EXAMEN DU BACCALAUREAT

ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION NORMALE 2024

SERIE D

BURKINA FASO

Unité – Progrès – Justice

2nd tour

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 5
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos\frac{x}{3} - 5\sin\frac{x}{3}$.

1) a) Calculer, pour x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x)$ et $f''(x)$ où f' et f'' sont respectivement les dérivées première et seconde de f. (0,5 pt + 0,5 pt)
   b) En déduire $f''(x)$ en fonction de $f(x)$. (0,5 pt)
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E): $9y'' + y = 0$. (0,5 pt)
3) On appelle h la fonction solution particulière de (E) dont la représentation graphique $(\mathcal{C})$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
   a) Donner $h(\frac{\pi}{2})$ et $h'(\frac{\pi}{2})$. (0,5 pt)
   b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -\sqrt{3}\cos\frac{x}{3} + 3\sin\frac{x}{3}$. (0,75 pt)
   c) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $h(x) = a\cos\left(\frac{x}{3} - b\right)$ avec $a > 0$ et $0 < b < \pi$. (0,75 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(4\,;0\,;1)$, $B(1\,;1\,;5)$ et $C(0\,;4\,;1)$

1) a) Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. (0,5 pt)
   b) Montrer que les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires. (0,75 pt)
   c) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $ABCD$? Justifier. (0,5 pt)
2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. (0,75 pt)
3) a) Calculer la distance du point O au plan (ABC). (0,5 pt)
   b) Les points O, A, B et C sont-ils coplanaires ? Justifier. (0,25 pt)
4) a) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du quadrilatère $ABCD$. (0,25 pt)

b) En déduire le volume V de la pyramide de sommet O et de base le quadrilatère $ABCD$. (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

Partie A (1,25 points)

Soit h la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = x^2 + 2x + 3 - 2\ln(x+1)$.

1. Etudier le sens de variation de h sur $]-1;+\infty[$. (0,75 pt)
2. Calculer $h(0)$ puis montrer que $h(x) > 0$ sur $]-1;+\infty[$. (0,5 pt)

Partie B (7,75 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - x} & si\ x \in\ ]-\infty;0[\\ x + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} & si\ x \in\ [0;+\infty[\end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité : 2cm.

1) Etudier la continuité de f en 0. (0,5 pt)
2) a) Montrer que :
 - $\forall\ x \in\ ]-\infty;0[$, $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}}$
 - $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = 1 + (\frac{2}{x+1})\frac{\ln(x+1)}{x}$. (0,5 pt)

 b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ puis en déduire la dérivabilité de f en 0. (0,75 pt)

 c) Donner une interprétation graphique des résultats des limites précédemment calculées. (0,5 pt)
3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu en $-\infty$. (0,75 pt)
4) a) Montrer que $\forall\ x \in\ ]-\infty;0[$, $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x}+2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$, f' étant la dérivée de f. (0,25 pt)

 b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in\ ]0;+\infty[$ et montrer que $\forall\ x \in\ ]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$.

 c) En déduire le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$. (0,75 pt)
5) a) Montrer que la droite (D) : $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$. (0,5 pt)

 b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur $[0;+\infty[$. (0,5 pt)
6) Sur $[0;+\infty[$, (C) admet une tangente (T) parallèle à (D) en un pint A. Déterminer les coordonnées du point A (0,5 pt)
7) Tracer (T), les asymptotes, les demi-tangentes en 0 et (C) dans le repère. (1,75 pts)

d) Dresser le TV de f sur $\mathbb{R}$ (on n'admettra que $f(x) < 0, \forall x \in]-\infty; 0[$).

Partie C (1,5 points)

Soit g la restriction de f sur $]0;+\infty[$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. (0,75 pt)
2) On appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction réciproque g^{-1} de g. Construire (Γ) dans le repère précédent. (0,75 pt)

Partie D (1,5 points)

1) Montrer que l'intégrale $I = \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \frac{3(\ln 2)^2}{2}$. (0,75 pt)
2) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2. (0,75 pt)

On donne : $f(-1) \simeq 0{,}4$; $f(-3) \simeq 0{,}5$; $\ln 2 \simeq 0{,}7$;

$2 + \frac{2\ln 3}{3} \simeq 2{,}8$; $4 + \frac{2\ln 5}{5} \simeq 4{,}6$.

