S 732

Durée : 4 heures

Les trois problèmes sont obligatoires.

Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Les seules calculatrices autorisées sont les calculatrices non programmables.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Un anniversaire inoubliable

Avec l'aide de ses filles Anne et Annette, M. Soko veut organiser une fête pour ses 60 ans d'âge et son admission à la retraite. A cet effet ils ont prévu, entre autres :

- la distribution d'un nombre de coffrets, compris entre 1000 et 2000, dans certaines maisons du quartier ;
- la confection d'un gâteau dont la forme va refléter l'événement à célébrer ;
- l'aménagement de la salle devant servir à une soirée dansante avec les amis proches de Soko.

Le fournisseur affirme qu'en envoyant un même nombre de coffrets dans 17, 16 ou 10 maisons, il en restera toujours 8. Anne propose de fabriquer un gâteau ayant la forme d'un prisme droit.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, les sommets d'une base du prisme droit sont les images des solutions non nulles dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(E): z^5 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z} = 0.$$

Les deux sœurs se préoccupent du nombre p de coffrets livrés, du nombre de maisons qui pourront bénéficier des coffrets sachant qu'elles en ont identifié au plus 50, de la nature géométrique de la base du prisme droit que matérialise le gâteau et de la décoration à réaliser dans la salle destinée à la soirée dansante.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations des deux filles en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1- a) Démontre qu'il existe un nombre entier q tel que : $p = 1360q + 8$.

b) Déduis-en le nombre de coffrets à distribuer.

c) Détermine le nombre maximum de maisons dans lesquelles tous les coffrets peuvent être distribués en nombre égal.

2- Soit z un nombre complexe non nul.

a) Démontre que si z est solution de (E) alors z a pour module 1.

b) Justifie que les solutions non nulles de (E) sont les racines sixièmes de $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Détermine les solutions non nulles de (E) puis précise la nature de la forme géométrique de la base du gâteau.

Problème 2

La décoration de la salle de réception est composée d'une configuration réalisée au plafond de la salle et d'un jeu de lumière qui se manifeste par des étincelles qui apparaissent en des points A_n, n étant un entier naturel.

Le plan du plafond étant rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) convenablement choisi, la configuration réalisée est composée de la courbe représentative (C) de la restriction à l'intervalle $[-9; 3]$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{x+6}}{(x+6)^2+1}, \text{ si } x \leq -3 \\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}, \text{ si } x \geq -3 \end{cases}$, et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Chaque point A_n est situé sur la droite de repère (O, I) et a pour abscisse a_n telle que : $a_0 = \frac{\pi}{4}$ et pour tout n supérieur ou égal 1, $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

3- a) Calcule a_1.

b) Démontre que $a_{n+2} + a_n = \frac{1}{n+1}$. Déduis-en a_2 et a_3.

4- Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifie que pour tout $x \in [0;1]$, on a : $\frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.

b) Déduis de ce qui précède un encadrement de a_n.

5- Justifie que la suite (a_n) est convergente et précise sa limite.

6- a) Justifie que la droite (d) d'équation : $x = -3$ est un axe de symétrie de (C).

b) Etudie le sens de variation de f sur $[-3;3]$.

c) Dresse le tableau des variations de f sur $[-3;3]$.

7- a) Donne le programme de construction de (C).

b) Représente dans le repère (O, I, J) la configuration réalisée sur le plafond. Tu préciseras la demi-tangente à (C) en son point d'abscisse -3.

Problème 3

Dans le plan (P) du plancher de la salle de réception, représenté par un rectangle $ABCD$ de centre I tel que $BD = 2AB = 2t$, $(t \in \mathbb{R}_+^*)$ les dispositions prévues pour l'exécution de la danse inaugurale matérialisent deux configurations planes :

- l'une (Σ_1) est l'ensemble des points M du plan tel que :
  $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$;
- l'autre (Σ_2), est l'image de (Σ_1) par l'affinité orthogonale d'axe (Δ), médiatrice du segment $[AD]$ et de rapport $\sqrt{3}$.

8- Démontre que (Σ_1) est un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

9- Justifie que (Σ_2) est une ellipse dont tu préciseras le centre, l'axe focal et l'excentricité.

10- Construis le rectangle $ABCD$, (Σ_1) et (Σ_2).

FIN