

Composition du 1^{er} semestre 2023/2024

MATHEMATIQUES

Seules les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Exercice 1 : (05 points)

- Soit φ la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{x+2}$
 - Étudier les variations de la fonction φ . (0,25pt)
 - Tracer dans un repère orthonormé (Unité 4 cm) C_φ la courbe représentative de φ ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5 pt)
- Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = -\frac{3}{4} \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 - Représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0, U_1, U_2 et U_3 . (0,75pt)
 - Quelle conjecture peut-on faire sur la monotonie et la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$? (0,5pt)
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 \leq U_n < 0$. (0,5pt)
 - Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante puis en déduire qu'elle est Convergente. (0,5pt)
- Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{1+U_n}{U_n}$.
 - Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. (0,5pt)
 - Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . (0,5pt)
 - Calculer la limite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis celle de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (0,5pt)
- On pose $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{U_k}\right)$. Exprimer S_n et S'_n en fonction de n . (0,5pt)

Exercice 2 : (04 pts)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit f l'application définie de P dans P qui, à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = f(z) = (1 - i)z - 2.$$

- Déterminer l'affixe du point Q antécédent du point $B(-2 + 2i)$ par f . (0, 25pt)
- Déterminer la forme algébrique puis trigonométrique de l'affixe du point A image du point $R(1 + 2i)$ par f . (0, 25pt + 0, 5pt)
- Montrer que $|z'| = \sqrt{2}AM$ et $\arg(z') = -\frac{\pi}{4} + (\vec{u}; \overrightarrow{AM})[2\pi]$ (0, 5pt + 0, 5pt)
 - Montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors le point M' appartient au cercle trigonométrique (0, 25pt)
 - Montrer que si $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}$ alors le point M' est sur une demi-droite à préciser. (0, 5pt)

4. On pose $Z = \frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}$
- Déterminer la forme algébrique et trigonométrique de Z . **(0, 25pt + 0, 5pt)**
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. **(2 × 0, 25pt)**

Problème : (11pt)

- A. On considère la fonction $g(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$.
- Étudier et dresser le tableau de variations de g . **(0,5pt)**
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . **(0,25pt)**
 - Vérifier que $\alpha \in]0 ; 1[$ puis donner le signe de g . **(0,5pt)**
- B. Soit f la fonction définie par :
- $$\begin{cases} f(x) = \sqrt{|x^2 + 3x + 2|} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 2 cm

- Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f . **(0,5pt)**
 - Écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de D_f . **(01 pt)**
 - Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 . **(01pt)**
 - Interpréter géométriquement les résultats. **(0,5pt)**
 - Étudier la dérivabilité de f en -2 . **(0,75pt)**
 - Montrer que $(D): y = x$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ **(0,25pt)**
 - Étudier la position de (C_f) par rapport à la droite (D) . **(0,25pt)**
 - Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) en $-\infty$. **(0,25pt)**
 - Étudier sur $]-\infty ; -2[$ la position relative de (C_f) rapport à $(\Delta): y = -x - \frac{3}{2}$. **(0,5 pt)**
 - Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère. **(0,5pt)**
 - Montrer que f est dérivable sur $[-1; +\infty[$ et que pour tout $x \in [-1; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{(x^2+1)^2}$. **(0,75pt)**
 - Calculer la dérivée f' de f sur les autres intervalles où f est dérivable. **(0,75 pt)**
 - Dresser le tableau de variations complet de f . **(0,5 pt)**
 - Soit g la restriction f à $[-2 ; -1]$ et C_g sa courbe représentative. Montrer que la droite $(D'): x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de C_g . **(0,25pt)**
 - Tracer C_f et ses asymptotes dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . **(0,5pt)**
- C. On considère maintenant h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty ; -2[$
- Montrer que h réalise une bijection entre I et un intervalle J à préciser. **(0,25pt)**
 - Sa réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? **(0,25pt)**
 - Calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$.
 - Dresser le tableau de variation de h^{-1} . **(0,5pt)**
 - Tracer $(C_{h^{-1}})$ courbe de h^{-1} dans le même repère. **(0,5pt)**