EPREUVES MATHS

BAC C TUNISIE

COMPILE PAR DIN : 0747960813

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION ❖❖❖ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2004**	**SESSION PRINCIPALE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 h COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

(Pour la figure, on prendra OA = 4 (en cm)).
La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J le symétrique du point O par rapport au point I et J' le symétrique du point O par rapport à I'.

1) a – Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.
   b – En déduire que les points B, J et J' sont alignés.

2) Soit S la similitude directe telle que S(J) = O et S(O) = J'.
   a – Déterminer une mesure de l'angle de S.
   b – Montrer que le point B est le centre de la similitude S .
   c – Donner le rapport de la similitude S.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que σ(J) = O et σ(O) = J'.
   a – Donner le rapport de σ .
   b – En déduire que la similitude σ admet un unique point invariant que l'on notera Ω.
   c – Déterminer $\sigma \circ \sigma$ (J) et en déduire que le point Ω appartient à la droite (JJ').
   d – Construire le point Ω ainsi que l'axe D de la similitude σ.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1) Résoudre dans l'ensemble ℂ des nombres complexes l'équation E.

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia .
   On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels .
   a – Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.
   b – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si | a | = 1.

3) On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
   a – Vérifier que pour tout réel x , on a

$$1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

$$1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

   b – En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1 + ia et 1 – ia.
   c – Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

PROBLEME (10 points)

A – On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{1+x}\ e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Etudier la dérivabilité de f_1 à droite de -1.
b – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c – Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.
d – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

6) a – Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^{x}$.

b – En déduire que pour tout réel $x \geq -1$, on a $f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)\,dx$.

a – Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.

b – Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, on a $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B – Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\ e^{-\frac{x}{n}}$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
b – On désigne par α_n l'abscisse de M_n . Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par

$$A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx .$$

a – Calculer I .

b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n}} - 1$.

c – En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|e^{-\frac{x}{n}} - 1| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.

d – Montrer que $|A_n - I| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

e – En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2005**	**SESSION PRINCIPALE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures COEF. : 4**

EXERCICE 1 (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que

$$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi], \quad AB = 3 \quad \text{et} \quad BC = 4.$$

1) Soit f la similitude directe telle que f(A) = B et f(B) = C.
   a – Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b – Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
   Montrer que H est le centre de f.

2) Soit D = f(C).
   a – Montrer que D appartient à la droite (BH).
   b – Construire le point D.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C. On désigne par Ω le centre de g.
   a – Montrer que $fog^{-1} = S_{(BC)}$.
   b – Soit E = g(C). Déterminer $S_{(BC)}$ (E).
   Construire alors le point E.
   c – Préciser la nature de gog. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE).
   d – Construire le point Ω et l'axe Δ de la similitude g.

EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne le point A d'affixe 1.

Soit l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$.
   a – Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.
   c – En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.

PROBLEME (10 points)

Soit $f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A – 1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a – Déterminer les branches infinies de $\mathscr{C}$.
b – Tracer $(\mathscr{C})$.

3) a – Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b – Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.
c – Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.

4) a – Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

b – Soit λ un réel strictement négatif.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}'$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives : $y = \lambda$ et $y = 0$.

B – Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$.

1) a – Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = \text{Log } 2$.

b – Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_2(x)$.

2) a – Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n}(1 - e^{nx})$.

b – Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite du problème on pose $R_n = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_n(x)$.

3) a – Vérifier que pour tout réel $t \leqslant 0$, $2e^t \leqslant 1 + e^t \leqslant 2$.
b – Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout réel $x \leqslant 0$, on a :

$$\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{(n-1)x}).$$

c – En déduire un encadrement de R_n pour $n \geqslant 2$.

4) Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $G_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_x^0 e^{nt}\,dt$.

a – Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

b – Montrer que $G_1(x) + G_2(x) + \ldots\ldots + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$.

5) On pose, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a – Montrer que $U_n = \text{Log } 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$.

b – Montrer que la suite (U_n) converge et trouver sa limite.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

❖❖❖

EXAMEN DU BACCALAUREAT

❖❖❖

SESSION DE JUIN 2006

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (4 points)

θ étant un réel de l'intervalle $[\,0, 2\pi\,[$; on pose pour tout nombre complexe z

$$f_\theta(z) = z^2 - (\,i + e^{i\theta}\,)z + (\,1 + i\,)(-1 + e^{i\theta})$$

1) a – Vérifier que $f_0(1 + i) = 0$
   b – En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(\,O, \vec{u}, \vec{v}\,)$ on considère les points A, B et M d'affixes respectives -1, $i\sqrt{3}$ et $-1 + e^{i\theta}$.
   a – Montrer que lorsque θ varie dans $[\,0, 2\pi\,[$, M varie sur un cercle ($\mathscr{C}$) de centre A dont on précisera le rayon.
   b – Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle ($\mathscr{C}$).

EXERCICE 2 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre [AB]. On désigne par F le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et par Δ la perpendiculaire à (AB) en A.

La tangente à $\mathscr{C}$ en F coupe la droite Δ en un point A'. Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer F et de directrice (AB).

1) a – Montrer que le point A' appartient à la parabole $\mathscr{P}$.
   b – Préciser la tangente à $\mathscr{P}$ en A'.

2) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point B et soit B' le point d'intersection de cette tangente avec la droite (A'F).
   Montrer que le triangle A'OB' est rectangle.

3) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par F et parallèle à (AB) et K le projeté orthogonal de F sur (AB).
   a – Soit M un point de $\mathscr{D}$ distinct de F et soit H son projeté orthogonal sur la droite (AB).
   Montrer que si M appartient à la parabole $\mathscr{P}$, alors FMHK est un carré.
   b – En déduire une construction des deux points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec la parabole $\mathscr{P}$.

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $[\,0, +\infty\,[$ par $f(x) = x + \mathrm{Log}(1 + e^{-2x})$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\,O, \vec{i}, \vec{j}\,)$

A – 1) a – Dresser le tableau de variation de f.
   b – Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation y = x est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
   c – Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$
   d – Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $(\,O, \vec{i}, \vec{j}\,)$

2) a – Montrer que f est une bijection de $[\,0, +\infty\,[$ sur $[\,\mathrm{Log}\,2, +\infty\,[$
   b – Construire la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction f^{-1} réciproque de f.

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$
   a – Montrer que pour tout t de $[\,0, +\infty\,[$ on a

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

   b – En déduire que pour tout x de $[\,0, +\infty\,[$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \mathrm{Log}\,(1 + x) \leq x$$

   c – En déduire un encadrement de $\mathrm{Log}(1 + e^{-2t})$ pour tout t de $[\,0, +\infty\,[$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par S_n la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations x = 0 et x = n.
   a – Montrer que $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$
   b – Montrer que (S_n) est convergente vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

B – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \int_0^{\mathrm{Log}2} dx$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\mathrm{Log}2} [f'(x)]^n\,dx$

1) Calculer u_0 et u_1.

2) a – Montrer que pour x de $[\,0, \mathrm{Log}\,2\,]$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$
   b – En déduire que pour tout entier naturel n

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \mathrm{Log}\,2.$$

   c – Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) a – Montrer que pour tout x de $[\,0, +\infty\,[$ on a $1 - f''(x) = [\,f'(x)\,]^2$
   b – Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on a $u_n = u_{n-2} - \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$
   c – En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{2n} = u_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k}$$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k$
   Montrer que (v_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION *** **EXAMEN DU BACCALAUREAT** *** ***SESSION DE JUIN 2007***	**SESSION PRINCIPALE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 : (4 points)

1) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
Résoudre l'équation : $z^2 - 2i\,z - 1 - e^{2i\theta} = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]0, \pi[$.
   a – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.
   b – Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

3) a – Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN.
   b – Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ coupe [AC] en O.

On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].

1) a – faire une figure.
   b – Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].

2) Soit f la similitude directe telle que : f(B) = O et f(H) = H'.
   a – Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.
   b – Montrer que H' est le milieu du segment [Of(A)].
   En déduire que A est le centre de f.

3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.
   a – Montrer que les points B, O et D sont alignés.
   b – Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que f(C) = D.
   c – Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.

4) Soit $g = S_{(DH)} \circ f$, ou $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH).
   a – déterminer g(A) et g(C).
   b – Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   c – Soit Ω le centre de g.
   Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.
   Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

PROBLEME : (10 points)

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

A –1) Soit g_n la fonction définie sur IR par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

a – Dresser le tableau de variation de g_n

b – Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α_n .

c – Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$.

d – En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x) = \dfrac{x\,e^x}{n + e^x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a – Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f_n(x) - x]$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

b – Montrer que pour tout x de IR, $f'_n(x) = \dfrac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

c – Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.

d – Donner le tableau de variation de f_n .

3) a – Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_n$ et de la droite D d'équation $y = x$.

b – Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

c – Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

(On prendra 2 cm pour unité de longueur ; on donne $\alpha_1 \simeq -1{,}4$, $\alpha_2 \simeq -1{,}2$).

B – Soient $I = \int_{-1}^{0} x\,e^x\,dx$ et $U_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$.

1) Calculer I.

2) Montrer que pour tout x de l'intervalle [–1, 0] , $\dfrac{xe^x}{n} \leqslant \dfrac{xe^x}{n+e^x} \leqslant \dfrac{xe^x}{n+1}$.

3) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .

4) On pose $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a – Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $\int_{k+1}^{k+2} \dfrac{1}{t}\,dt \leqslant \dfrac{1}{k+1}$.

b – En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} \geqslant \text{Log}\,(n+2) - \text{Log}\,2$.

c – Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2008	NOUVEAU REGIME SESSION PRINCIPALE
SECTION :	MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h — COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. La page 3/3 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La limite de ($x+1+e^{-x}$) quand x tend vers $-\infty$ est égale à
 a) $-\infty$. b) 0. c) $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-1$.
 Alors f est une solution de l'équation différentielle
 a) $2y'=y+2$. b) $y'=2y+2$. c) $y'=-2y-2$.

3) La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.
 La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à
 a) e^{-4}. b) $1-0{,}4e^{-4}$. c) $1-e^{-4}$.

Exercice n° 2 (5 points)

1) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1 page 3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e},e\right]$ par $f(x)=\ln^3(x)-3\ln x$ et les demi- tangentes à la courbe ($\mathscr{C}$) aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e.

 a) En utilisant le graphique :
 Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e},e\right]$ sur $[-2,2]$. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et ($\mathscr{C}'$) la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$).

 b) Tracer la courbe ($\mathscr{C}'$) et les demi-tangentes à ($\mathscr{C}'$) aux points d'abscisses respectives -2 et 2.

2) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n=\int_1^e (\ln x)^n dx$.
 a) Calculer a_1.
 b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n\geq 1$; $a_{n+1}=e-(n+1)\,a_n$.
 c) En déduire que $a_3=6-2e$.

3) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$.

 a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

 b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice n°3 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x-8y=5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x=8k-1$ et $y=3k-1$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que
$$\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$$
Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b) On considère le système (S) $\begin{cases} n\equiv 2 \pmod 3 \\ n\equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ où n est un entier .

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n\equiv 23 \pmod{24}$.

3) a) Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008}-1$ est divisible par 24.

Exercice n°4 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2 page 3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que $OA=OB$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D .
a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).
b) Déterminer les images de C et D par $g\circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g\circ f^{-1}$.

4) Soit $I'=f(I)$ et $J'=g(J)$
a) Déterminer les images des points J et I' par $g\circ f^{-1}$.
b) Montrer que les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercice n°5 (4 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1, 0, 2) , B(0, 0, 1) , C(0, -1, 3) et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1) a) Vérifier que E a pour coordonnées (0, 2, 3).
b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE .

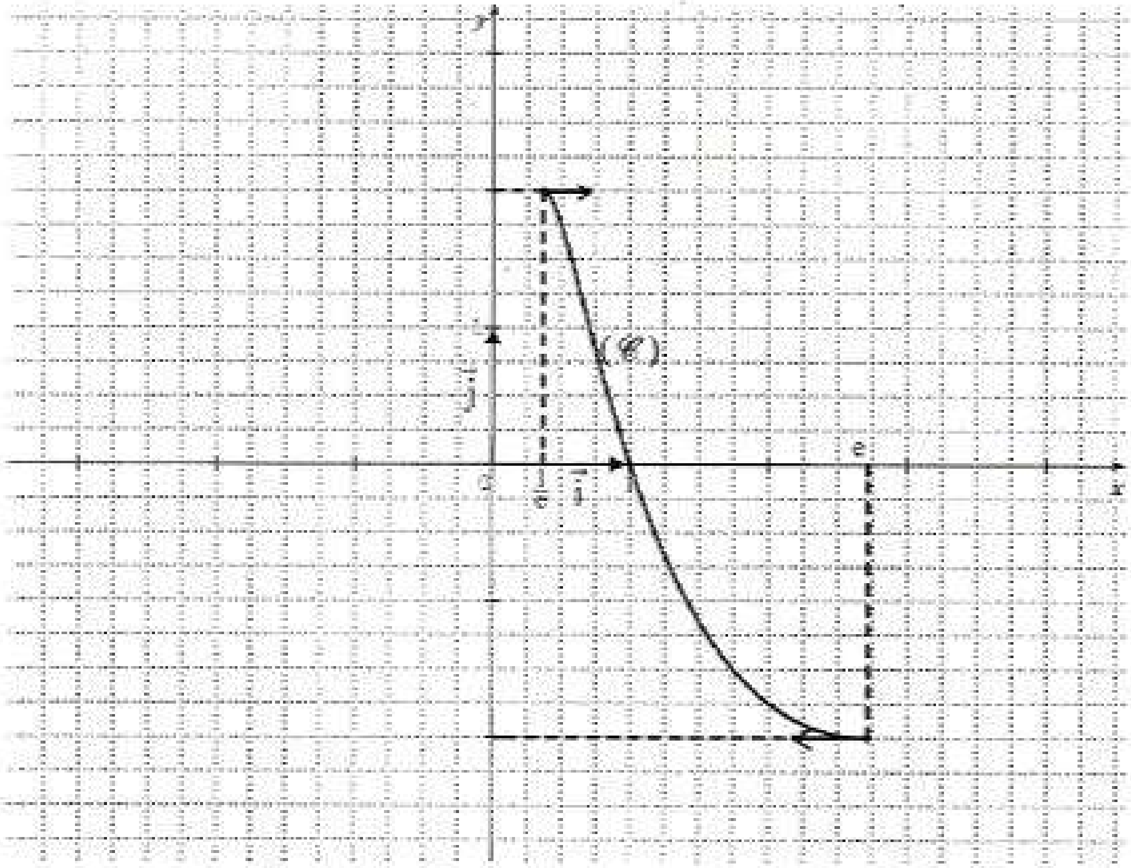
2) a) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x-2y-z+5=0$. Montrer que $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC) .

b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathscr{P}$.

3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K .
a) Déterminer le rapport de h .
b) Le plan $\mathscr{P}$ coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J .
Calculer le volume du tétraèdre EIJK .

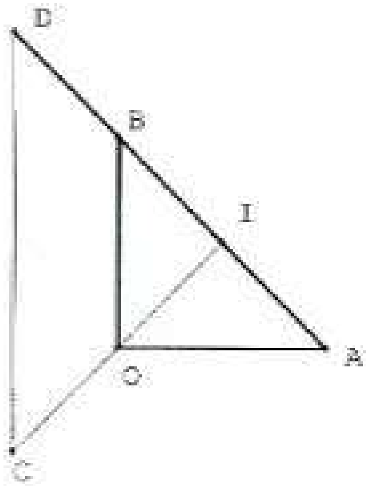
Exercice 2

Figure 1



Exercice 4

Figure 2



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION PRINCIPALE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $1+i\sqrt{3}$.

L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe

a) $-\sqrt{3}+i$ b) $\sqrt{3}-i$ c) $-\sqrt{3}-i$

2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$,

alors $a_n \equiv 0 \pmod 5$ pour

a) tout entier naturel n pair b) tout entier naturel n c) tout entier naturel n impair

4) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte quatre questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des quatre questions de ce QCM.

La probabilité pour que ses quatre réponses soient toutes exactes est

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3^4}$ c) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^4$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,,\,1[$ par $f(x) = \ln(1-\sqrt{x})$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tracer $(\mathscr{C})$. (On précisera la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,\,1[$ sur $]-\infty, 0]$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

b) Tracer (Γ). (On précisera la demi-tangente à (Γ) en O).

