DIRECTION DU BACCALAUREAT

Séries : C et SI
Coéf :5
Durée: 4H

CE - 2023
GABON

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : QCM (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions. Pour chaque question, **une seule** proposition est exacte. Vous indiquerez sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Barème : réponse correcte, 1point ; mauvaise ou absence de réponse, 0 point.

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On donne les points $A(-1;2;1)$ et $B(0;1;3)$. Un système d'équations de la droite (AB) est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$	$\begin{cases} -x-3y-z+6=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-4y-z+7=0 \\ 3x+6y-\frac{3}{2}z+\frac{21}{2}=0 \end{cases}$

2. Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0{}^4$ et $\beta = z_0{}^2 + z_0{}^3$.

La somme $1+\alpha+\beta$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	-1	0	π

3. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\ln(2x+3)}{\ln(x)}$. Sa limite en $+\infty$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0	1	2	3

4. Un sac contient dix objets : n objets sont noirs et les autres sont blancs. On extrait simultané deux objets du sac. On suppose les tirages équiprobables. Si la probabilité d'obtenir deux objets blancs est égale à $\frac{7}{15}$ alors n est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
3	16	5	10

Exercice 2 : Similitudes directes et barycentre (4 points)

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre I .Soit M un point du plan tel que : $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{DC}$. N le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire (L) à la droite (AM) passant par A. J le milieu du segment$[MN]$ et E le symétrique de C par rapport à B.

1.Faire une figure que l'on complétera.

2. On considère la rotation r de centre A telle que : $r(D) = B$.

   a) Justifier que le triangle AEC est isocèle rectangle en A ;
   b) Déterminer les images des droites (DC) et (AM) par la rotation r ;
   c) En déduire que $r(M) = N$.

3. On considère la similitude plane directe s telles que $s(D) = I$ et $s(C) = B$.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude ;
   b) Démontrer que le centre de cette similitude est le point A ;
   c) En déduire que $s(M) = J$;
   d) Démontrer que : $I = bar\{(J; 1), (B; -2)\}$.

Exercice 3 : Arithmétique (4 points)

KENGUE et MAVIOGA sont deux techniciennes de surface travaillant dans un immeuble $R + 1$. Chaque jour elles sont soumises aux contraintes suivantes :

- les deux femmes ne peuvent nettoyer que 33 bureaux ;
- KENGUE doit nettoyer les trois cinquième des bureaux du rez-de-chaussée plus quatre bureaux du même niveau ;
- MAVIOGA doit s'occuper des deux tiers des bureaux situés à l'étage.

Constatant que ces deux femmes ne parviennent pas à nettoyer tous les bureaux chaque jour, le propriétaire de l'immeuble décide d'embaucher une troisième technicienne de surface pour s'occuper du reste des bureaux.

On désigne par x le nombre de bureaux du rez de chaussé et y celui des bureaux situés à l'étage.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre de bureaux par niveau que chaque femme doit nettoyer.

1. Démontrer que : $9x + 10y = 435$.
2. a) Est-il possible que les deux niveaux aient le même nombre de bureaux ? Justifier votre réponse.
   b) Est-il possible d'avoir 15 bureaux au rez-de-chaussée et 30 à l'étage ? Justifier votre réponse.
   c) Résoudre cette équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3. On suppose qu'il y a plus de bureaux au rez-de-chaussée qu'à l'
   Déterminer tous les couples $(x; y)$ vérifiant toutes les contrain
4. Déterminer le nombre de bureaux par niveau que chaque
   sachant que : $x \equiv 4[y]$.

Problème : Fonction définie par morceaux-Calcul de volume (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{x} & si\ x \geq 0 \\ x^2 ln(-x) & si\ x < 0 \end{cases}$.

(C) est sa courbe représentative graphique dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité : $1cm$.

1. a) Montrer que la fonction f est continue en 0 ;

   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$ et montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter les résultats obtenus.
3. Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que pour tout réel x positif :

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

4. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer $f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ et $f(-1)$, puis dresser le tableau complet de variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
7. On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe (C) représentant f autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0; 3]$. On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide.

a) Montrer que : $V = 4\pi \int_0^3 xe^{-x}dx$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $V = 4\pi(1 - 4e^{-3})cm^3$

c) Donner une valeur approchée arrondie à 0,01 de V.