EXAMEN DU BACCALAUREAT — Série : D

Proposition de corrigé du sujet no 5

EXERCICE 1 : (4 points)

$f(x) = \cos\frac{x}{3} - 5\sin\frac{x}{3}$

1) a) Calcul de $f'(x)$ et $f''(x)$:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\cos\frac{x}{3}$. (0,5 pt)

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f''(x) = -\frac{1}{9}\cos\frac{x}{3} + \frac{5}{9}\sin\frac{x}{3}$. (0,5 pt)

b) Expression de $f''(x)$ en fonction de $f(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\frac{1}{9}\cos\frac{x}{3} + \frac{5}{9}\sin\frac{x}{3} \Leftrightarrow$

$f''(x) = -\frac{1}{9}\left(\cos\frac{x}{3} - 5\sin\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow$ (0,5 pt)

$f''(x) = -\frac{1}{9}f(x)$ Car $f(x) = \cos\frac{x}{3} - 5\sin\frac{x}{3}$.

2) Résolution de (E) :

Soit la fonction g, solution générale de (E). On a :

$9y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + \left(\frac{1}{3}\right)^2 y = 0$

$\Rightarrow g(x) = A\cos\frac{1}{3}x + B\sin\frac{1}{3}x$

$\Rightarrow g(x) = A\cos\frac{x}{3} + B\sin\frac{x}{3}$ où A et B sont des constantes réelles. (0,5 pt)

3) a) Détermination de $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

Par hypothèses, on a :

* $\left(\frac{\pi}{2};0\right) \in (C)$ donc $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. (0,25 pt)
* La tangente en $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ à (C) a pour coefficient directeur $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ donc $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (0,25 pt)

b) Expression de $h(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) = A\cos\frac{x}{3} + B\sin\frac{x}{3}$.

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\cos\frac{\pi}{6} + B\sin\frac{\pi}{6} = \frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2}$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2} = 0 \leftarrow \text{(0,25pt)}$$

$$\Rightarrow B = -A\sqrt{3} \quad (1)$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -\frac{A}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{B}{3}\cos\frac{x}{3}$

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{A}{3}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{B}{3}\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{A}{6} + \frac{B\sqrt{3}}{6}$$

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\frac{A}{6} + \frac{B\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \leftarrow \text{(0,25 pt)}$$

$$\Rightarrow -A + B\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad (2)$$

De (1) et (2), on obtient le système d'équations suivant:

$$(S): \begin{cases} B = -A\sqrt{3} \\ -A + B\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \end{cases}.$$

La résolution, on a successivement:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A\sqrt{3} \\ -A - 3A = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A\sqrt{3} \\ -4A = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\sqrt{3} \\ B = 3 \end{cases} \quad \text{(0,25pt)}$$

D'où

$$h(x) = -\sqrt{3}\cos\frac{x}{3} + 3\sin\frac{x}{3}.$$

c) Détermination de a et b:

On a successivement,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = -\sqrt{3}\cos\frac{x}{3} + 3\sin\frac{x}{3} \Leftrightarrow \quad \leftarrow \text{(0,25pt)}$$

$$h(x) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$h(x) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow$

$h(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$ d'où $a = 2\sqrt{3}$ et $b = \frac{2\pi}{3}$

0,25 pt 0,25 pt

EXERCICE 2 : (4 points)

$A(4;0;1)$, $B(1;1;5)$ et $C(0;4;1)$

1) a) Coordonnées du point D :

Soit $D(x;y;z)$

$\vec{AD} = \vec{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 4-1 \\ 1-5 \end{pmatrix}$ 0,25 pt

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = -1 \\ y = 3 \\ z-1 = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}$ D'où $D(3;3;-3)$. 0,25 pt

b) Droites (BD) et (AC) perpendiculaires :

$\vec{BD}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-1 \\ -3-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{BD}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ 0,25 pt ; $\vec{AC}\begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,25 pt

On a : $\vec{BD}\cdot\vec{AC} = 2(-4) + 2\times 4 - 8\times 0 \Rightarrow \vec{BD}\cdot\vec{AC} = 0$ donc 0,25 pt

les droits (BD) et (AC) sont perpendiculaires.

c) Nature exacte du quadrilatère ABCD :

$\vec{AD} = \vec{BC}$ donc ABCD est un parallélogramme de diagonales [BD] et [AC] et de plus ~~ces~~ leur diagonales étant perpendiculaires et se coupant en milieu 0,5 pt d'où le quadrilatère ABCD est un losange.

2) Coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$:

$\vec{AB}\begin{pmatrix}1-4\\1-0\\5-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ (0,25 pt)

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (0-16)\vec{i} + (-16+0)\vec{j} + (-12+4)\vec{k}$ d'où (0,25 pt)

$\vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}-16\\-16\\-8\end{pmatrix}$. (0,25 pt)

3) a) Calcul de $d(O,(ABC))$:

$$d(O,(ABC)) = \frac{|(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\cdot\vec{OA}|}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}$$

On a : $\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \sqrt{(-16)^2+(-16)^2+(-8)^2} \Rightarrow$

$\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \sqrt{576} = 24$. (0,25 pt)

$\vec{OA}\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$. $(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\cdot\vec{OA} = \begin{pmatrix}-16\\-16\\-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\cdot\vec{OA} = -16\times4-16\times0-8\times1 \Rightarrow$

$(\vec{AB}\wedge\vec{AC})\cdot\vec{OA} = -72$ donc (0,25 pt)

$d(O,(ABC)) = \frac{72}{24} = 3$; $d(O,(ABC)) = 3$ d'où la distance du point O au plan (ABC) est égale à 3.

b) Points O, A, B, C coplanaires :

$d(O,(ABC)) \neq 0$ donc les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires. (0,25 pt)

4) a) Calcul de l'aire $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = 24$ (0,25 pt)

b) Calcul du volume V : (0,5 pt)

$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|\cdot\frac{|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\cdot\vec{OA}|}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|} = \frac{1}{3}|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\cdot\vec{OA}| = \frac{72}{3} = 24$

4/15

Problème : (12 points)

Partie A : (1,25 pts)

$h(x) = x^2+2x+3-2\ln(x+1)$ sur $]-1;+\infty[$.

1) Sens de variation de h sur $]-1;+\infty[$.

h est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

$\forall x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$h'(x) = 2x+2-\frac{2}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = \frac{2(x+1)^2-2}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = \frac{2x(x+2)}{x+1}$$ 0,25 pt

$h'(x)>0 \Leftrightarrow 2x(x+2)>0$ car pour $x \in]-1;+\infty[$, $x+1>0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

$\forall x \in (]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[) \cap]-1;+\infty[$ c'est-à-dire $x \in]0;+\infty[$

$h'(x)>0$ donc h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On en déduit que : 0,25 pt

$\forall x \in]-1;0[$ $h'(x)<0$ donc h est strictement décroissante sur $]-1;0[$. 0,25 pt

2) Calcul de $h(0)$ et signe de $h(x)$:

On a $h(0) = 0^2+0+3-2\ln 1 \Rightarrow h(0)=3$ 0,25 pt

h décroît sur $]-1;0]$ et croît sur $[0;+\infty[$; de plus $h(0)=3$ donc $h(x)>0$ sur $]-1;+\infty[$. 0,25 pt

Partie B : (7,75 pts)

$$f(x) = \begin{cases} x+\sqrt{x^2-x} & \text{si } x \in]-\infty;0[\\ x+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

1) Continuité de f en 0.

On a : $f(0) = 0 + 2\frac{\ln 1}{1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + \sqrt{x^2 - x}) = 0 + 0 = 0$ 0,25pt

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0 + 2\frac{\ln 1}{1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

0,25 pt

2) a) Preuve de résultats :

* $\forall x \in]-\infty; 0[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + \sqrt{x^2 - x}}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{x^2 - x}{x\sqrt{x^2 - x}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{x(x-1)}{x\sqrt{x^2 - x}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x}}$$ pour $x \in]-\infty; 0[$. 0,25pt

* $\forall x \in]0; +\infty[$, on a,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1}}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2\ln(x+1)}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2\ln(x+1)}{(x+1)x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x+1} \times \frac{\ln(x+1)}{x} \quad \text{pour } x \in]0;+\infty[\, .$$ 0,25pt

b) Calcul des limites du taux d'accroissement de f en 0 :