3) a) Montrer que, pour tout $x \in \,]-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations

$x = -\ln 2$; $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1-\sqrt{x})dx$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [AC] et [JC] .

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que $f(K) = L$.

c) Soit H le milieu du segment [A J]. Justifier que $f(I) = H$.

3) On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I, K, J et H .

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

d) Déduire alors que $\varphi = f \circ s_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans 2° et $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ .

a) Tracer Δ .

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q .

Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta , 2 \sin\theta)$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.

b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.

2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.

Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.

b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].

Exercice 5 (3 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$.
Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

SESSION PRINCIPALE

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4h COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

1) Le quotient de (– 23) par (–5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2 (\text{mod } 12)$.

4) $x^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$ équivaut à $x \equiv 0 \ (\text{mod } 8)$.

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 (\text{mod } 4) \\ x \equiv 4 (\text{mod } 5) \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \ (\text{mod } 20)$.

6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 (\text{mod } 4)$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe, [AB] et [IJ] sont deux diamètres perpendiculaires du cercle ($\mathscr{C}$), M est un point variable du cercle ($\mathscr{C}$) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et MBEN et MKFA sont des carrés de sens direct.

1) Montrer que les points E, F et M sont alignés.

2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B.
   a) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre I.
   b) Déterminer $r_1 \circ r_2$ (E). En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l' on déterminera.

3) Soit S la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
   a) Déterminer S (M).
   b) Construire le point G image de F par S.
   c) Montrer que F est le milieu du segment $[KG]$.
   d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P.
   Construire P.

Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

$\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ se coupent en un point d'abscisse β.

a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   a) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

   b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.

   c) Placer dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les points A $(\beta, 0)$ et B$(0, \dfrac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta , f(\beta))$.

   d) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Pour tout réel t de $]0, +\infty[\setminus\{\beta\}$, on désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ et la droite d'équation $x = t$.

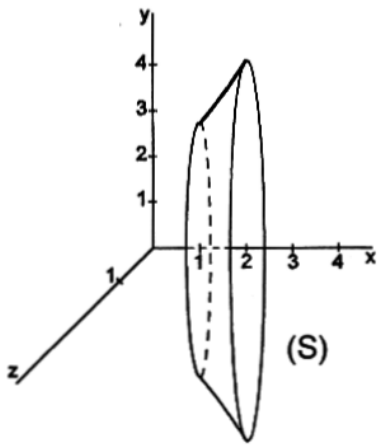
   a) Montrer que pour tout réel $t \in\ ]0,+\infty[\setminus\{\beta\}$, $\mathscr{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.

   b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

   c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0 , \beta[$ tel que $\mathscr{A}(t_1) = \mathscr{A}(t_0)$.

   Hachurer $S(t_1)$.

Exercice 5 (4 points)



Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1 , 2]$ autour de l'axe (Ox).
Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.

1) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}}dt$.

   Vérifier que $\mathcal{V} = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t\, dt$.

   a) Montrer que G est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $G'(x) = 2\ F'(x)$.

   b) En déduire que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $2\,F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $G(x) = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

   b) Calculer alors $\mathcal{V}$.

figure (1)

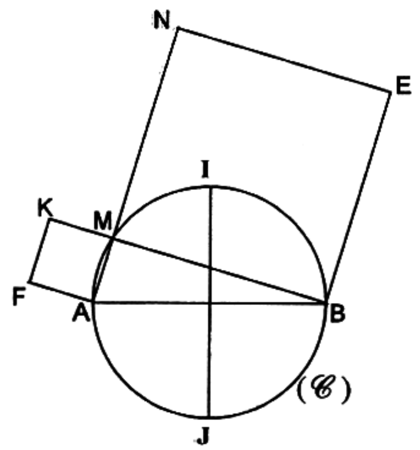
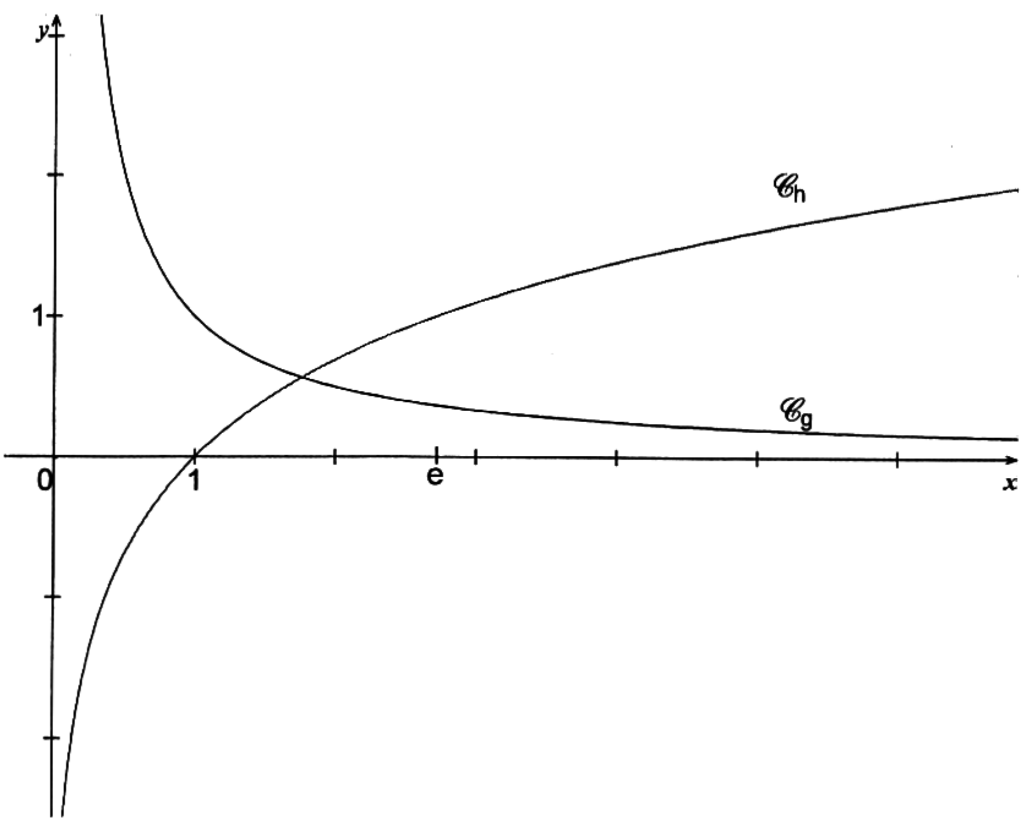


figure (2)



REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 heures** **COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod 2$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod 7$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $x \equiv 0 \pmod 5$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ y \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 2 (6 points)

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .
2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

   b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I.

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Construire I.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite d'équation y = 1 et les droites d'équations x = k et x = k + 1 où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]\leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k$.

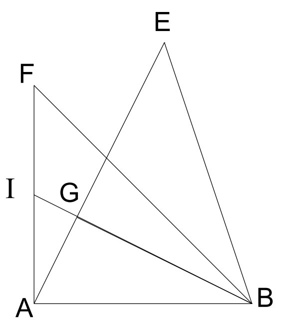
5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) -\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]\leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 (5 points)



Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,
I est le milieu de [AF] . Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.

1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la nature de gog et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan\left(\widehat{ABI}\right)=\frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.

d) En déduire que G est le centre de g.

3) Soit r = gof.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

EXERCICE 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\dfrac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\dfrac{1+z}{z} = \dfrac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA] , privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe ($O,\vec{u}$).

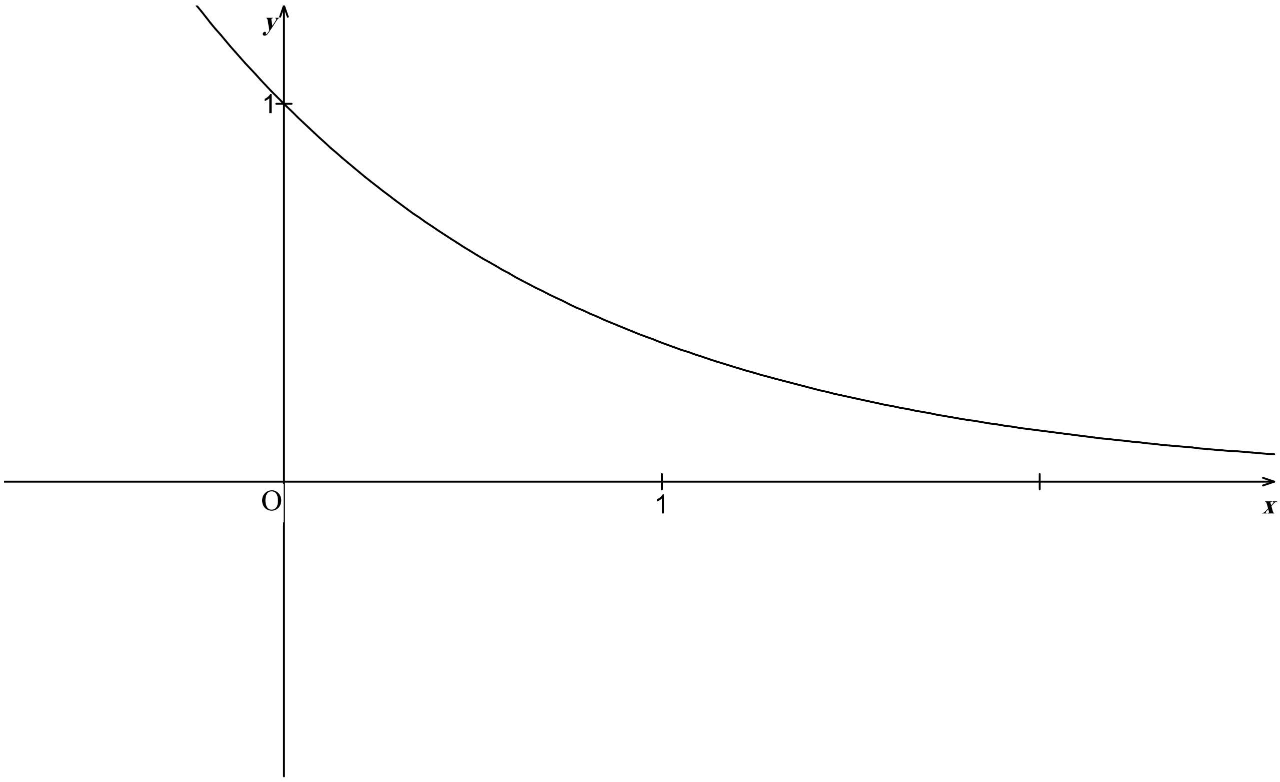
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right) \equiv \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

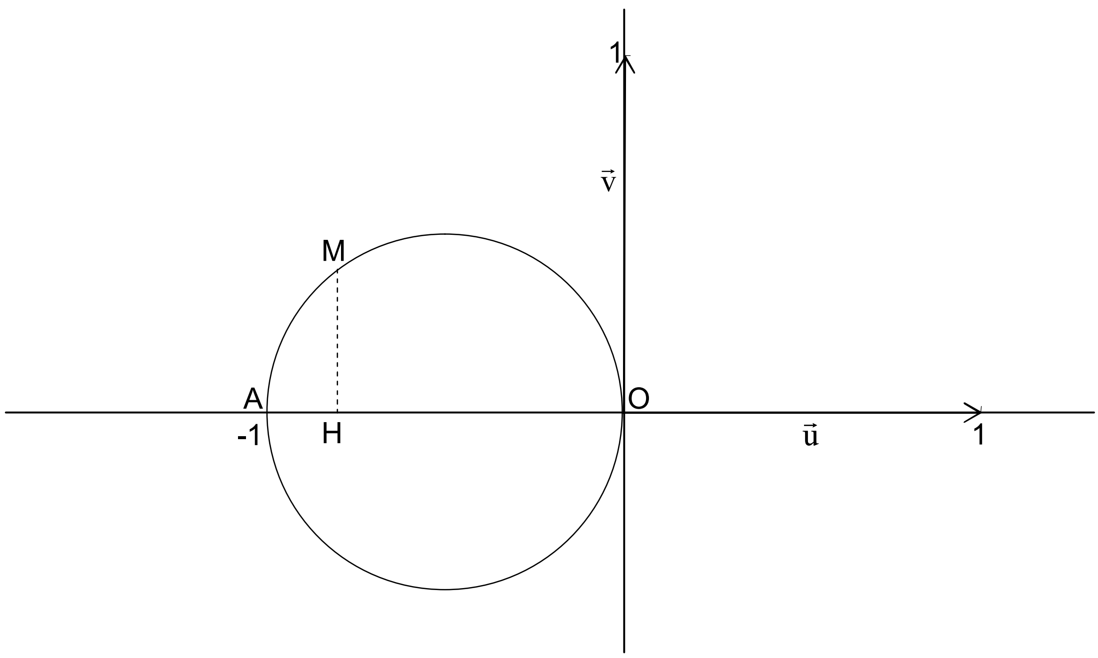
b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 : figure 2



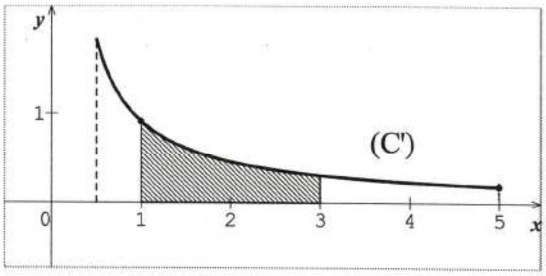
REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : Mathématiques		SESSION PRINCIPALE	

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1,0) et B(3, 1). Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f ' de la fonction f.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.

2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.

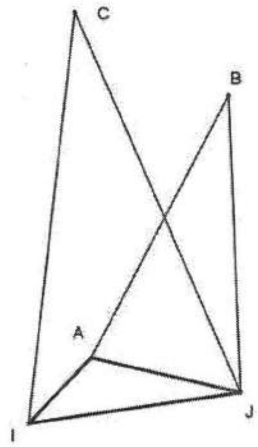
3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

4) Pour tous a et b de [1,3], $|f(b)-f(a)| \leq |b-a|$.

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que

$(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1) a) Déterminer $r_C(I)$.
b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

2) Soit K = t (C).

Montrer que BC = BK et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

a) Soit O le milieu de [AC].
Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnées (3 , 2).

Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1) a) Soit les points E(3 ,0) et F(0,2).

Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F. Donner son rapport et son angle.

b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.

c) En déduire que S(N) = P.

d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que M' = S(M).

Montrer que $z' = -\frac{3}{2}i\,z + \frac{13}{2}\,i$.

2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.

Montrer que $3x + 2y = 13$.

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Exercice 4 (3 points)

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0{,}286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n.

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?

