...RSFP
R. DU TCHAD
BACCALAURÉAT
COEFF. : 5

REPUBLIQUE DU TCHAD
Office National des Examens et Concours du Supérieur
الهيئة الوطنية للامتحانات و المسابقات العالية
SESSION 2024 دورة

MENPC
الشهادة الثانوية
DUREE : 4 H

MATHÉMATIQUES

SÉRIES C & E

EXERCICE 1

1. Soit N un entier relatif impair. Montrer que $N^2 \equiv 1[8]$.
2. Montrer que si un entier relatif M est tel que $M^2 \equiv 1[8]$, alors M est impair.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2 = 8y + 1$.
4. En déduire que la parabole (Γ) d'équation $y = \frac{x^2-1}{8}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan P passe par une infinité de points à coordonnées entières.

EXERCICE 2

Partie A

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} + 2i$.

1) a) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.
b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral.

2) On note P et Q les milieux respectifs des segments [OB] et [AB].
r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
On pose : $f = t o r$.
a) Déterminer l'image par f du point O.
b) Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.
c) Construire le centre K de f.

Partie B

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on définit les trois points $A(1 ; 0)$, $B\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3}{2} ; \frac{-1}{2}\right)$ et la droite (D) dont une équation est $x = 1$.

1) a) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$.
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABGC ?

2) On note (Γ) l'ensemble des points M de (P), de coordonnées $(x ; y)$, qui vérifient la relation :
$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$.
a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ).
b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de (P) tels que $MG = a\sqrt{2}$, où a désigne la distance du point M à la droite (D).
c) En déduire la nature de (Γ) et préciser son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée.

3) Représenter (Γ) dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

ROBLEME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x^2+x\ln x+x}{(x+1)^2}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses autre que le point O.

1) a) Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

b) Montrer que $\ln\alpha = -(\alpha + 1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 1$

et on désigne par C_g, la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$.

3) a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$, $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

4) a) Montrer que $g(\alpha) = 1 - \alpha$.

b) Construire alors le point de la courbe C_g d'abscisse α.

c) Tracer la courbe C_g.

5) On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes C_g, C_f et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = -[xg(x)]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} g(x)dx$$

b) En déduire que $A = a^2 - a + 1$