BACCALAURIAT BLANC	MATHEMATIQUES
MARS 2024	SERIE : D
LYCEE PRIVE , FONDATION MBELE	COEFFICIENT : 4
	DUREE : 4 h 00

EXERCICE 1 :

Partie A : ROC ……………………………………………………………………………… 02points

1. Démontrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $0 < k < n$, $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$.
2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a, b deux éléments de I $(a < b)$. Soit m et M deux nombres reels tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout élément x de I.
   Démontrer que $m(b-a) \leq f(b) - f(b) \leq M(b-a)$.

Partie B : QCM………………….…………………..……………………………………….. 04 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. **Avec justification**, le candidat indiquera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Une **bonne réponse avec une justification correcte** rapporte **$0,5$ point**. Une **bonne réponse sans justification** rapporte **$0,25$ point**. Une mauvaise ou absence de réponse vaut **0 point**.

1.

a) $(1 - i\sqrt{3})^5 =$

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$1 - 9i\sqrt{3}$	$1 + 9i\sqrt{3}$	$16(1 + i\sqrt{3})$	$16 - i16\sqrt{3})$

b) La forme exponentielle de $(1 - i\sqrt{3})^5$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$2e^{i\frac{\pi}{3}}$	$32e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$32e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. Une urne contient 3 boules vertes et 2 boules rouges. On tire successivement avec remise 4 boules de l'urne.

a) La probabilité d'obtenir exactement 3 boules rouges est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{24}{625}$	Aucune réponse	$\frac{6}{625}$	$\frac{96}{625}$

b) Une primitive de la fonction $f(x) = \cos(3x) - \frac{2}{x} + e^{2x}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\sin(3x) - 2lnx + e^{2x}$	$-\sin(3x) - 2lnx + e^{2x}$	$\frac{1}{3}\sin(3x) - 2lnx + e^{2x}$	$\frac{1}{3}\sin(3x) - 2lnx + \frac{1}{2}e^{2x}$

3. On considère la fonction$f$ sur définie $]0;+\infty[$ par : $f(x) = xlnx$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) La dérivée f' de f est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = lnx + 1$	$f'(x) = lnx - 1$	$f'(x) = \frac{lnx - 1}{x^2}$

b) Une équation de la tangente au point d'abscisse e est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$y = (e-1)x + e^2 + 2e$	$y = \frac{1}{e}x + e - 1$	$y = (e+1)x - e^2$	$y = 2x - e$

4. On considère une série statistique double. Les informations la concernant sont données dans le tableau ci-dessous :

Couple des coordonnées du point moyen G	Variance de x	Variance de y	Covariance de x et y
$(\bar{x};\ \bar{y}) = (30; 210)$	$v(x) = 20$	$v(y) = 196.$	$cov(x; y) = 62.$

a) La droite de régression de y en x a pour équation :

Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**	**Réponse D**
$y = 31{,}6x + 209{,}9$	$y = 3{,}1x + 117$	$y = 0{,}99x + 207$	Aucune réponse correcte

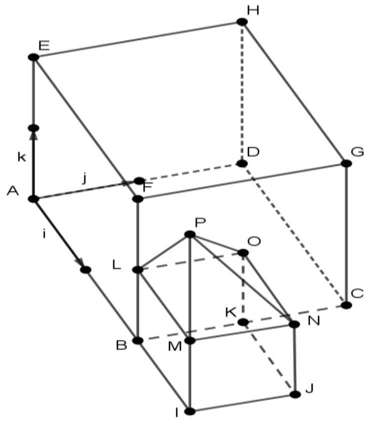
b) Le coefficient de corrélation r est égale à :

Réponse A	**Réponse B**	**Réponse C**	**Réponse D**
0,99	0,01	Aucune réponse	0,31

<u>Exercice 2</u> : Géométrie de l'espace…………………………………………… 05 points

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural. Il s'agit d'une maison de forme cubique $(ABCDEFGH)$ associé à un garage de forme cubique $(BIJKLMNO)$ où L est le milieu du segment $[BF]$ et K est le milieu du segment $[BC]$.

Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale $(LMNOP)$ de base carré $LMNO$ et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On muni l'espace d'un du repère orthonormé $(A;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1.
   a) Justifier que $\overrightarrow{AN} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.
   b) Déterminer les coordonnées des points H, M et N.
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).

   Montrer que les coordonnées du point P sont $(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$.

3.
   a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$.
   b) Calculer la distance PM

On admet que PN a une distance égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.

c) Pour satisfaire des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°. Le toit pourrait-il être construit?

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes. Quel est leur point d'intersection?

<u>Exercice 3</u> : Similitude et nombres complexes ……………………………… 05 points

On considère le polynôme P défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes z par :

$$P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (-2+3i)z + 5 + i$$

1. a) Calculer $(4-3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2-i)z - 1 + 5i = 0$.

   b) Vérifier que le nombre i est une racine de $P(z)$.

   c) Déterminer les nombres complexes u et v tels que $P(z) = (z-i)(\,z^2 + uz + v)$.

   d) On suppose pour la suite l'exercice que $u = 2 - i$ et $v = -1 + 5i$.

   En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i;\ z_B = i$ et $z_C = -3 + 2i$. On désigne par S la simulitude directe plane telle que $S(A) = B$ et $S(B) = C$.
   a) Montrer que le nombre complexe $a = \frac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$ est égale à $1 + i$ puis préciser le module et un argument de a.
   b) En donnant une interprétation géométrique du module et d'un argument du nombre complexe a, préciser le rapport et l'angle de la similitude S.
   c) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + i$. En déduire l'affixe z_Ω du centre Ω de S.
   d) Déterminer l'affixe z_D du point D image du point C par S.
   e) Placer les points A, B, C, D et Ω.

<u>Exercice 4</u> : Fonction et intégrale ………………………………………………04 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$. (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $2cm$.

1. Dresser le tableau de variation complet de f.
2. On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_n = \int_1^n f(x)dx$.
   a) Montrer, en intégrant par partie, que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_n = \frac{2}{e} - (n+1)e^{-n}$.
   b) En déduire la limite de I_n.
3.
   a) Montrer que la restriction h de la fonction f à l'intervalle $[1; +\infty[$ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
   b) Calculer $h(0)$ puis déterminer $(h^{-1})'(0)$.
   c) Peut-on calculer $(h^{-1})'(\frac{1}{e})$? Justifier.

   d) Sur le même graphique, construire (C') la courbe représentative de la fonction h^{-1}, fonction réciproque de h.
4. Déterminer l'aire, en cm^2, du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.