Exercice 5 (6 points)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2, $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f_k' la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

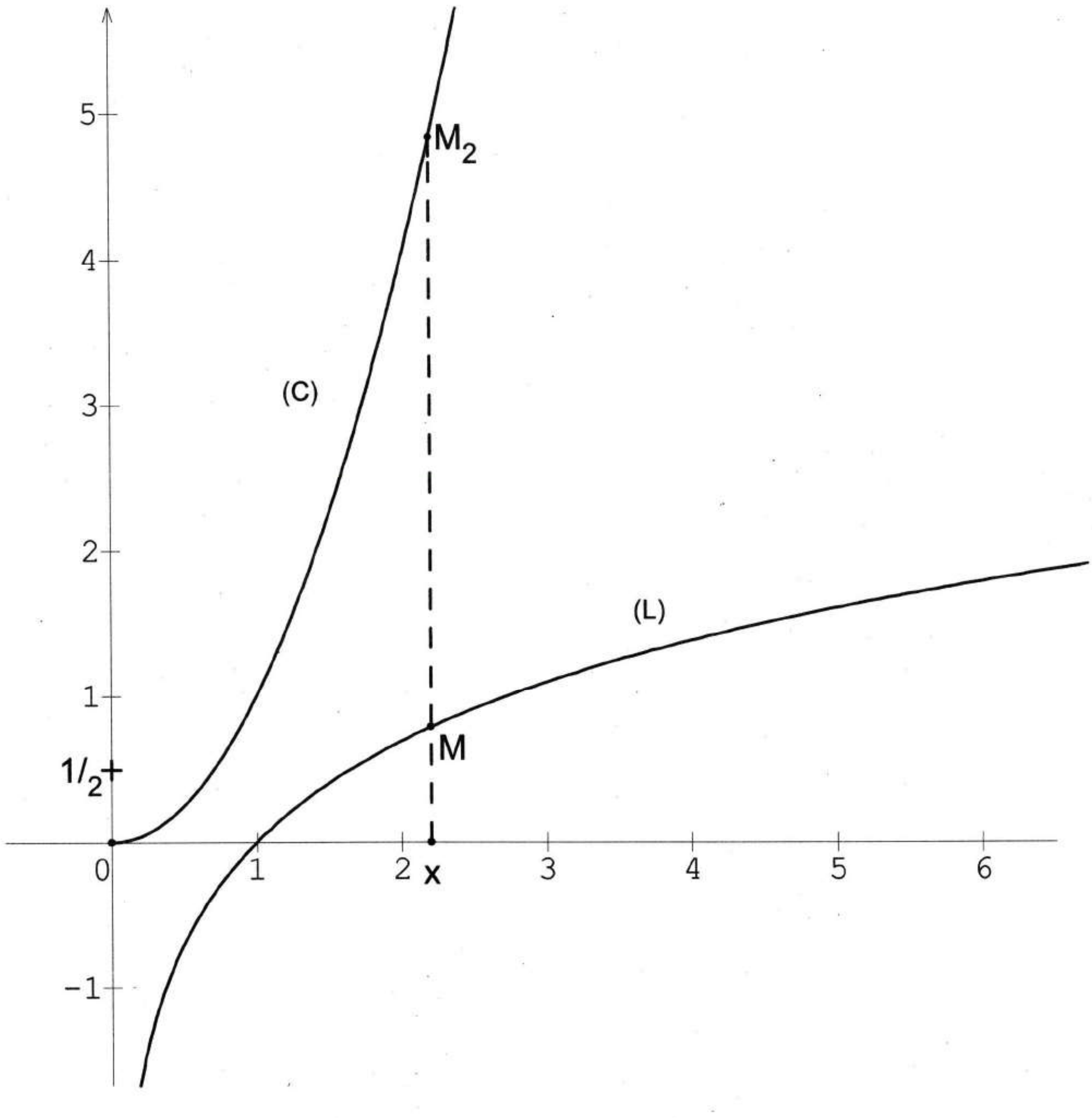
2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Annexe (à rendre avec la copie)



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **4 H** Coefficient : **4**
Section: **MATHEMATIQUES**	**SESSION PRINCIPALE**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations (A_1), (A_2), (A_3) et (A_4) ci-dessous, répondre par " Vrai " ou " Faux " en justifiant la réponse.

1) (A_1) : Soit n un entier. " Si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors $n \equiv 0 \pmod{61}$ ".

(A_2) : " L'équation $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ".

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$.

(A_3) : " F est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ ".

(A_4) : " Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de F, $F'(x) = \frac{x}{1+(\ln x)^2}$ ".

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A.

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.

2) Soit C l'image de A par f.

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC = 2AB.

b) Placer le point C.

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g.

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$; puis montrer que G est le milieu du segment $[\Omega H]$.

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

<u>Exercice 3</u> : (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

On considère les points $I(1,1,0)$, $J(0,1,1)$ et $K(1,0,-1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

b) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est $x - y + z = 0$.

2) Soit le point $S(1,-1,1)$. Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

3) Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ.

a) Montrer que $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

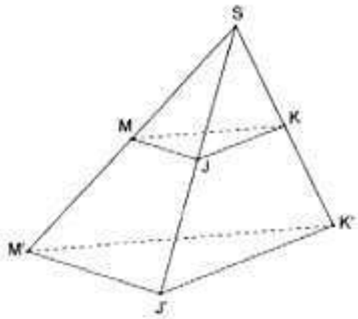
b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK.

4) Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.

a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.

b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM), [S J) et [S K) respectivement en M', J' et K'.

Montrer que le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $\frac{7}{2}$.



<u>Exercice 4</u> : (3 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\text{Aff}(\overrightarrow{EM})$ et $\text{Aff}(\overrightarrow{FN})$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P = (1 - i)\sin\theta . e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 : (6 points)

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ et soit C_φ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty,0[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x$ et la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+\ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g.

Dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2)**, on a tracé dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C_φ, C_f et C_g des fonctions φ, f et g et la droite d'équation y = x.

1) Soit a un réel et b un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b.

b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si $(b=e^{-a})$.

Dans la suite on suppose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b=e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si ($a\neq0$ et $a=\dfrac{e^a}{e^a-1}$).

b) En déduire que Δ_α est tangente à la courbe C_f et à la courbe C_g respectivement aux points $A(\alpha,f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha},g(e^{-\alpha}))$.($\alpha$ étant la valeur définie dans la question **I.** 2))

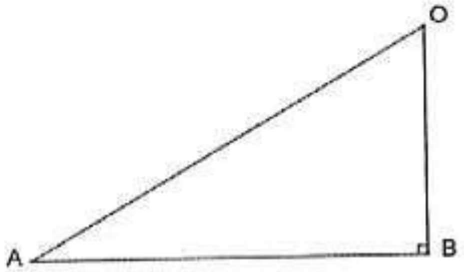
c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2)**, le point $A(\alpha,f(\alpha))$.

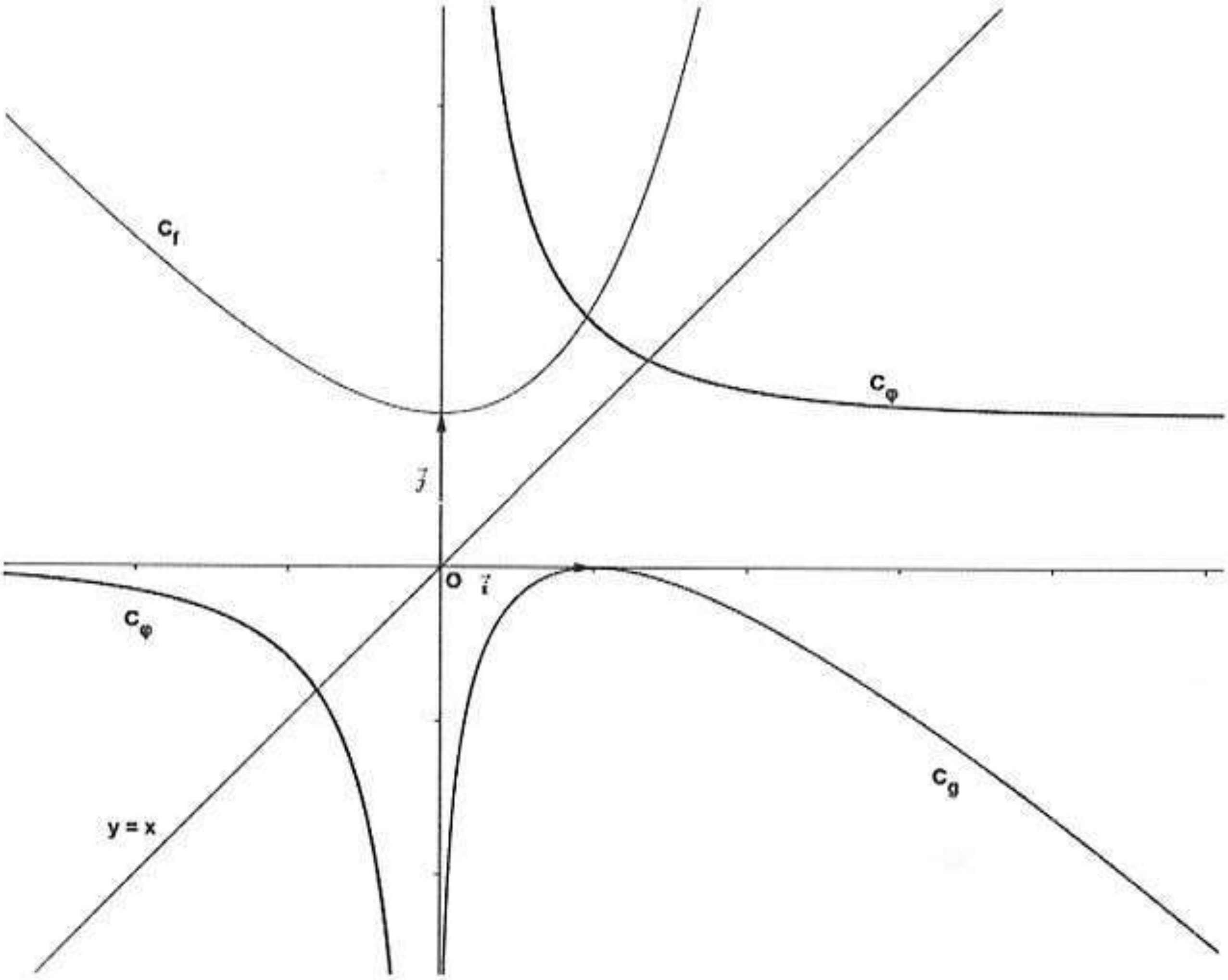
b) Vérifier que $e^{-\alpha}=f(-\alpha)-\alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha},g(e^{-\alpha}))$.

c) Tracer Δ_α.

ANNEXE



(Figure 1)



(Figure 2)

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◇◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : Mathématiques	**Session principale**

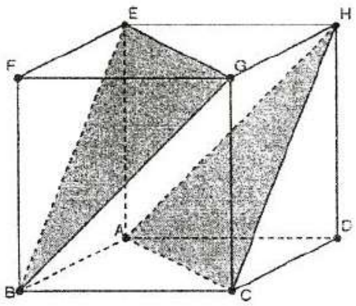
Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 **(4 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit ABCDEFGH le cube tel que

$\overrightarrow{AB} = 6\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 6\vec{k}$.



On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$.

b) En déduire une équation du plan P.

c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$

a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.

b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que [AJ] est un diamètre de S.

c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{U} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'.

b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t.

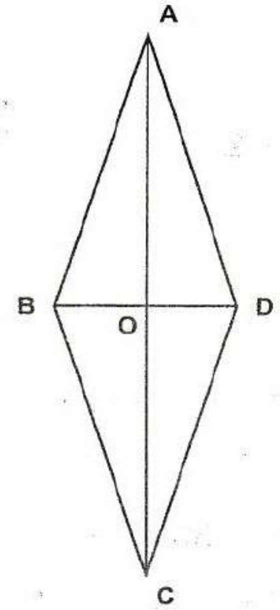
c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.

Exercice 2 **(5 points)**

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange

de centre O tel que $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC = 3 BD.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA = 9OD'.

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

3) Soit $g = f \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q.

Montrer que MQ = 3 NP.

Exercice 3 **(4 points)**

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1(\bmod 10)$.

a) Montrer que $a^9 + a^8 + .. + a + 1 \equiv 0(\bmod 10)$.

b) En déduire que $a^{10} \equiv 1(\bmod 10^2)$.

(On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + .. + a + 1)$).

2) Soit b un entier.

a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

b) En déduire que $b^4 \equiv 1(\bmod 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

a) Montrer que $b^{40} \equiv 1(\bmod 10^2)$.

b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

Exercice 4 **(7points)**

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(1+\tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^{+}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C).

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$).

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=\frac{\pi}{8}$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.

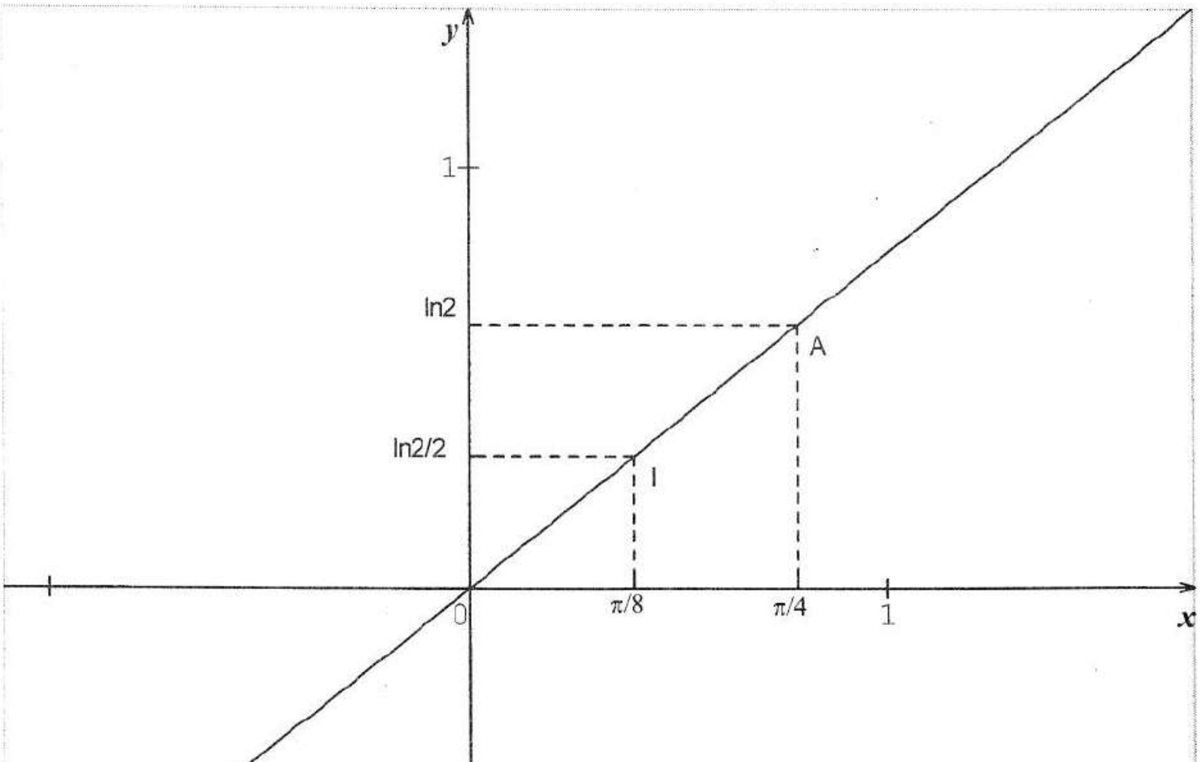
b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.

b)Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}dx$.

Annexe (à rendre avec la copie)



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : **Mathématiques**	**Session principale**

Exercice 1 (5 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2 .

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) =K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

2) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Déterminer l'axe Δ de g.

c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que g(B) = D et en déduire que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$

3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe .

b) On pose $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J .

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer $f(I)$.

Exercice 3 (4points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $47x+53y = 1$.

a) Vérifier que $(-9,8)$ est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Justifier que $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$.

b)Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.

3) Soit $N = 1+45+45^2+...+45^{105} = \sum_{k=0}^{k=105} 45^k$.

a) Montrer que $44N \equiv 10 \pmod{53}$.

b) En déduire le reste de N modulo 53.

Exercice 4 (7 points)

I- Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = e^{\sin x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

b) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).

c) Soit (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
Justifier que (T) a pour équation $y = x+1$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=e^{x}\sqrt{1-x^{2}}-1$.

On donne ci-contre le tableau de variation de g .

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	-1

a) Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,1]$.

3) On se propose de déterminer la position relative de (C_f) et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=e^{\sin x}-(x+1)$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h'(x)=g(\sin x)$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel β dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=\alpha$.

c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles $[0,\beta]$ et $\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

e) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\geq x+1$. Conclure.

II

1) a) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, $\sin x\leq x$.

b) Déduire alors que pour tout réel $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\leq e^{x}$.