$\star \lim\limits_{x \to 0^-} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x \to 0^-} \left[1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}}\right] = -\infty$ car

quand $x \to 0^-$ $\begin{cases} x-1 \to -1 \\ \sqrt{x^2-x} \to 0^+ \end{cases}$ 0,25pt

$\star \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[1 + \frac{2}{x+1} \times \frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 3$ car

quand $x \to 0^+$ $\begin{cases} \frac{2}{x+1} \to 2 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} \to 1 \\ \frac{2}{x+1} \times \frac{\ln(x+1)}{x} \to 2 \end{cases}$ 0,25 pt

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left[\frac{f(x)}{x}\right]$ est infinie donc f n'est pas dérivable en 0.
0,25 pt

c) Interprétation graphique

$\star \lim\limits_{x \to 0^-} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = -\infty$ donc la courbe (C) admet une demi-tangente verticale à gauche au point d'abscisse 0. 0,25 pt

$\star \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = 3$ donc la courbe (C) admet à droite de 0 une demi-tangente d'équation :

$y = 3x$. 0,25 pt

3) Calcul des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2-x}\right) \Rightarrow$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{(x+\sqrt{x^2-x})(x-\sqrt{x^2-x})}{x-\sqrt{x^2-x}}\right] \Rightarrow$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2-x^2+x}{x-\sqrt{x^2-x}}\right] \Rightarrow$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right] \Rightarrow$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\right]$ 0,25pt

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ car quand $x\to-\infty$ $\begin{cases}\sqrt{1-\frac{1}{x}} \to 1\\ 1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \to 2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ donc la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$. 0,25pt

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$

Posons $X=x+1 \Rightarrow x=X-1$.

Quand $x\to+\infty$, $X\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(X-1+2\dfrac{\ln X}{X}\right) = +\infty$ car

quand $X\to+\infty$ $\begin{cases} X-1 \to +\infty \\ \dfrac{2\ln X}{X} \to 0\end{cases}$ 0,25pt

4) a) <u>Dérivée de f sur $]-\infty;0[$</u>

f est dérivable sur $]-\infty,0[\,\cup\,]0;+\infty[$.

$\forall x \in]-\infty;0[$, on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x} + 2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} ,$$ 0,25 pt

b) Dérivée de f et sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

* $\forall x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 + 2\,\frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$ 0,25 pt

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 + 2 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x+1+2-2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$ 0,25 pt

$$f'(x) = \frac{x^2+2x+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$ Car $h(x) = x^2+2x+3-2\ln(x+1)$ sur $]0;+\infty[$,

* $\forall x \in]0;+\infty[$, $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $h(x)$. Or :

- $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. 0,25 pt

c) Tableau de variation de f

Par hypothèse, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

0,5 pt

Scanné avec CamScanner

5) a) Droite (D) asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

$\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) = x + 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ $\Leftrightarrow$

$f(x) - x = 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ $\Rightarrow$ 0,5 pt

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right] = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Position relative de (C) et (D) sur $[0;+\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) - x = 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$. 0,5 pt

$\forall x \in [0;+\infty[$, $x+1 \geq 1$ donc $x+1 > 0$ et $\ln(x+1) \geq 0$ d'où $2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \geq 0$. Par conséquent la courbe (C) est au dessus de l'asymptote (D).

6) Coordonnées du point A

(D) : $y = x$ et soit $A(x_0; y_0)$.

Par hypothèse, on a $f'(x_0) = 1$.

$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2 + 2x_0 + 3 - 2\ln(x_0+1)}{(x_0+1)^2} = 1$

$\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 + 3 - 2\ln(x_0+1) = (x_0+1)^2$

$\Leftrightarrow 2 - 2\ln(x_0+1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x_0+1) = 1$

$\Leftrightarrow x_0 + 1 = e$

$\Leftrightarrow x_0 = e - 1 \in [0;+\infty[$. 0,25 pt

On trouve :

$y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow y_0 = f(e-1)$

$\Leftrightarrow y_0 = e - 1 + 2\dfrac{\ln(e-1+1)}{e-1+1}$

0,25 pt $\Leftrightarrow y_0 = e - 1 + \dfrac{2}{e}$ d'où $A\left(e-1 ; e-1+\dfrac{2}{e}\right)$.

