coordonnées :	A	$P(2; -5)$
		B	$P(-1; 5)$
		C	$P(2; -5)$
		D	$P(0; -5)$
4	Soit z un nombre complexe tel que : $z = (1 + i)^2 - i(1 - 2i)$. La partie réelle et la partie imaginaire de z sont :	A	$Re(z) = -2$ et $Im(z) = 1$
		B	$Re(z) = 2$ et $Im(z) = -1$
		C	$Re(z) = 1$ et $Im(z) = -2$
		D	$Re(z) = -1$ et $Im(z) = 2$

EXERCICE 3 **(3 points)**

Soient f et g, les fonctions définies sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ des fonctions f et g.

On notera F une primitive de f et G une primitive de g sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, calcule $f(x) + g(x)$.
2) a/ Détermine une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $f(x) + g(x)$.

   b/ Détermine une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $f(x) - g(x)$.

   c/ En déduire une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ des fonctions f et g.

EXERCICE 4 **(4 points)**

Les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Une classe de Terminale D d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles. A chaque séance de Mathématiques, le professeur interroge au hasard et successivement 3 élèves.

1) Détermine les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ des évènements suivants :

A : « Le prof interroge exactement 2 garçons parmi les 3 élèves. »
B : « Les 3 élèves interrogés sont de même sexe. »
C : « Il y a au plus une fille parmi les 3 élèves interrogés. »

2) Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles. Dans cette classe, on choisit 2 délégués de sexes différents. Détermine les probabilités $P(D)$ et $P(E)$ des évènements suivants :

D : « Les deux délégués sont internes. »
E : « Un seul des délégués est interne. »

3) A la fin de chaque séance de Mathématiques, le professeur désigne au hasard un élève qui doit essuyer le tableau. Justifie que la probabilité de désigner une fille externe est : $P = \frac{1}{5}$.
4) Pour n séances ($n \geq 2$) ; On désigne par X, la variable aléatoire qui associe le nombre k de fois où une fille externe est désignée pour essuyer le tableau. Un même élève pouvant être désigné plusieurs fois.

   a/ Détermine la loi de probabilité de X.

   b/ Soit P_n, la probabilité pour que le tableau soit essuyé au moins une fois par une fille externe au bout de n séances. Justifie que : $P_n = 1 - (\frac{4}{5})^n$.

   c/ En déduire le nombre minimal n_0 de séances pour que $P_n \geq 0{,}9999$.

EXERCICE 5 **(4 points)**

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x - 2\ln x$.

1) a/ Pour tout $x \in]0;+\infty[$, démontre que : $g'(x) = -\frac{x+2}{x}$

   b/ Etudie le signe de $g'(x)$ et dresse son tableau de variation *(On calculera pas de limites)*.
2) Calcule $g(1)$ et démontre que : $\forall\, x \in]0;1[, g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]1;+\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2}(x + \ln x)$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : $2cm$.

1) Démontre que la limite de f en 0 est $-\infty$. Interprète ce résultat.
2) Démontre que la limite de f en $+\infty$ est 0. Interprète ce résultat.
3) a/ Démontre que pour tout nombre réel strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

   b/ Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4) a/ Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0;1[$

   b/ Justifie que : $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.
5) Trace (C) avec soin.

EXERCICE 6 **(5 points)**

Pour réduire le nombre d'accidents de la circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes lors des fêtes de noël et du nouvel an dans les agglomérations et sur les autoroutes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcooltest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test ;
- 95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test.

Le commandant de brigade de la gendarmerie de ta localité voudrait savoir le nombre minimal n d'automobilistes à contrôler pour que la proportion d'avoir au moins un test positif soit supérieure à 0,99. Mais, il ne sait pas comment procéder. Il te sollicite.

A l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du commandant.