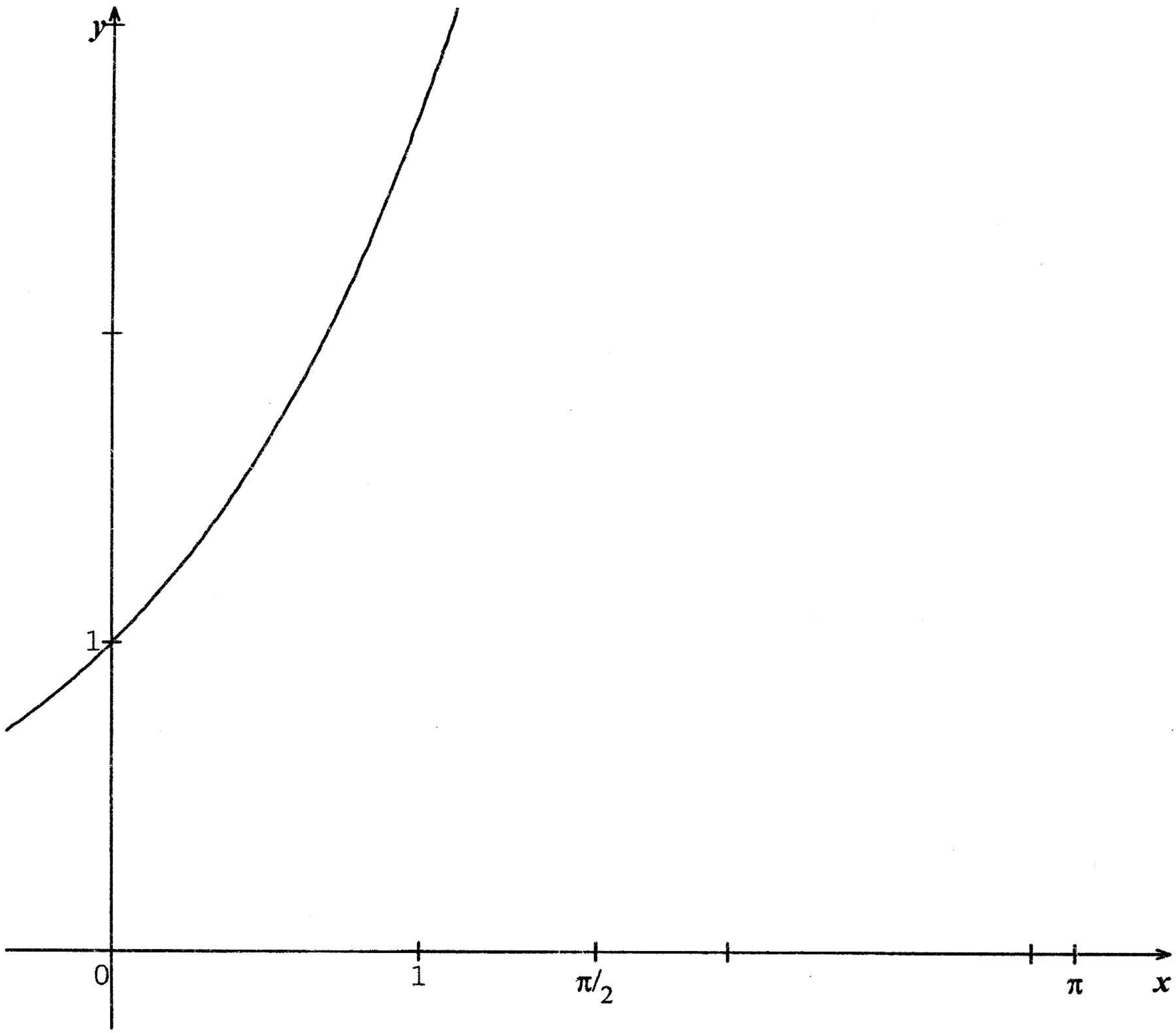
c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction $x\mapsto e^{x}$.

Tracer la droite (T) et la courbe (C_f).

2) a) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx\leq e-1$ et que $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$. Montrer que $\frac{\pi^{2}}{4}+\pi\leq A\leq e\pi-2$.

Annexe (à rendre avec la copie)



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Mathématiques**	
	Durée : **4 h**	Coefficient : **4**
SESSION **2016**	**Session principale**	

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A et tel que $AB < AC$.

La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que $f(B) = F$.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).

c) Déterminer $f(C)$.

2) Le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre $[BC]$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[EF]$ se coupent en A et H.

a) Montrer que $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

b) Soit $I = f(H)$. Construire le point I.

c) Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.

d) La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que $f(F) = J$.

3) Soit g la similitude indirecte de centre A et telle que $g(B) = F$.

a) Montrer que $g = S_{(AC)} \circ f$.

b) Soit $E' = f(E)$. Montrer que E' est un point de la droite (AC).

c) Soit $F' = g(F)$ et $H' = g(H)$. Construire l'image par g du rectangle FHEI.

Exercice 2 **(3 points)**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)m\,z - (1-i)m^2 = 0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in \left]0,\pi\right[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que (z_1z_2 est un réel strictement positif) si et seulement si $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}\right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1z_2 = |m|^2\sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2, images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC] avec l'axe $(0,\vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB.OC$.

b) En déduire que $|m| = OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m.

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

(On convient que $|z_1| < |z_2|$).

Exercice 3 **(4 points)**

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$. Montrer que $a \equiv 1 \pmod{10^4}$.

2) Soit $b = (9217)^4$. Montrer que $b \equiv 1 \pmod{5}$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^5 + 5\,b_n^4 + 10\,b_n^3 + 10\,b_n^2 + 5\,b_n$.

4) a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$.

5) a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10000.

Exercice 4 **(8 points)**

A) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2\,x\,\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit λ un réel de $]0,1[$. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} S_\lambda$.

B) 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur l'intervalle I.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n, deux suites réelles (α_n) et (β_n).

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3) On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\left(f(x)-(e+\frac{1}{n})\right) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

4) Soit H la primitive de h sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Justifier que les fonctions $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$ et $v : x \mapsto 2+2(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et dérivables sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $u(x)=v(x)$.

c) Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

5) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\beta_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 2-\frac{2}{3}e$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Annexe (à rendre avec la copie)

Figure 1

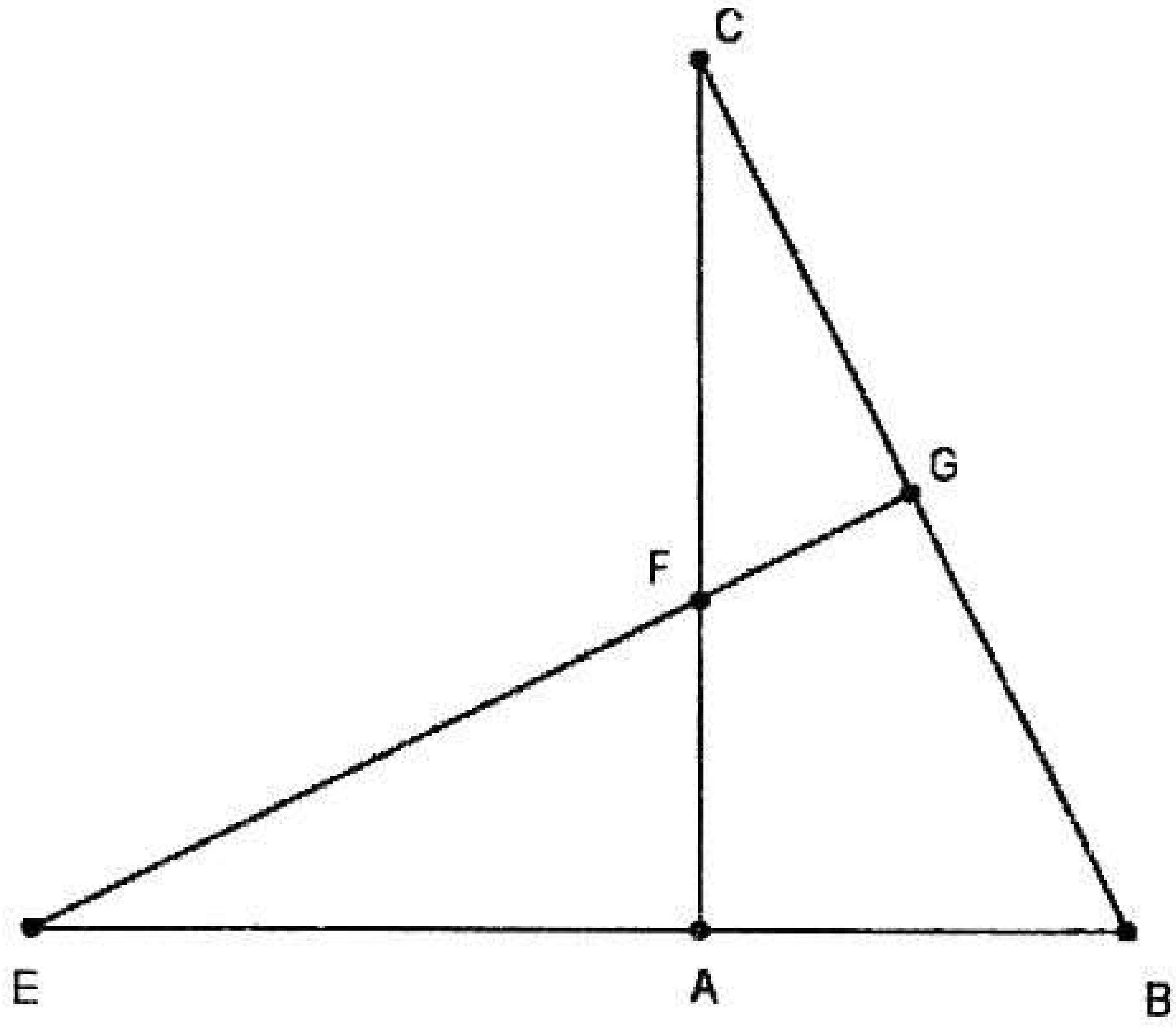
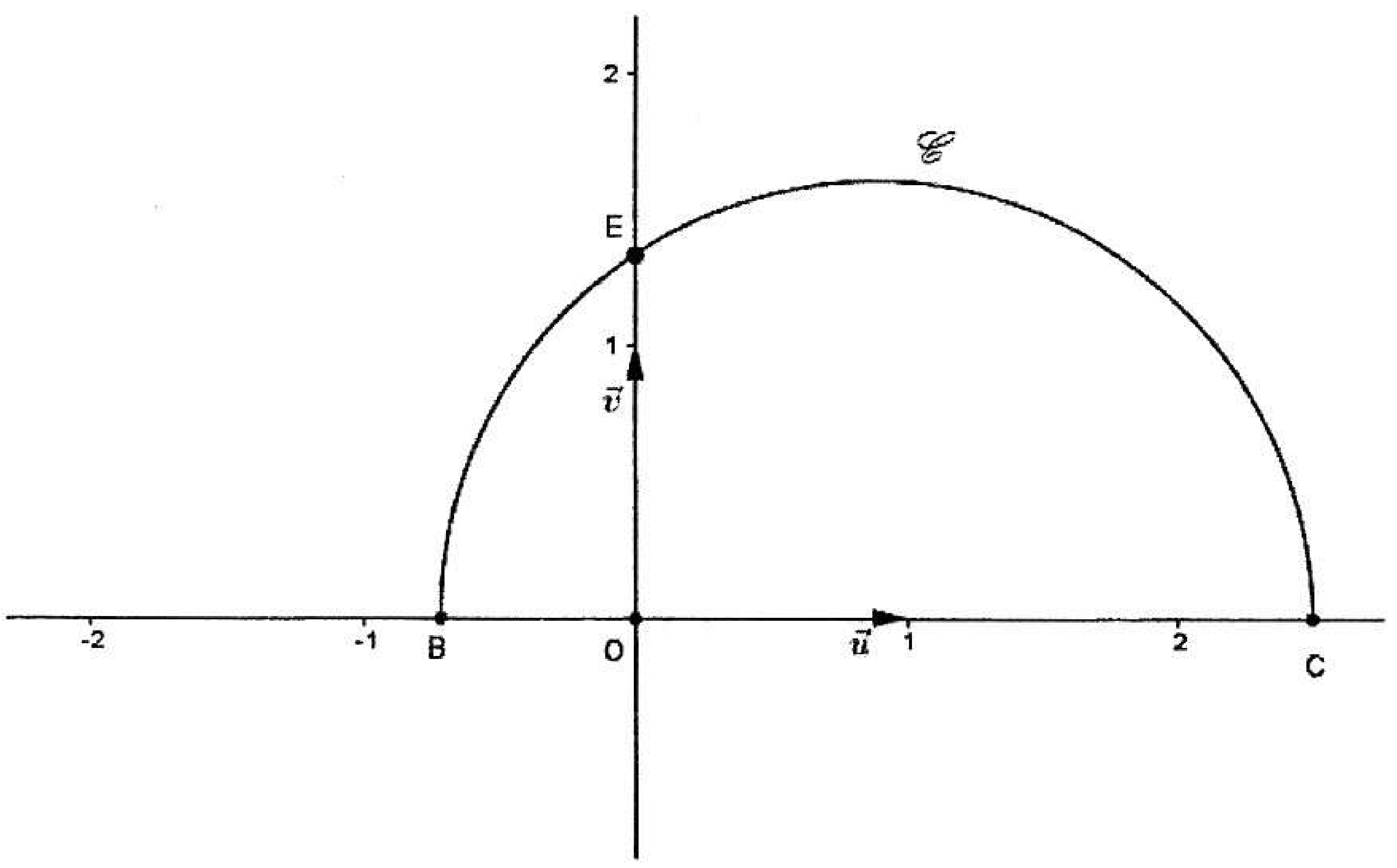


Figure 2



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Mathématiques** Durée : 4h — Coefficient : 4 **Session principale**

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$,

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC),

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$.

1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F = R(J)$.

Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$. On pose $f = h \circ R$.

a) Vérifier que $f(J) = I$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$. $\left(\text{On donne } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.

En déduire que le rapport de f est égal à $1+\sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = I$.

a) Montrer que $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) Déterminer le rapport de g.

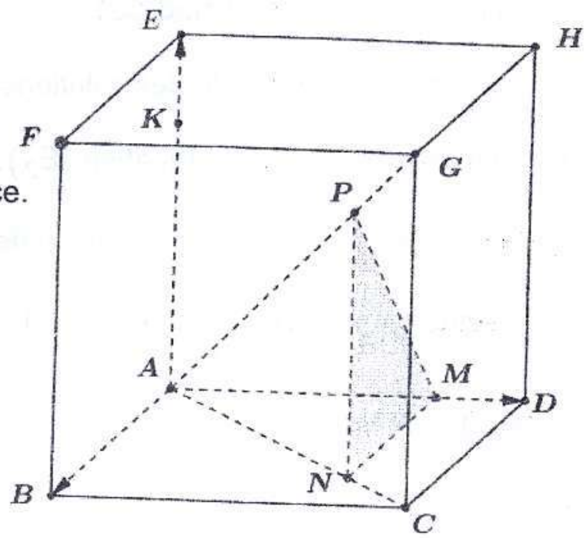
c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD).

d) Montrer que $g = h \circ S_{(\Omega D)}$.

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.

Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Exercice 2 (3,5 points)



L'espace est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$.

b) Montrer que l'aire du triangle ECD est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Calculer le volume du tétraèdre AECD.

2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.

On pose $M = h(D)$.

a) Le plan passant par M et parallèle au plan (DCG) coupe les segments $[AC]$ et $[AG]$ respectivement en N et P. Montrer que $h(C) = N$ et $h(G) = P$.

b) Le plan passant par M et parallèle au plan (ECD) coupe la droite (AE) en un point K.

Calculer le volume du tétraèdre AKNM.

3) Soit (S) la sphère de centre le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que la sphère (S) coupe le plan (DCG) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Soit (S') l'image de la sphère (S) par l'homothétie h.

Montrer que (S') coupe le plan (MNP) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3 (4 points)

1) Soit x un entier non nul premier avec 53.

a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.

b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$.

2) Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$, où $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3) Soit x une solution de l'équation (E_1).

a) Montrer que x est premier avec 53.

b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$.

c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$.

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5) On considère dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$.

a) Vérifier que $(3\,,\,4)$ est une solution de l'équation (E_2).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$.

Exercice 4 (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$, si et seulement si, $x \leq \ln(2)$.

3) Montrer que le point $B(\ln 2\,,\,1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x :\mapsto e^x - 1$.

a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Calculer $(g^{-1})(0)$ et $(g^{-1})(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x} = 1$.

6) On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = 2\left(f(x) - \left(g^{-1} o\, f\right)(x) \right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.

7) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $G_n(x) = 2\left(f_n(x) - \sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Montrer que pour tout $x \in [\ln(n),+\infty[$, $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t)\,dt$.

b) Vérifier que pour tout $x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.