7) Voir annexe (1,75 pts)

Partie C : (1,5 pts)

$g :]0;+\infty[\longrightarrow g(]0;+\infty[)$

$x \longmapsto g(x) = f(x)$

1) g bijection et détermination de J :

g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $g(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$. D'où $J =]0;+\infty[$

(0,75 pt)

2) Voir annexe : (0,75 pt)

Partie D : (1,5 pts)

1) Calcul de l'intégrale I.

$$I = \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx.$$

Posons $u(x) = \ln(x+1) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x+1}$

$$I = \int_1^3 u'(x)\,u(x)\,dx \Rightarrow$$

$$I = \left[\frac{1}{2}u^2(x)\right]_1^3 \Rightarrow$$

$$I = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x+1)\right]_1^3 \Rightarrow \text{(0,25 pt)}$$

$$I = \frac{1}{2}\ln^2 4 - \frac{1}{2}\ln^2 2 \Rightarrow \text{(0,25 pt)}$$

$$I = \frac{4\ln^2 2 - \ln^2 2}{2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{3\ln^2 2}{2} \quad \text{(0,25 pt)}$$

2) Calcul de l'aire A en cm^2 :

$\Rightarrow$

$$A = 4\int_1^3 [f(x) - x]\,dx \Rightarrow$$

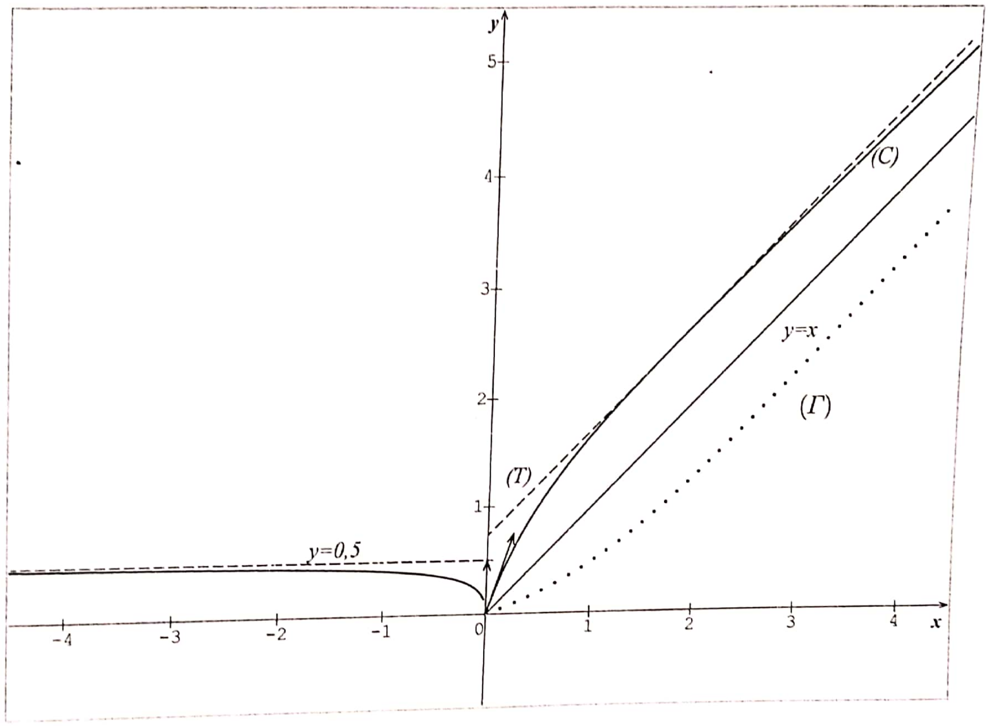
$$A = 4\int 2\,\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx \Rightarrow$$

$$A = 8\int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx \Rightarrow$$

$$A = 8\,I \Rightarrow$$

$$A = 8 \times \frac{3\ln^2 2}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{A = 12\ln^2 2\ \text{cm}^2}$$ 0,75 pt



Tangente(T) : 0,25 pt
Asymptotes : 0,5 pt
Demi-tangentes : 0,5 pt
Courbe(C) : 0,5 pt
Courbe(Γ) : 0,75 pt