DEVOIR SURVEILLE N°1
NIVEAU: T[le D2]
Année-Scolaire : 2022-2023

MATHÉMATIQUES

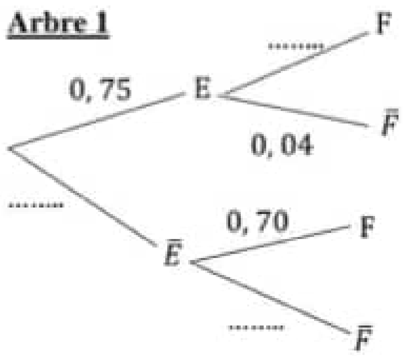
Coefficient : 4
Durée : 2 heures
Enseignant : M. KABY
Date : 25 / 11 / 2022

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées page 1 sur 2 et page 2 sur 2.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

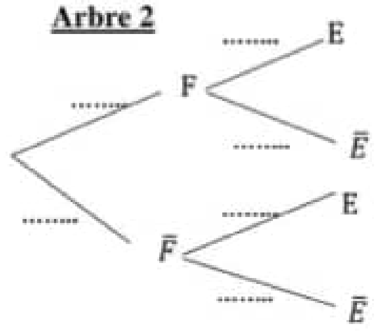
EXERCICE 1 (2 points)

Reproduis et complète les arbres pondérés ci-dessous en justifiant chaque étape :

Arbre 1



Arbre 2



EXERCICE 2 (2 points)

Pour cet exercice, plusieurs réponses sont proposées. Détermine celles qui sont correctes en écrivant sur ta copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la réponse correcte. **Exemple : 1-c**

On lance une pièce équilibrée 3 fois de suite. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenu.

1. L'univers comporte :

a. 4 issues b. 6 issues c. 8 issues d. 9 issues

2. Les valeurs prises par X sont :

a. 0 ; 1 ; 2 ; 3 b. 1 ; 2 ; 3 c. 0 ; 1 ; 2 d. 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

3. La valeur de $P(X = 3)$ est égale à :

a. $\frac{1}{8}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $\frac{1}{2}$

4. La valeur de l'espérance mathématique E(X) est égale à :

a. $\frac{3}{2}$ b. 1 c. 0 d. $\frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3$

5. La valeur de variance V(X) est égale à :

a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{3}{2}$ c. 1 d. 2

EXERCICE 3 (5 points)

Chaque résultat sera donné sous la forme d'un nombre décimal arrondi d'ordre 3.
On admet que dans l'équipe des éléphants de côte d'Ivoire vainqueur de la CAN 2015, il y a 70% des joueurs qui sont droitiers du pied. Par ailleurs un joueur non droitier du pied tire le ballon du côté gauche du gardien de but dans 85% des cas et un joueur non gaucher du pied tire le ballon du côté droit du gardien de but dans 60% des cas.
On note les événements suivants :
D « le joueur est droitier » et C « le joueur tire à gauche du gardien de but ».
1. Traduis la situation par un arbre de probabilité.
2. Calcule la probabilité pour que :
a) Un joueur soit droitier et qu'il tire à droite du gardien de but.
b) Un joueur soit gaucher et qu'il tire à droite du gardien de but.
3. Démontre que la probabilité pour qu'un joueur tire le ballon à droite du gardien de but est 0, 465.
4. Un joueur tire à gauche du gardien de but.
Détermine la probabilité pour qu'il soit droitier du pied.

EXERCICE 4 (6 points)

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivant où α est un nombre réel.

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{6}$	α	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

1. a) Calcule la valeur du nombre α.
   b) Calcule $F(X \leq 3,5)$
2. Calcule l'espérance mathématique de X
3. Calcule la variance de X
4- Calcule l'écart-type de X
5. a) Définis F, fonction de répartition de X.
 b) construire la représentation graphique de F dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Échelle : abscisse : 1 cm→ 1

Ordonnée : 1 cm→ $\frac{1}{12}$

EXERCICE 5 (5 points)

Dans le cadre de la lutte contre la Covid-19, un laboratoire de médecins chercheurs teste un vaccine dénommé≪**Johnson**≫ sur un ensemble d'individus ayant contracté le virus. 60 % des individus acceptent de prendre le vaccin, les autres refusent. Chez les invidus ayant fait le vaccine, on constate la guérrison avec une probabilité de 0, 8. ET on ne constate aucune guérison pour 90 % des personnes ayant refuse le vaccin.
Pour avoir une idée claire sur l'éfficacité de ce vaccine, on interroge un des médecins chercheurs, celui-ci affirme que pour un échantillon de 4 individus pris au hazard parmi ceux ayant contracté le virus, il y a plus de 90 % de chance d'avoir au moins une personne guérie, et ce grâce au vaccine.
Il est question pour toi de nous rassurer de la véracité de l'affirmation de ce chercheur avec des arguments mathématiques solides.