En déduire que pour tout $x \geq \ln(n)$, $f_n(x) \leq e^x - 1$.

c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$. Montrer que $A_n = 2\sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

	Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . . Nom et Prénom : . . . . Date et lieu de naissance :	Signatures des surveillants . . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 1 à rendre avec la copie

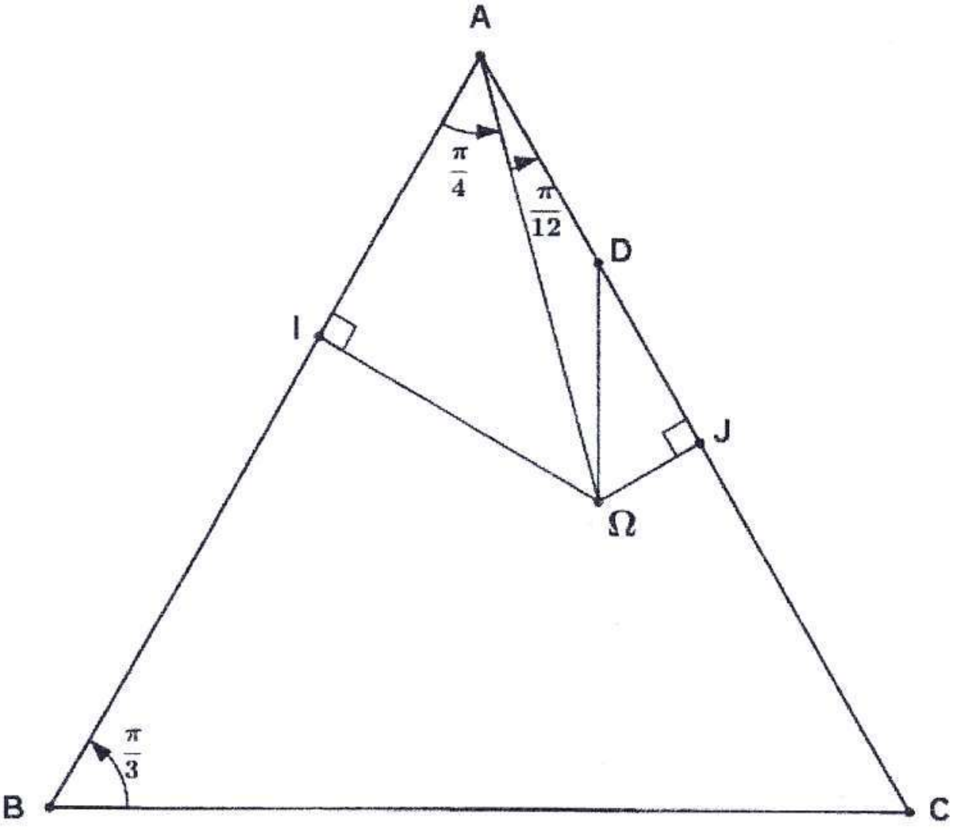


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 2 à rendre avec la copie

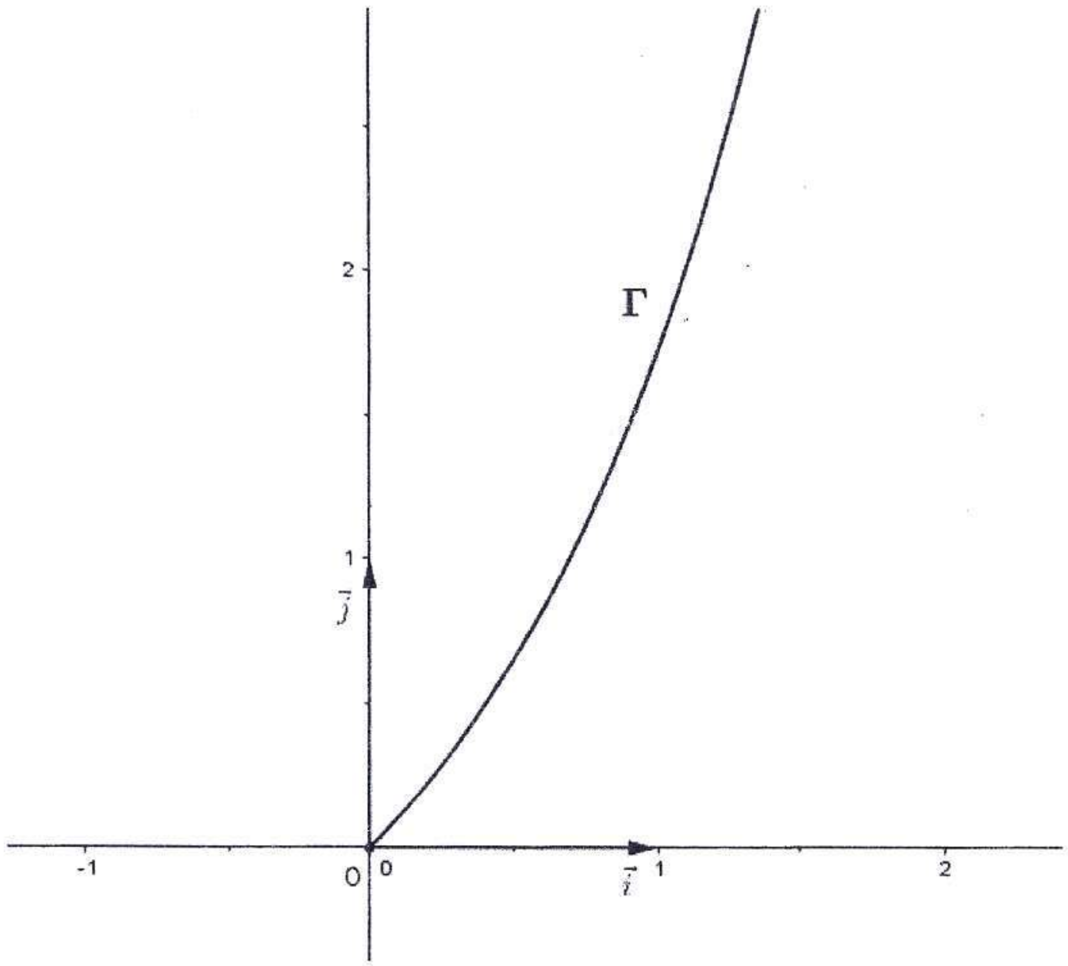
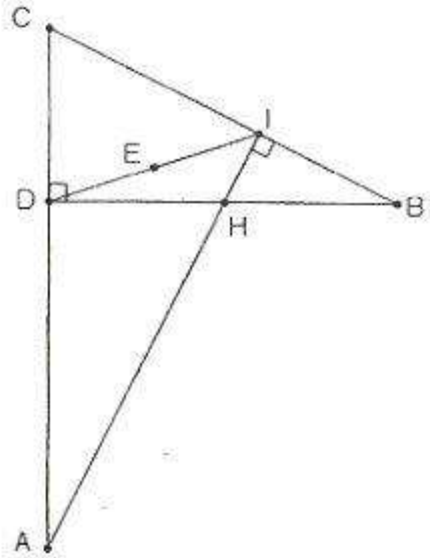


Figure 2

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session principale***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Mathématiques***
	Durée : **4h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)



Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- DBC est un triangle rectangle en D tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $DB = 2DC$;
- le point H est le milieu du segment $[DB]$;
- le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) ;
- le point E est le milieu du segment $[ID]$;
- les droites (IH) et (CD) se coupent au point A.

1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $\tan\widehat{CBD}$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.

b) Montrer alors que $R(I) = E$.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Déterminer $f(H)$.

b) Montrer que $f(I) = I$.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que $f(C) = A$.

3) a) La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre $[BH]$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF).

c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω. Montrer que $f(J) = F$.

d) Montrer que $f(F) = \Omega$.

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.

Exercice 2 (3 points)

Soit θ un réel non nul.
Dans la **figure 1** de **l'annexe** jointe,

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;
- $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}) \equiv \theta\,[2\pi]$;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, -1 et $1+\sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$;
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1+\sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}\,e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = OD\,e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}\,e^{i\theta}\,z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E).
Déterminer z_B.

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD\,e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

d) Construire alors le point B.

Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln x & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Vérifier que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Dans la **Figure 2** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe Γ de la fonction $x \mapsto e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

a) Construire les points A et B de (C_f) d'abscisses respectives e et $\dfrac{1}{e}$.

b) Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ'.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ'.

Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$.

B) Soit n un entier naturel.

On pose $u_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t\,dt$ et $v_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)\,dt$.

1) a) Montrer que $u_n>0$.

b) Montrer que $0<u_n\leq\frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) Montrer que $u_{n+1}=e-\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}-(n+1)\,u_n$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\,u_n=e$.

2) a) Montrer que $-\frac{u_n}{e}\leq v_n\leq 0$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) Vérifier que pour tout $t\in\left]0,+\infty\right[$, $f(t)=t\,f'(t)-t$.

Montrer alors que $v_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f'(t)\,dt-u_{n+1}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)\,v_n=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}}-v_{n+1}-u_{n+1}$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)\,v_n=0$.

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e},1\right]$ tel que $f(\alpha_n)=\frac{v_n}{u_n}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

Exercice 4 (5 points)

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 8)$.

B) On se propose de déterminer **l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls (m,n,q) tels que $2^{2m}+3^{2n}=q^2$.**

1) Vérifier que le triplet $(2,1,5)$ est un élément de A.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m,n,q) est un élément de A.

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2-3^{2n}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 8)$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $\left(q-3^n\right)$ et $\left(q+3^n\right)$ sont pairs.

b) Soit $d=\left(q-3^n\right)\wedge\left(q+3^n\right)$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d=2$.

c) Montrer que $q-3^n=2$ et que $q+3^n=2^{2m-1}$.

En déduire que $q=2^{2m-2}+1$ et que $3^n=2^{2m-2}-1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m=2$.

5) On suppose que $m \geq 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - **Session principale - 2018**

Annexe à rendre avec la copie

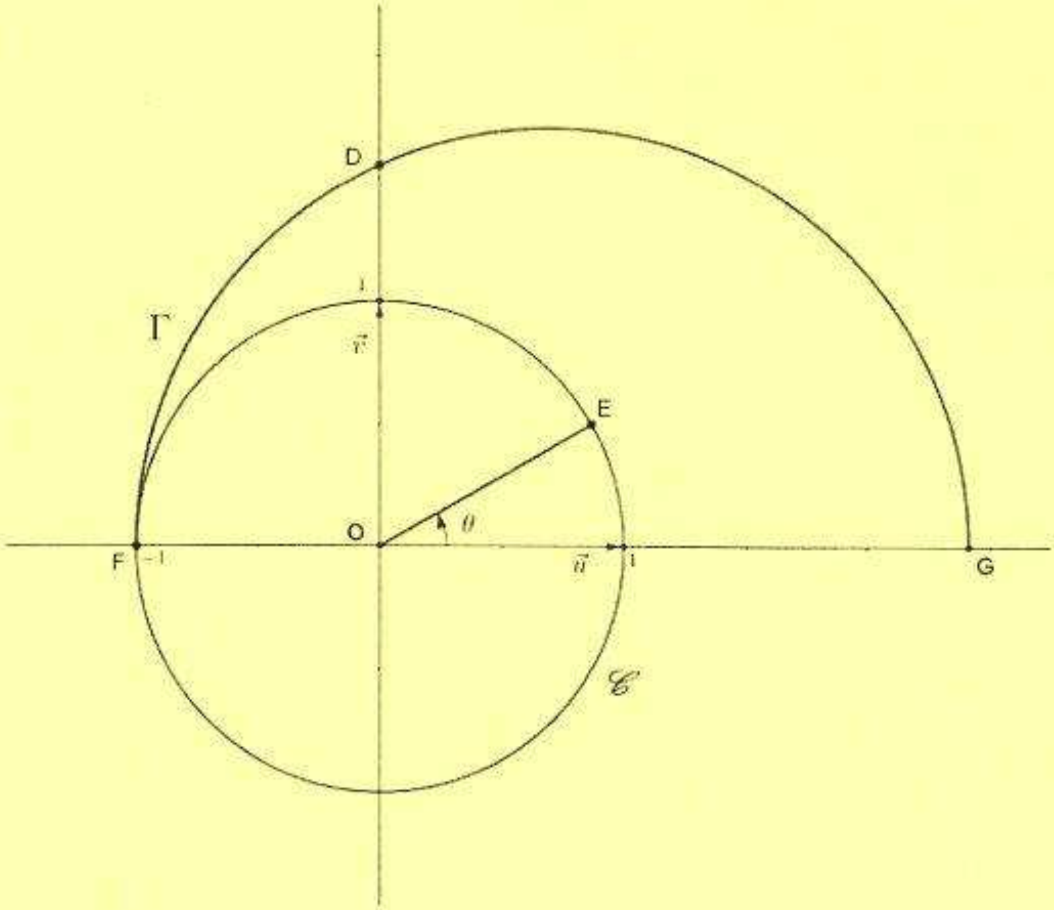


Figure 1

Ne rien écrire ici

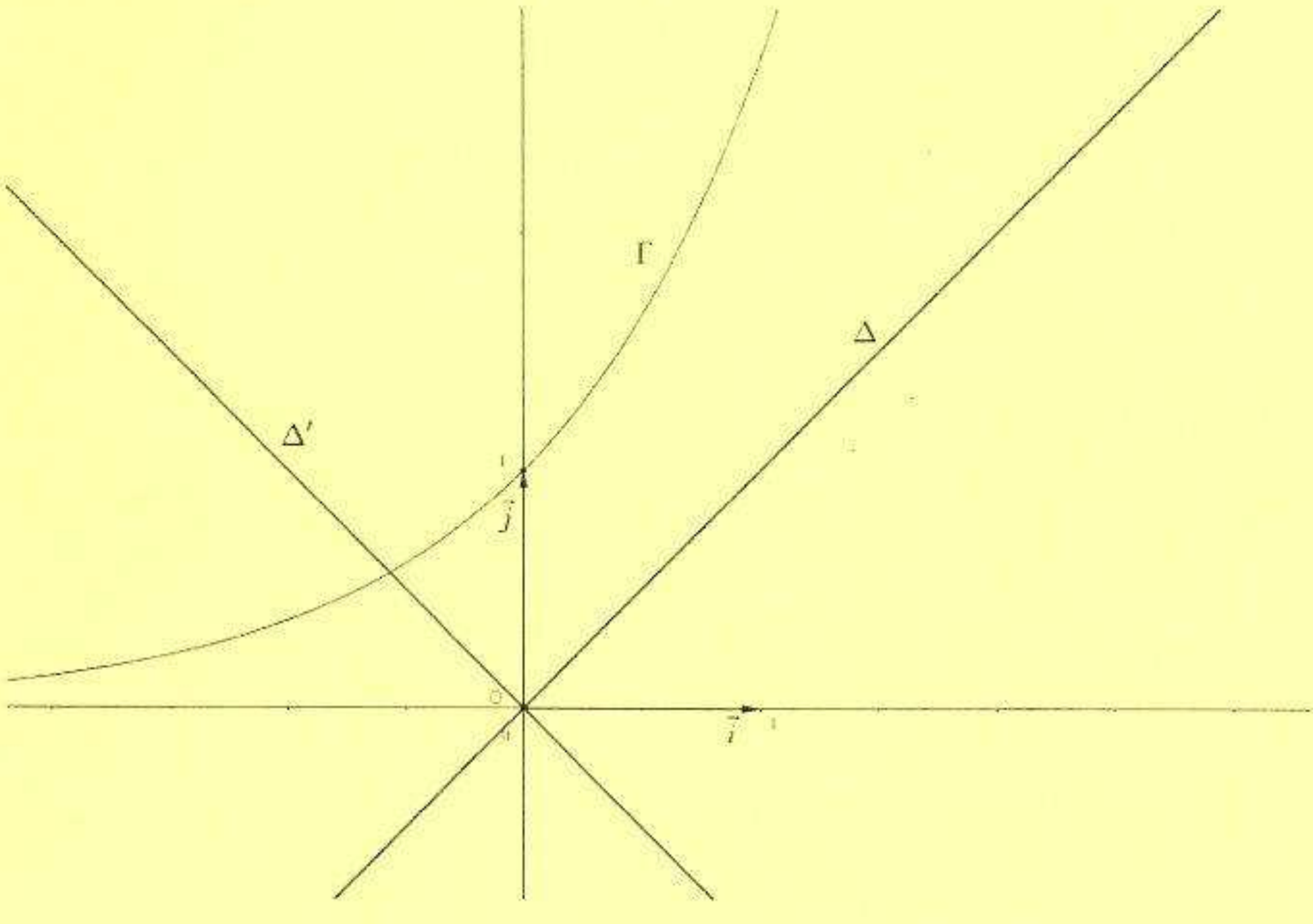


Figure 2

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION **2019**	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4 / 4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 : (5 points)

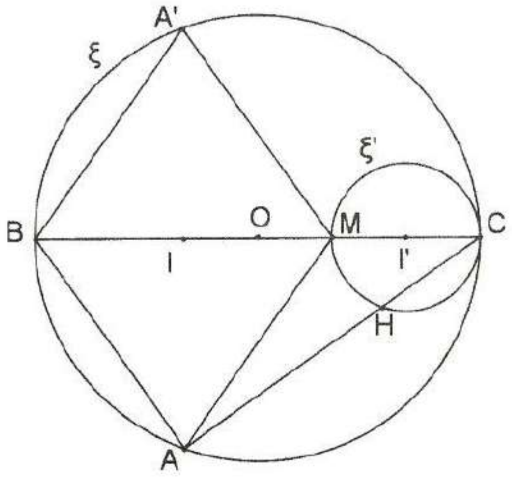
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous,

ξ est le cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, M est le point de $[BC]$ tel que $CM = \frac{1}{3}BC$

et ξ' est le cercle de diamètre $[CM]$. I et I' sont les milieux respectifs des segments $[BM]$ et $[CM]$.

