MATHEMATIQUES

SERIE C

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3
 L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

EXERCICE 1 (2 points)

Écris sur ta feuille de copie le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si celle-ci est vraie ou de FAUX si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction f définie sur $[-1; 3[\cup]3; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-2\sqrt{x+1}}{x-3}$ est prolongeable par continuité en 3.
2	Pour tous nombres réels a et h , $ \cos(a+h) - \cos(a) \leq h $.
3	La fonction G définie par $G(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + x - 1$ est la primitive de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.
4	Pour tout nombre entier naturel n , le nombre $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau suivant, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Écris sur ta feuille de copie, le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

Enoncés		Réponses proposées	
1	L'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est :	A	l'ensemble vide
		B	un singleton
		C	une demi-droite
		D	une réunion de deux demi-droites de même support et de sens opposés
2	Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \sqrt{x} \ln(x)$. Sa fonction dérivée définie par :	A	$h'(x) = \frac{\sqrt{x} \ln(x) + \sqrt{x}}{2x}$
		B	$h'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$
		C	$h'(x) = \frac{2\sqrt{x} \ln(x) + \sqrt{x}}{2x}$
		D	$h'(x) = \frac{\sqrt{x} \ln(x) + 2\sqrt{x}}{2x}$
3	L'ensemble des solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}, e^{2x} + e^x - 6 = 0$ est :	A	$\{-\ln(3); \ln(2)\}$
		B	$\{-3; 2\}$
		C	$\{\ln(2)\}$
		D	$\{0; \ln(2)\}$

Tournez la page S.V.P.

4	Soit la fonction k définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $k(x) = \ln(e^x - 2)$. L'ensemble de définition de la fonction k est :	A	$\mathbb{R} \setminus \{\ln(2)\}$
		B	$] \ln(2); +\infty[$
		C	$[\ln(2); +\infty[$
		D	$]2; +\infty[$

EXERCICE 3 (3 points)

On considère le système d'équations (S) : $(x; y) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} \text{PPCM}(x; y) = 168 \\ xy = 1008 \end{cases}$

1. Justifie que : $\text{PGCD}(x; y) = 6$.
2. On pose : $x = 6u$ et $y = 6v$.
- Démontre que : $\text{PGCD}(u; v) = 1$ et $uv = 28$.
3. a) Résous le système d'équations (S') : $(u; v) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} \text{PGCD}(u; v) = 1 \\ uv = 28 \end{cases}$
- b) Déduis-en les solutions du système (S).

EXERCICE 4 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$.

1. a) Justifie que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b) Démontre que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$
2. On considère le plan (P) d'équation : $x + 2y - 2z + 3 = 0$.
- a) Justifie que le point C appartient au plan (P).
- b) Calcule la distance du point B au plan (P).
- c) Démontre que l'intersection des plans (P) et (ABC) est la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.
3. a) Justifie que la droite (AB) est parallèle au plan (P).
- b) Détermine la distance du point A à la droite (D).

EXERCICE 5 (5 points)

On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 + (1 - 6i)z^2 - (17 + 8i)z - 33 + 30i$.

1. On note (E) l'équation : $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.
 - a) Démontre que (E) admet une unique solution réelle que tu détermineras.
 - b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z + 3)(z^2 + az + b)$
 - c) Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 - (2 + 6i)z - 11 + 10i$.
 - d) Déduis-en l'ensemble des solutions de (E).
2. Dans toute la suite, le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, unité graphique : 1 cm. A, B et C sont les points d'affixes respectives : $-3, -1 + 4i$ et $3 + 2i$. Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A; -1), (B; 1), (C; -1)\}$.
 - a) Place A, B et C.
 - b) Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.
 - c) Justifie que l'affixe du point G est $1 - 2i$ puis place G.
3. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$
 - a) Justifie que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow GM = GB$.
 - b) Détermine et construis (Γ) .

EXERCICE 6 (5 points)

Une usine fabrique et commercialise des jeux électroniques assez fragiles.

Sa capacité journalière de production est comprise entre 10 000 et 20 000 jeux. On suppose que toute la production journalière est testée pour repérer les jeux défectueux.

Le contrôle de qualité sur plusieurs jours révèle que pour la production de x jeux, exprimée en dizaine de milliers, le nombre de jeux défectueux est modélisé sur l'intervalle $[1; 2]$ par la fonction d définie comme suit : $d(x) = 2e^{x-2} - x + \frac{2}{5}$.

Le directeur de l'usine veut réduire le nombre de produits défectueux. Il cherche donc à savoir le nombre de jeux à fabriquer qui engendrerait le minimum de perte en terme de jeux défectueux.

N'ayant pas les compétences requises pour effectuer les calculs, il te demande de l'aide.

Détermine la production journalière à l'unité près qui engendre le minimum possible de jeux défectueux.