RAYAUME DU MAROC MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DU PRÉSCOLAIRE & DES SPORTS EXAMEN DU BACCALAUREAT	SESSION NORMALE 2024
ÉPREUVE : Mathématiques	SECTION : Sciences Expérimentales
DURÉE : 3 H	COEFFICIENT DE L'ÉPREUVE :7

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES :

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie de l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Étude de fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module ;
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 *(3 points) *

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1 + u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

0,25 pt — 1) a) Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0,5 pt — b) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

0,25 pt — 2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0,5 pt — b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{2 - u_n}{1 - u_n}$, pour tout entier naturel n

0,5 pt — a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

0,5 pt — b) Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

0,5 pt — c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 *(3 points) *

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $n(2, -2, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5

0,25 pt — 1) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0,25 pt — 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

0,5 pt — 3) a) Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$

0,5 pt — b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

0,5 pt — 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

0,5 pt — b) Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle (Γ)

0,5 pt — c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 3 *(4 points) *

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0,5 pt — 1) Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) \equiv \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$

0,75 pt — 2) a) Montrer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$, puis vérifier que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

0,75 pt — b) En Déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.

On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

0,5 pt — a) Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que $\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'

0,5 pt — b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.

0,5 pt — c) Montrer que b', l'affixe du point B', vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

0,5 pt — d) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 *(2 points) *

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0,5 pt — 1) Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$, où A est l'évènement : " Les deux boules tirées portent le même numéro "

0,5 pt — 2) Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$, où B est l'évènement : " La somme des numéros des boules tirées est 4 "

0,5 pt — 3) Calculer $p(A \cap B)$

0,5 pt — 4) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

Problème *(8 points) *

Partie I : On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

0,5 pt — 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v

0,25 pt — 2) Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 pt — 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u), la courbe (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

1)
0,25 pt — a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$

0,5 pt — b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}. f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-\pi})$

0,5 pt — c) En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

2)
0,25 pt — a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

0,5 pt — b) Vérifier que pour tout $x < 0, f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$

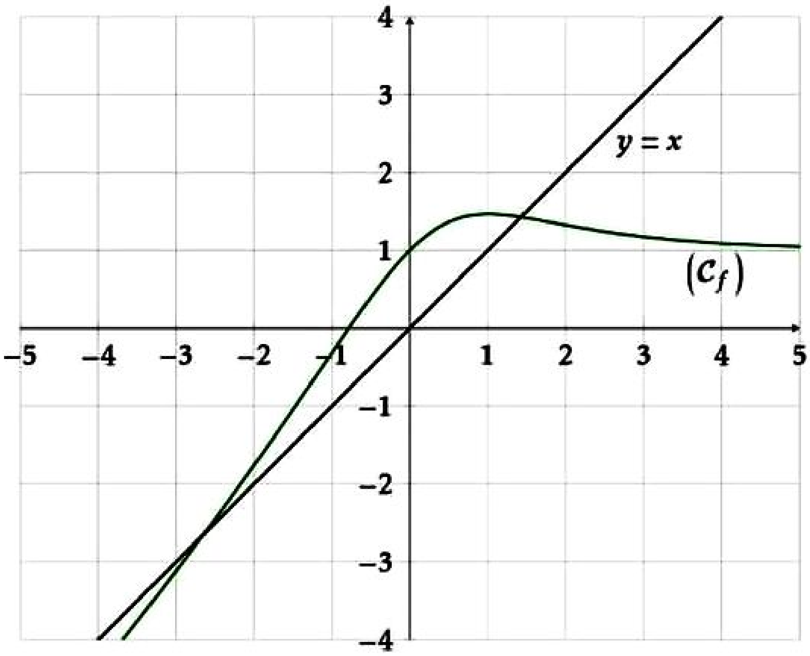
0,75 pt — c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

3)
0,5 pt — a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$

0,5 pt — b) Étudier le signe de la fonction dérivée de f, puis déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

0,75 pt — c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$

4. La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



0,5 pt a. Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

0,5 pt b. Montrer que : $e^{\alpha} - e^{\beta} = \alpha - \beta$

5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty, 1]$

0,5 pt a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

0,75 pt b. Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$

FIN DE L'ÉPREUVE