A et A' sont deux points du cercle ξ tels que AMA'B est un losange et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La droite (AC) recoupe le cercle ξ' en H.



1) a) Montrer que les droites (AB) et (HM) sont parallèles.
   b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.
   c) Montrer que $HM = \frac{1}{3}AB$ et que $HA^2 = AB^2 - HM^2$.
2) On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.
   a) Préciser l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
   b) Déterminer les images par S des droites (AI) et (MH). En déduire $S(A')$.
3) Montrer que $S(I) = I'$ et en déduire que (HI) est tangente en H au cercle ξ'.
4) On pose $S' = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}$.
   a) Vérifier que S' est une similitude directe dont on précisera le centre et le rapport.
   b) La droite (A'M) recoupe le cercle ξ en N. Montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C.
   c) Déterminer $S'(A)$. En déduire alors l'angle de S'.

Exercice 2 : (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(2,0,1), B(-2,0,1), C(1,1,1) et D(-4,0,-1).

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer que P est d'équation z = 1.
2) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-4z-1=0$.
   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre Ω.
   b) Soit le point I(0, 0, 1), montrer que S et P se coupent suivant le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.
3) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\Omega_\lambda(0, 0, \lambda)$ et $R_\lambda = \sqrt{(\lambda-1)^2+4}$.
   a) Montrer que la sphère S_λ de centre Ω_λ et de rayon R_λ coupe P suivant le cercle $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer λ_0 pour que $D \in S_{\lambda_0}$.
   c) Déterminer les homothéties de l'espace transformant S en S_{λ_0}.

Exercice 3 : (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 29 x - 13y = 6.
   a) Vérifier que (2,4) est une solution de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $x^{19} \equiv -2\ [29]$.

2) Justifier que $2^{28} \equiv 1\ [29]$ et en déduire que – 8 est solution de (E').
3) Soit x_0 une solution de (E').
   a) Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1\ [29]$.
   b) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8\ [29]$ puis que $x_0 \equiv -8\ [29]$.
   c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E').
   d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x-3)^{19} \equiv -2\ [29]$.
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2\ [29], \\ (x-3)^{13} \equiv -2\ [13]. \end{cases}$

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1-e^{-x}}$.

1) a) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur [0, 1[.
   b) Montrer que pour tout $x\in[0,1[$; $g(x)=-\ln(1-x^2)$.
   c) Montrer que l'équation g(x) = x admet une solution α sur [0,7 ; 0,8].
   d) On donne en annexe la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la première bissectrice Δ et le point $A(\alpha,\alpha)$.
   On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe de g. Tracer $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

2) Soit φ la fonction définie sur [0, 1[par $\varphi(x)=\int_0^{g(x)} f(t)\,dt$.

   a) Montrer que φ est dérivable sur [0, 1[et que $\varphi'(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

   b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à [0, 1[, $\dfrac{2x^2}{1-x^2}=a+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{1-x}$.

   c) En déduire que $\varphi(x)=-2x+\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x\in[0,1[$.

   d) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la région du plan située entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations respectives x = 0 et x = α.
   Montrer que $\mathscr{A}=2\left(\varphi(\alpha)-\dfrac{\alpha^2}{2}\right)$.

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k.3^k}$.

   Soit $n\geq 1$. On pose pour tout $t\in[0,1[$, $S_n(t)=2\sum_{k=1}^{n}t^{2k-1}$.

   a) Montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)\,dt=u_n$.

   b) Montrer que pour tout $t\in[0,1[$, $S_n(t)=(1-t^{2n})\,g'(t)$, où g' est la dérivée de la fonction g sur [0, 1[.

   c) Montrer que pour tout $0\leq t\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)g'(t)\leq S_n(t)\leq g'(t)$.

   d) En déduire que $\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\leq u_n\leq g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

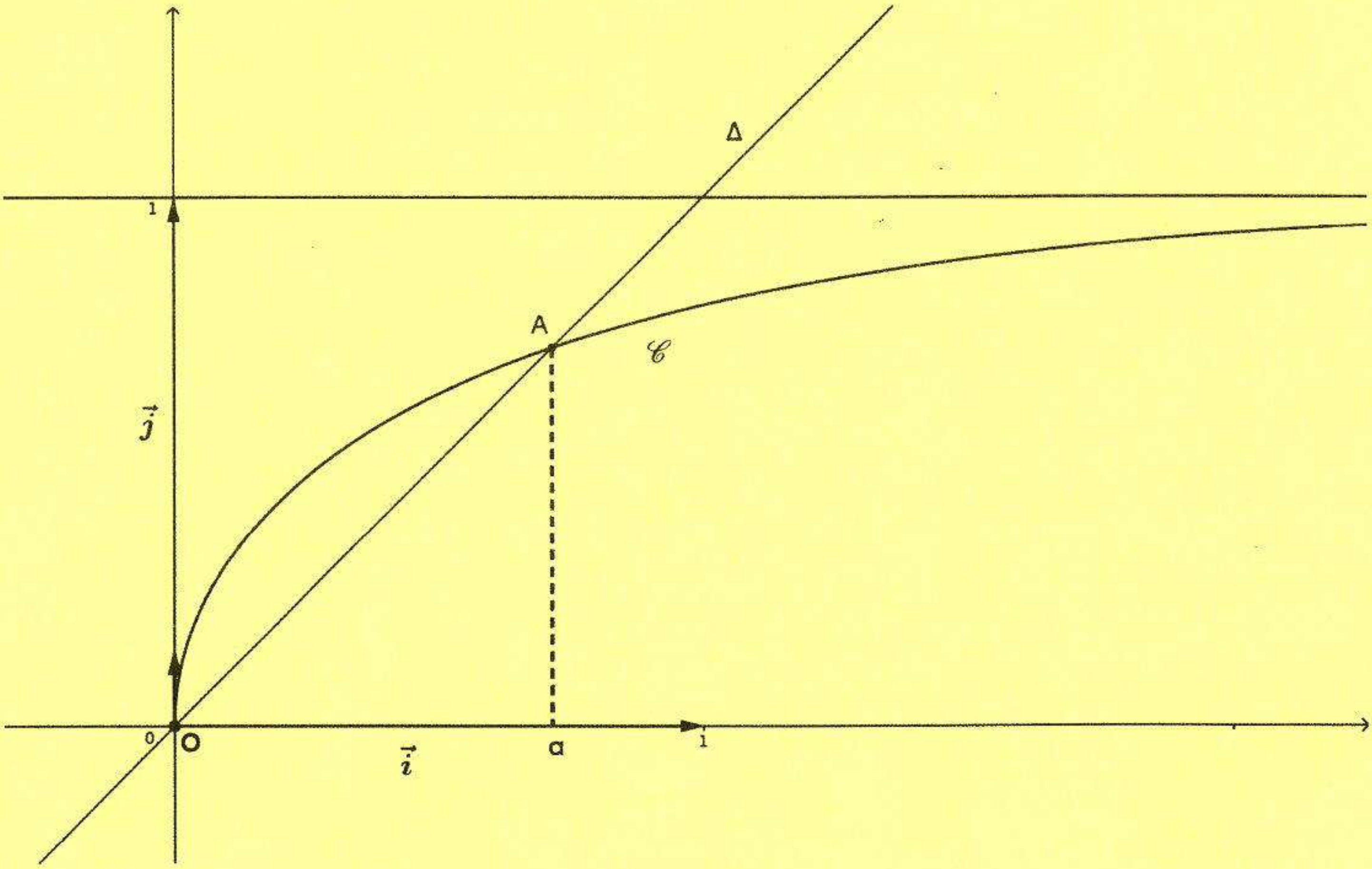
Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session principale (2019)

Annexe à rendre avec la copie



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

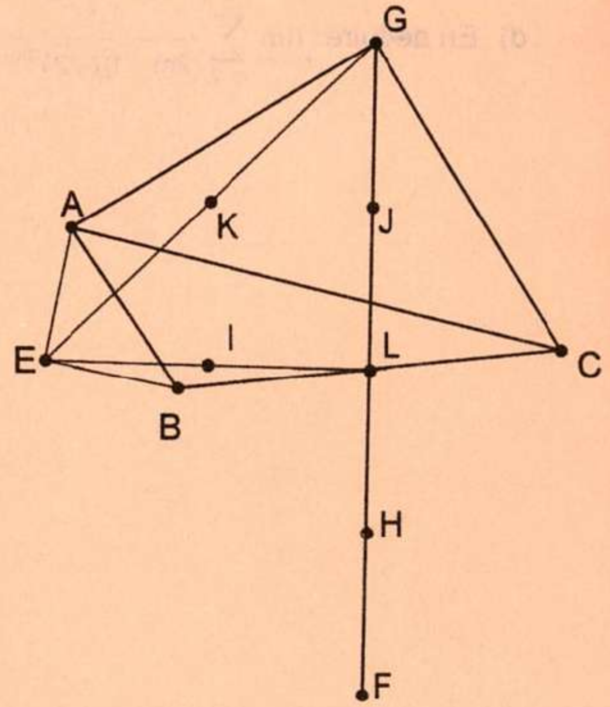
Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en G et en E.

L, K, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[GE]$, $[EL]$ et $[GL]$. F et H sont les symétriques respectifs de G et J par rapport à L.

On note r_1 et r_2 les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs G et E. S_L désigne la symétrie centrale de centre L.



1) a) Déterminer $r_2 \circ S_L \circ r_1(A)$.
Caractériser $r_2 \circ S_L \circ r_1$.
   b) En déduire que le triangle EFG est rectangle, isocèle.
   c) Justifier que le quadrilatère LJKI est un carré.

2) Soit φ la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{LK}$ et d'axe Δ passant par I.
On pose $g = \varphi \circ S_{(LE)}$, où $S_{(LE)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (LE).
   a) Montrer que $\Delta = (IH)$.
   b) Montrer que $g(J) = I$ et $g(L) = E$.
   c) Prouver que g est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3) Soit f l'antidéplacement qui envoie J en I et L en E.
   a) Justifier que f est une symétrie glissante.
   b) Donner les éléments caractéristiques de f.

4) Soit M un point du plan. Soient M' et M'' les images de M respectivement par f et g.
Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 2 : (4 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans la figure 1 de l'annexe, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives 1, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a+\bar{a}$.

   a) Vérifier que $R\in(O,\ \vec{u})$. Construire R.

   b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

   a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.

   b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Leftrightarrow (i\bar{a}+1)z+(ia-1)\bar{z}=i(a+\bar{a})$.

   c) Montrer que $(AP)\perp(OM)\Leftrightarrow (i\,\bar{a}+1)z-(ia-1)\bar{z}=0$.

   d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par Z_H l'affixe du point H.

   Justifier que $Z_H=\dfrac{i(a+\bar{a})}{2(i\bar{a}+1)}$.

3) Soit N le point d'affixe $Z_N=\dfrac{(a+\bar{a})}{(i\bar{a}+1)}$.

   a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.

   b) Construire le point N.

   c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n=2\times5^n+7$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impair.

   b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n.

   c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\equiv1 \pmod 8$.

2) a) Montrer que si $\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 8 \\ x\equiv 7 \pmod{125} \end{cases}$ alors $x\equiv 257 \pmod{1000}$.

   b) Montrer que pour tout $n\geq3$, $a_n\equiv257 \pmod{1000}$.

   c) Quels sont les trois derniers chiffres de $(2\times5^{2020}+7)(2\times5^{2021}+7)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$.

   b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1}. Montrer que d est différent de 7.

   c) Trouver alors d.

Exercice 4 : (7 points)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan P.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout réel x, $0<f(x)<1$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α telle que $0,5<\alpha<0,6$.

d) Déterminer le signe de $f(x)-x$ pour tout réel x. Interpréter graphiquement le résultat.

4) Dans la figure 2 de l'annexe, on a construit la droite d'équation $y=x$ et on a placé le réel α sur l'axe des abscisses et le réel $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la courbe (ζ).

b) Tracer la courbe (ζ') de f^{-1}

5) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x-\ln(1+\sqrt{1+e^{2x}})$ est une primitive de f.

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

Montrer que $A=\alpha+\ln\left(\dfrac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$.

II. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_k définie sur $[0,+\infty[$, par $F_k(x)=\int_0^x (f(t))^k\,dt$

1) a) Montrer que la fonction F_k est croissante sur $[0,+\infty[$,

b) Montrer que pour tout réel $t\in[0,+\infty[$, $0\le (f(t))^k\le e^{-kt}$.

c) En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $0\le F_k(x)\le \dfrac{1}{k}$

d) Montrer alors que la fonction F_k possède une limite finie l_k quand x tend vers $+\infty$.

e) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} l_k=0$.

