EXAMEN DU BACCALAUREAT

ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION NORMALE 2024

SERIE C

BURKINA FASO

Unité –Progrès – Justice

1er tour

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 6
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(E): z^2 - \alpha z + \beta = 0$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$)
   Déterminer les valeurs de α et β pour que (E) admette pour solutions $1 + i$ et $1 - i$. (1 pt)
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(F): y'' - 2y' + 2y = 0$ (1 pt)
3) On lance deux fois un dé parfait équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
   Les résultats sont des couples $(a; b)$ où a et b sont respectivement les numéros obtenus sur la face supérieure du dé au premier lancer et au second lancer.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement
      A : « obtenir un couple de nombres premiers ». (1 pt)
   b) Déterminer la probabilité de l'évènement :
      B : « les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - ay' + by = 0$ sont données par $y(x) = e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ où λ et μ sont des réels ».
      où $(a; b)$ est le couple obtenu lors des deux lancers du dé. (1 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \, . \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout réel t, on note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1) a) Comparer les positions des points $M(t)$ et $M(t + \pi)$. (0 ,25 pt)
   b) Comparer les positions des points $M(t)$ et $M(-t)$. (0 ,25 pt)
   c) En déduire qu'il suffit de connaitre (Γ) sur un intervalle que l'on précisera, pour connaitre entièrement (Γ). (0,5 pt)
2) a) Etudier les sens de variations des fonctions de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (1 pt)
   b) Dresser le tableau de variations conjoints de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (0,5 pt)
   c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère. (0,5 pt)
3) a) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est $2x^2 + y^2 - 2x = 0$. (0,5 pt)
   b) En déduire la nature de la courbe (Γ). (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{2x} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 pt)
   b) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote dont on précisera une équation. (0,25 pt)
2) Soit f' la fonction dérivée de f.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. (0,75 pt)
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f. (1 pt)
   c) Dresser son tableau de variation de f. (1 pt)
3) Tracer $(\mathcal{C})$, son asymptote et ses tangentes remarquables dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (1 pt)

Partie B

Soit (D) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse O.

1) Déterminer une équation de (D). (0,75 pt)
2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : f(x) - x - 1 \geq 0$. (0,75 pt)
   b) En déduire les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D). (0,5 pt)
   c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire du domaine compris entre $(\mathcal{C})$, (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$. (1 pt)

Partie C

On considère l'application T du plan dans lui-même qui au point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy$ telle que $z' = i\bar{z} - 1 + i$.

1) Exprimer x' en fonction de x et y, et y' en fonction de x et y. (1 pt)
2) Montrer que l'ensemble des points invariants par T est (D). (0,75 pt)
3) Soit M un point quelconque du plan et $M' = T(M)$.
   a) Montrer que le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D). (0,75 pt)
   b) Montrer que si $M \notin (D)$, alors la droite (MM') est perpendiculaire à (D). (0,75 pt)
   c) En déduire la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques. (0,75 pt)
4) Construire dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'image $(\mathcal{C}')$ par T de la courbe $(\mathcal{C})$. (0,75 pt)