2) a) En utilisant la question I.5.a) montrer que $l_1=-h(0)$.

b) Montrer que pour tout réel $t\in[0,+\infty[$, $(f(t))^3-f(t)=f'(t)$.

c) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

d) Montrer que $I_3 = \ln(1+\sqrt{2}) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $k \geq 2$,

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1}\left(\left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1}\right).$$

b) En déduire que $I_{2k+1} - I_{2k-1} = \dfrac{-1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}$, $k \geq 2$.

c) Montrer que $I_{2k+1} = I_3 - \displaystyle\sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$, $k \geq 2$.

d) En déduire $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

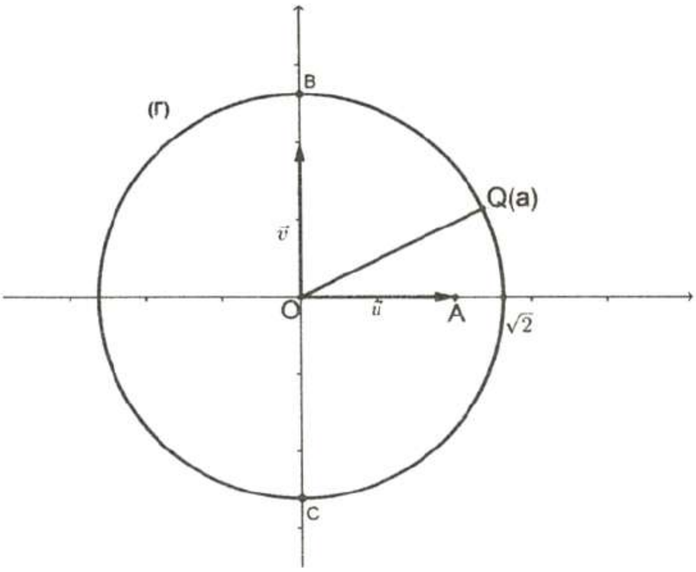
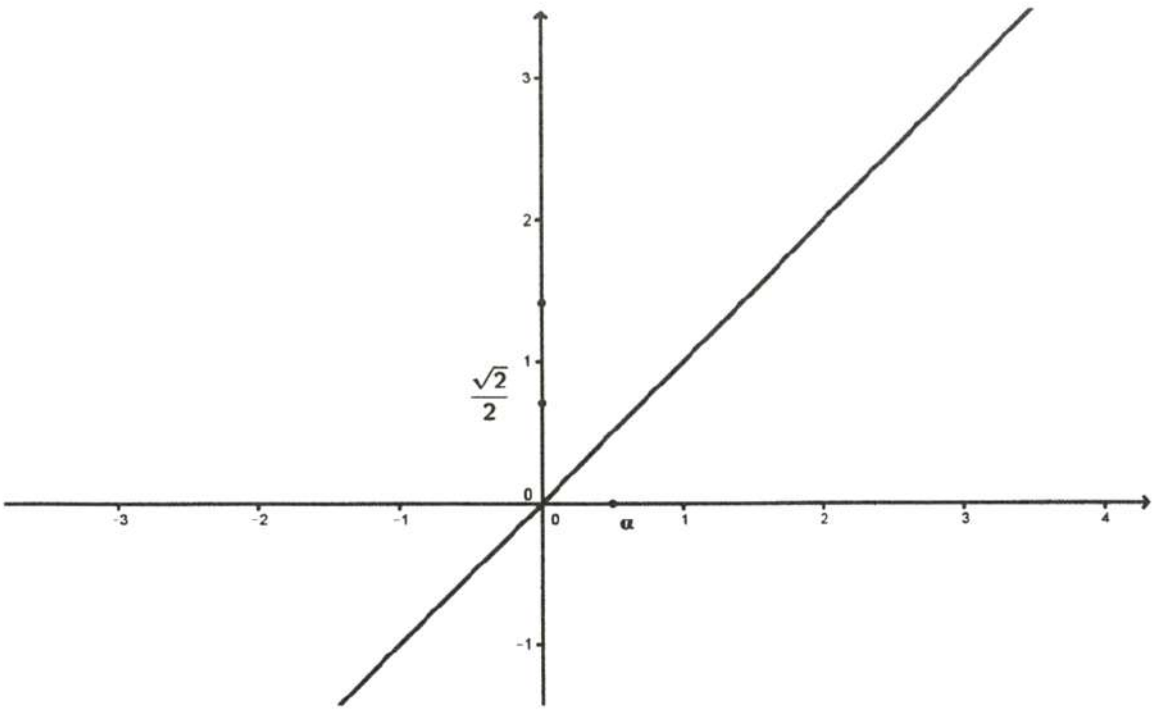


Figure 2



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

*****

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte quatre pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5.5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure de l'annexe jointe, $OABC$ est un rectangle de centre I tel que $OC = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et D le point du segment $[OA]$ tel que $OD = OC$.

1) **a/** Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur I et D sur B.

b/ Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

c/ On note Ω le centre de f. Construire Ω.

2) Soit g l'antidéplacement qui envoie O sur I et D sur B.

a/ Montrer que g est une symétrie glissante.

b/ Soit J le milieu du segment $[OI]$ et K le milieu du segment $[BD]$.
Les droites (JK) et (OA) se coupent au point E.
Montrer que $g(E) = J$.

c/ En déduire que $g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{EJ}}$.

3) **a/** Montrer que $f^{-1} \circ g = S_{(OA)}$. En déduire que $f(E) = J$.

b/ Comparer OE et OJ. En déduire que les droites $(O\Omega)$ et (JK) sont perpendiculaires.

Dans la suite, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})$.
On note z_I, z_J et z_K les affixes respectives des points I, J et K.

4) **a/** Justifier que $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b/ Montrer que $z_K - z_J = \cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c/ Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK})$.

5) Soit M un point de la droite (JK). On désigne par N le symétrique de M par rapport à (OA) et par P l'image de M par g.

a/ Soit r la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
Montrer que $r(M) = N$.

b/ En déduire que $f(N) = P$.

Exercice 2 (4 points)

1) a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1+20n\ (mod\ 100)$.

b/ En déduire les deux derniers chiffres de l'entier 2021^{2021}.

On note E l'ensemble des entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \equiv 1+n(x-1)\ (mod\ 100).$$

2) Vérifier que 21 est un élément de E.

3) Soit x un élément de E.

a/ Montrer que $(x-1)^2 \equiv 0\ (mod\ 100)$.

b/ En déduire que $x \equiv 1\ (mod\ 10)$.

4) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+10\,q)^n \equiv 1+10\,nq\ (mod\ 100)$.

5) Déterminer l'ensemble E.

Exercice 3 (6 points)

1) Soit φ la fonction définie sur $]\,0,+\infty\,[$ par $\varphi(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b/ Montrer que pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$.

c/ Dresser le tableau de variation de φ.

d/ Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

2) Soit φ_n la fonction définie sur $]\,-n,+\infty\,[$ par $\varphi_n(x)=\dfrac{1+\ln(x+n)}{x+n}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a/ En remarquant que $\varphi_n(x)=\varphi(x+n)$, montrer que $(\mathscr{C}_n)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par une translation que l'on précisera.

b/ Tracer $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit h_n la fonction définie sur $]\,0,+\infty\,[$ par $h_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi(x)$.

a/ Montrer que pour tout $x\geqslant 1$, $h_n(x)<0$.

b/ Montrer que pour tout x de $]\,0,1\,]$, $h'_n(x)<0$.

c/ En déduire que l'équation $h_n(x)=0$ admet dans l'intervalle $]\,0,+\infty\,[$ une unique solution α_n et vérifier que $\dfrac{1}{e}<\ \alpha_n<1$.

4) a/ Montrer que $n+1+\ \alpha_{n+1}>n+\alpha_n$.

b/ Comparer $\varphi(\alpha_{n+1})$ et $\varphi(\alpha_n)$.

c/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

d/ Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(\alpha_n)=0$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 (4.5 points)

1) Soit F et H les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}}dt \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{4}{e} - 2\,(\,1+\sqrt{x}\,)\,e^{-\sqrt{x}}.$$

a/ Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner $F'(x)$.

b/ Montrer que pour tout $x>0$, $F(x)=H(x)$.

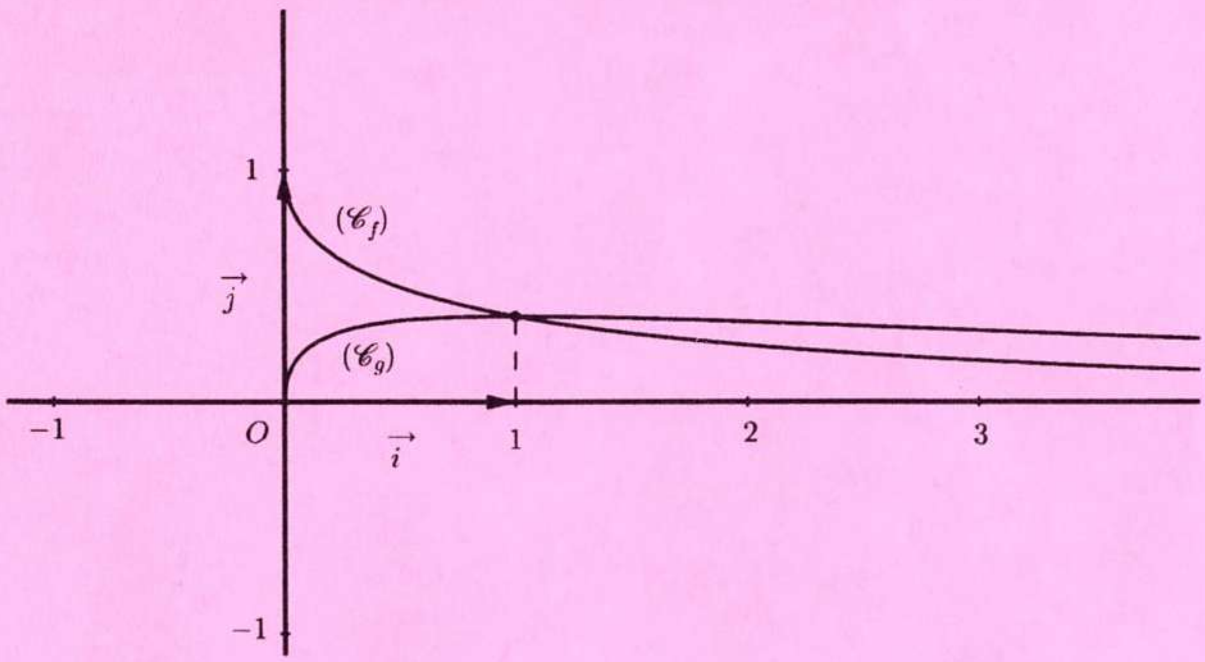
c/ En déduire que $F(0)=H(0)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt$.

a/ En remarquant que pour tout $t>0$, $\sqrt{t} = \dfrac{t}{\sqrt{t}}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $G(x) = \dfrac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$, pour tout $x>0$.

b/ Justifier que $G(0) = \dfrac{2}{e} + 2F(0)$.

3) Ci-dessous on a tracé , dans un repère orthonormé, les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ des fonctions f et g définies sur $[0,+\infty\,[$ par $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$.



Pour tout $\lambda \geqslant 1$, on désigne par $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$.

a/ Montrer que $\mathscr{A}_1 = \dfrac{6}{e} - 2$.

b/ Montrer que pour tout $\lambda>1$, $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$.

c/ Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}_\lambda$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

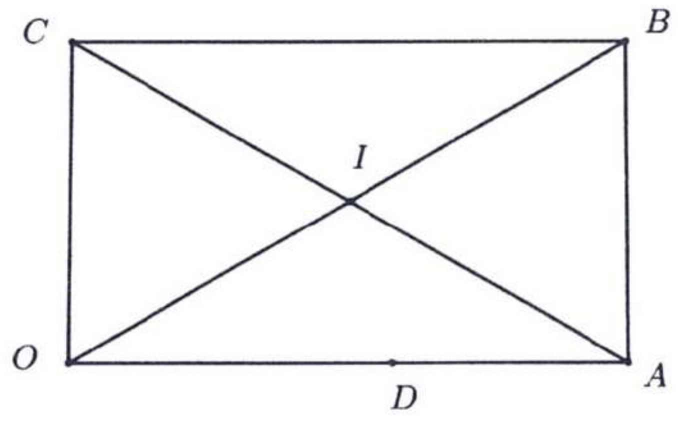
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2021)
Annexe à rendre avec la copie



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE	**EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022**	**Session principale**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription | | | | | | |

✎✎✎✎✎

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

✎Exercice 1 (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta} z + \left(e^{2i\theta} - 4\right) = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E). z_1 est tel que $\Re e\left(z_1\right) < 0$.

2) On considère les points A, B, I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, -1, $e^{i\theta}$, z_1 et z_2.

a) Montrer que I est le milieu du segment $\left[M_1 M_2\right]$.

b) Vérifier que $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$.

c) Dans la **figure 1** de l'annexe jointe, on a placé dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et I.

Construire les points M_1 et M_2.

3) a) Montrer que les droites $\left(AM_2\right)$ et $\left(BM_1\right)$ se coupent au point J d'affixe $\left(-e^{i\theta}\right)$.

b) Déterminer la valeur du réel θ telle que l'aire du triangle JM_1M_2 soit maximale.

✎Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la **figure 2** de l'annexe jointe,

- OAB est un triangle rectangle et isocèle en O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- CBA est un triangle isocèle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

1) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

a) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

b) On note $D = R(C)$. Justifier que les points O, D et B sont alignés et construire le point D.

c) Montrer que le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.

2) Soit f la similitude directe telle que $f(B) = A$ et $f(O) = C$.

a) Montrer que $f(A) = D$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de f est $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

c) Soit $E = f(D)$. Vérifier que le point E est un point de la droite (AC).

d) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ puis construire le point E.

e) Soit Ω le centre de f. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

3) On suppose $OA = OB = 1$ et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

a) On note z_C l'affixe du point C. Montrer que $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

b) Soit $z' = az + b$ l'expression complexe de f où a et b sont deux nombres complexes.

Montrer que $ai + b = 1$ et que $z_C = b$.

c) On note z_Ω l'affixe de Ω. Vérifier que $z_\Omega \neq 0$ et montrer que $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{1-i}{b}$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

4) Montrer que le point Ω est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OE) et le construire.

✎**Exercice 3** (5,5 points)

Partie A

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 19u + 11v = 1$.

1)a) Vérifier que $(-4, 7)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2)a) Montrer que $u = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1,2,...,10\}$ tel que $19u \equiv 1\,(\text{mod}\,11)$.

b) Montrer de même que $v = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1,2,...,18\}$ tel que $11v \equiv 1\,(\text{mod}\,19)$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{209}) : x^2 \equiv x\,(\text{mod}\,209)$.

Partie B

1) Vérifier que les entiers 0 et 1 sont des solutions de (E_{209}).

2) Décomposer 209 en produit de facteurs premiers.

3) Montrer que 133 et 77 sont des solutions de (E_{209}).

4) Soit x une solution de (E_{209}) .

a) Montrer que 19 divise $x(x-1)$ et 11 divise $x(x-1)$.

b) Vérifier que x et $(x-1)$ sont premiers entre eux.

5) Soit x une solution de (E_{209}) appartenant à $\{2,3....,208\}$.

a) Montrer que 19 divise x ou 11 divise x.

b) On suppose que $x=19k$ où k est un entier.

Montrer que 11 divise $(x-1)$ puis déduire que $x=133$.

c) On suppose que 11 divise x. Montrer que $x = 77$.

6) Déterminer les solutions de (E_{209}) appartenant à $\{0,1,...,208\}$.

Partie C

Soit y un entier et x son reste modulo 209.

1) Montrer que y est une solution de (E_{209}) si et seulement si x est une solution de (E_{209}).

2) Donner alors les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_{209}).

✎**Exercice 4** **(6,5 points)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

2)a) Montrer pour tout $x>1$, $f'(x)=\dfrac{-1}{x\ln^2 x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer (C).

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ possède sur $]1,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha<e$.

Partie B

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 1$, on pose $F(x) = \int_{\alpha}^{x} \left(f(t)\right)^n \, dt$ et $H(x) = \int_{\ln\alpha}^{\ln x} \frac{e^t}{t^n} \, dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]1, +\infty\right[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x > 1$, $H(x) = F(x)$.

2) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = \int_{\alpha}^{e} \left(f(t)\right)^n \, dt$.

a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $U_n = \int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n} \, dt$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\frac{\alpha^n - \alpha}{n-1} \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - 1\right)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha^n}{n} = +\infty$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\alpha^n}$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(k-2\right) U_k$.

a) En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n = e - \alpha^{n+1} + n\,U_{n+1}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - U_n$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\alpha^n}$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques

Session principale (2022)

Annexe à rendre avec la copie

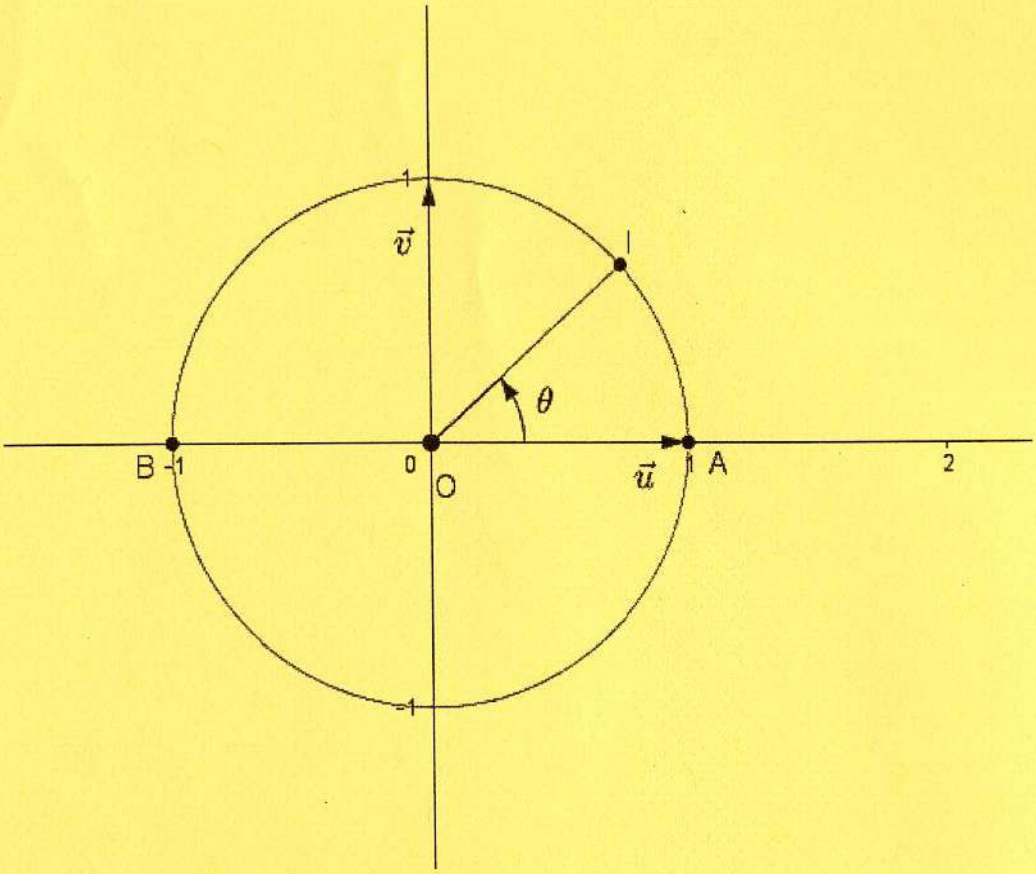


Figure 1

Ne rien écrire ici

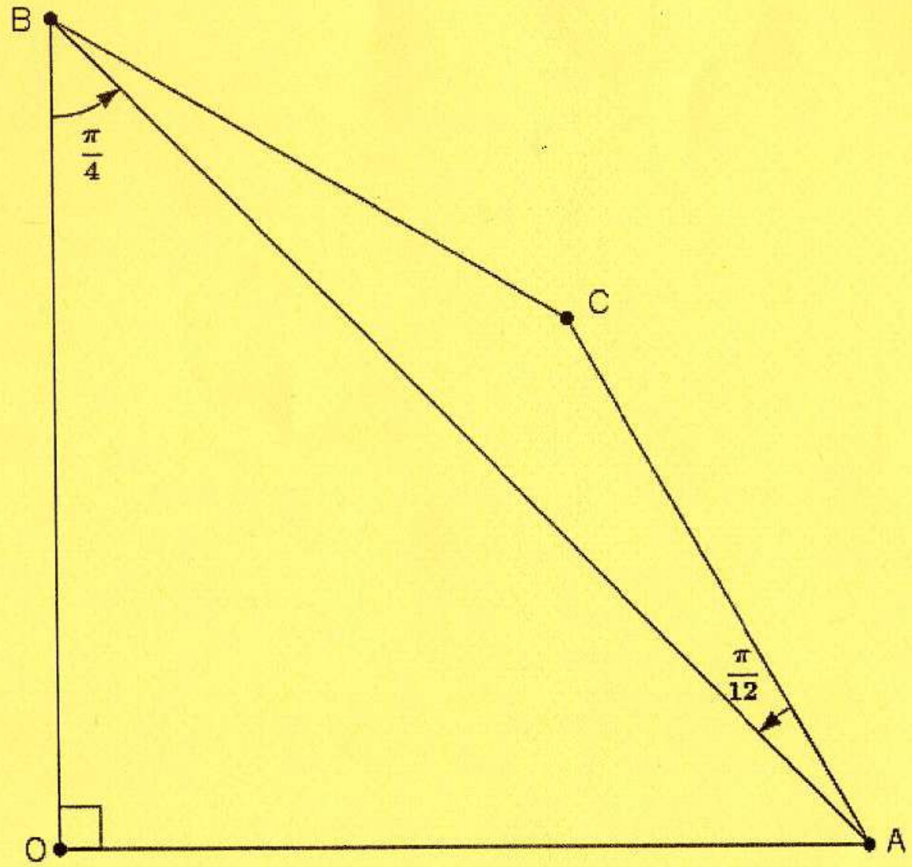


Figure 2

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2004

SESSION DE CONTROLE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 h COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \text{Log}\,(x^2 - 2x + 2)$.
Soit ($\mathscr{C}$)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Dresser le tableau de variation de la fonction f.
b – Montrer que la droite D d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}$).
c – Préciser la branche infinie de ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.
d – Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

2) Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{1+\operatorname{tg}x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

a – Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $F'(x) = 1$.

b – En déduire que $F(x) = x$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}$.

3) a – A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 2\,\text{Log}\,2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}\,dx.$$

b – Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

c – Calculer, alors, l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites D : x = 1 et D' : x = 2.

EXERCICE 2 (4 points)

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1 et 2 et trois boules rouges numérotées 1, 2, 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne.
a – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « Tirer deux boules de couleurs différentes ».
B « Tirer deux boules de même numéro ».

b – Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, calculer la probabilité pour qu'elles portent le même numéro.

2) Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de boules rouges tirées au cours de cette épreuve. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X).

PROBLEME (10 points)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

(pour la figure on prendra AB = BC = 6 (en cm)).

On désigne par I, J et O les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].

Soient I' le symétrique de O par rapport à (AB) et J' le symétrique de O par rapport à (BC).

Les demi-droites [OI) et [OJ) coupent le cercle de diamètre [AC] respectivement en A' et B'.

I – 1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\left(\frac{-\pi}{4}\right)$. Déterminer r(A) et r(B).

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a – Montrer que : $\frac{OI}{OA'} = \frac{OJ}{OB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b – En déduire h(A') et h(B').

3) On désigne par S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

a – Montrer que : S = hor .

b – En déduire les éléments caractéristiques de S.

4) Soit P un point du plan distinct de O et soit P' = r(P). On désigne par Q le projeté orthogonal de P sur [OP'].

a – Montrer que le triangle OPQ est rectangle et isocèle.

b – Montrer alors que S(P) = Q.

c – Montrer que OBI'A est un carré. En déduire S(I').

d – Déterminer S(J').

II - Soit M un point de la droite (AB) tel que M ≠ B. (Pour la figure on prendra : M ∈ [BA) et BM = 8 (en cm)) .

Soit Δ la médiatrice de [OM].

1) On pose S(M) = N. Montrer que { N } = Δ ∩ (IJ) .

2) Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer O et de directrice la droite (I'J').

a – Vérifier que A et C sont deux points de $\mathscr{P}$ et préciser les tangentes à $\mathscr{P}$ en ces deux points.

b – Montrer que lorsque le point M varie sur (AB) – {B}, la droite (MN) reste tangente à la parabole $\mathscr{P}$.

c – Construire le point de contact de (MN) et de ($\mathscr{P}$).

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2005

SESSION DE CONTROLE

SECTION	:	**MATHEMATIQUES**
EPREUVE	:	**MATHEMATIQUES**
DUREE	:	**4 heures** — **COEF. : 4**

EXERCICE 1 : (5 points)

Une urne contient trois boules rouges numérotées 1,2,2 et trois boules blanches numérotées 1,1,2.

Une épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

1) a – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « avoir trois boules de même couleur »
   B : « la somme des nombres inscrits sur les boules tirées est égale à cinq »
   b – Soit C l'événement : « avoir au moins une boule rouge qui porte le numéro 2 ».
   Montrer que $p(C) = \frac{4}{5}$
2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges portant le numéro 2 obtenues.
   a – Déterminer la loi de probabilité de X.
   b – Calculer E(X).
3) On répète l'épreuve précédente n fois ($n \geq 1$) de suite, en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne.
   a – Calculer la probabilité p_n, pour que l'événement C soit réalisé au moins une fois.
   b – Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0{,}99$.

EXERCICE 2 : (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 e^{1-x^2}$
   On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a – Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   b – Dresser le tableau de variation de f.
   c – Construire la courbe $\mathscr{C}$.
2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par
   $$U_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx$$
   a – Calculer U_1.
   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{e}{n+1}$.
   En déduire que (U_n) est convergente et trouver sa limite.
4) a – Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) U_n - \frac{1}{2}$.
   b – En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.

PROBLEME : (10 points)

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A.

On pose $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2\alpha\ [\ 2\pi\ ]$ où α est un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par O le milieu de [BC] et par D le symétrique de A par rapport à O.
Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).

A – 1) Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J.

a – Montrer que f a pour angle α et pour rapport $\cos\alpha$.

b – Prouver que le centre de f est le point A.

2) On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I.

a – Montrer que f(B) = O et que f(C) = E.

b – En déduire que $\frac{OE}{BC} = \cos\alpha$.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que :

σ (B) = O et σ (C) = E.

a – Déterminer le rapport de σ.

b – Montrer que σ(O) = I.

4) a – On désigne par $S_{(OE)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OE).

Montrer que $\sigma = S_{(OE)} \circ f$.

b – Montrer que σ(D) = A et σ (A) = J.

5) Soit Ω le centre de σ .

a – Montrer que $(\sigma o \sigma)$ (D) = J et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ) .

b – Montrer que Ω appartient à la droite (BI).

c – Construire le point Ω .

d – Montrer que $\overrightarrow{\Omega I} = (\cos^2\alpha)\,\overrightarrow{\Omega B}$. (1)

B – Dans cette partie on suppose que OC = 1 et on munit le plan du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$.

1) a – Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ et que OI = $\cos\alpha$.

b – En déduire que $\overrightarrow{OI} = (\cos^2\alpha)\,\vec{u} + (\cos\alpha\ \sin\alpha)\,\vec{v}$.

c – En utilisant la relation (1), montrer que les coordonnées x et y du point Ω sont telles que $x = 2\,\mathrm{cotg}^2\,\alpha$ et $y = \mathrm{cotg}\,\alpha$.

2) Dans cette question on suppose que les points B et C sont fixes.

Montrer que lorsque α varie dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ le point Ω varie sur une parabole $\mathscr{P}$ dont on précisera le foyer F et la directrice Δ.

3) Le cercle de diamètre [BF] coupe la droite (OA) en M et N.

a – Montrer que les droites (BM) et (BN) sont les tangentes à $\mathscr{P}$ issues de B.

b – Construire les points de contact de ces deux tangentes avec $\mathscr{P}$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTERE DE L'EDUCATION** **ET DE LA FORMATION** ❖❖❖ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** ❖❖❖ **SESSION DE JUIN 2006**	**SESSION DE CONTROLE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (5 points)

On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2.

U_1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, U_2 contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs.

1) Une première épreuve consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

   A : « Obtenir deux jetons noirs »

   B : « Obtenir deux jetons de même couleur »

   C : « Obtenir un jeton blanc et un seul ».

2) Une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer un jeton de cette urne.

   a – Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à $\frac{1}{2}$.

   b – Calculer la probabilité de tirer un jeton de l'urne U_1, sachant qu'il est blanc.

3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ($n \geq 2$), en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

   Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

   a – Donner la loi de probabilité de X.

   b – Calculer son espérance et sa variance.

   c – Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1 + x)\, e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) a – Dresser le tableau de variation de f.

   b – Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (on étudiera les branches infinies).

2) Soit $v_n = \int_0^n f(x)\, dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

   a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = 2 - (2 + n)e^{-n}$

   b – Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_k = \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

4) a – Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $u_k = (e-1)\,k\,e^{-k} + (e-2)e^{-k}$

b – En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n = (e-1)\sum_{k=1}^{n} k\,e^{-k} + \frac{e-2}{e-1}\,(1 - e^{-n}).$$

5) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,e^{-k}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$.

PROBLEME (10 points)

Soit AFED un carré de côté 4 cm tel que $(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

A – 1) a – Soit r la rotation définie par r(F) = E et r(E) = D. Préciser l'angle et le centre de r.

b – Soit $f = r \circ S_{(OO_1)}$; où $S_{(OO_1)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OO_1).

Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2) Soit $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et r^{-1} désigne la rotation réciproque de r.

a – Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle .

b – Déterminer r' (O). En déduire que F est le centre de r' .

3) On désigne par g l'antidéplacement défini par g(D) = F et g(O) = O_1.

a – Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b – Soit M un point du plan.

Montrer que [g(M) = r' (M)] si et seulement si [f(M) = M].

c – En déduire l'ensemble des points M tels que g(M) = r' (M).

B – Soit s la similitude directe telle que s(A) = F et s(B) = E

1) a – Déterminer l'angle et le rapport de s.

b – Montrer que $s = r \circ h_{(A,\frac{1}{2})}$ où r est la rotation définie dans A-1)a et $h_{(A,\frac{1}{2})}$ est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) Soit Ω le centre de s.

a – Montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètres respectifs [AF] et [BE].

Construire Ω .

b – Montrer que s(E) = O. En déduire que Ω , O et B sont alignés.

3) On pose $B_o = B$ et pour tout entier naturel **n** : $B_{n+1} = s(B_n)$.

a – Préciser B_1 et B_2.

b – Montrer que pour tout entier naturel non nul, le triangle $B_{n-1}\,B_n\,B_{n+1}$ est rectangle et les points B_{n-1}, Ω et B_{n+1} sont alignés.

c – Donner un procédé de construction de B_{n+1} à partir de B_{n-1} et B_n.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = B_n\,B_{n+1} = \left\|\overrightarrow{B_n\,B_{n+1}}\right\|$

a – Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le 1[er] terme et la raison.

b – Soit $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$. Calculer σ_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n$.

C – On désigne par : I le milieu de [AF], J le milieu de [OI] et L le symétrique de J par rapport à I

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse de sommets A, F, J et L.

1) Construire les foyers G_1 et G_2 de $\mathscr{E}$ (G_1 désigne le foyer qui appartient au segment [IF]).

2) Soit $G_1' = s(G_1)$ où s est la similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$

a – Montrer que la droite $(\Omega G_1')$ est tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$.

b – Construire le point de contact M de $\mathscr{E}$ et de $(\Omega G_1')$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION ●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** ●●● ***SESSION DE JUIN 2007***	**SESSION DE CONTROLE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[\,1, +\infty\,[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
   b – Dresser le tableau de variation de f.
   c – Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) Soit F la fonction définie sur $]\,0,1]$ par $F(x) = \int_1^{1+(\text{Log}\, x)^2} f(t)dt$.
   a – Montrer que F est dérivable sur $]\,0,1]$ et que $F'(x) = 2\,\text{Log}\, x$
   b – Calculer F(x).

3) Pour tout $\alpha \geqslant 1$, on désigne par $S(\alpha)$ l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.
   a – Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$.
   b – Calculer $S(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$.

EXERCICE 2 : (4 points)

Une urne contient quatre dés indiscernables au toucher.
Trois dés sont verts et leurs faces sont numérotées 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.
et un dé est rouge et ses faces sont numérotées 2 , 2 , 4 , 4 , 6 , 6.

1) On tire au hasard un dé.
   Calculer les probabilités des événements suivants :
   A « le dé tiré est rouge »
   B « le dé tiré est vert ».

2) Une épreuve consiste à tirer au hasard un dé puis le lancer trois fois de suite.
   On désigne par C l'événement suivant :
   C « obtenir 3 fois de suite un numéro pair »
   a – Montrer que $p\left(C/A\right) = 1$ et $p\left(C/B\right) = \frac{1}{8}$
   b – En déduire p(C) .

3) Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'on a obtenu une face dont le numéro est pair.
   a – Déterminer la loi de probabilité de X.
   b – Calculer l'espérance et la variance de X.

PROBLEME : (10 points)

Soient A et I deux points du plan et soit R la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On pose $O = R(A)$ et $B = R(O)$.

1) a – Construire les points O et B.
   b – Montrer que le quadrilatère IBOA est un losange.

2) Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI.
   Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R.
   a – Montrer que lorsque le point M décrit le cercle (Γ), son image M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera et qu'on construira.
   b – Soit Ω le deuxième point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ').
   Montrer que si M est différent de I, les points M, Ω et M' sont alignés.

3) Soit f l'antidéplacement défini par $f(A) = O$ et $f(O) = B$.
   a – Montrer que f est une symétrie glissante. Préciser son axe et son vecteur.
   b – Vérifier que $f = s_{(OB)} o R$ où $s_{(OB)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe la droite (OB).
   c – Déterminer l'ensemble des points N du plan tels que $R(N) = f(N)$.

4) Soit C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B.
   On désigne par S la similitude directe définie par $S(A) = C$ et $S(O) = D$ et on pose $h = SoR^{-1}$.
   a – Déterminer h(O) et h(B).
   b – En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   c – Déterminer alors les éléments caractéristiques de la similitude S.

5) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C) = O$ et $g(D) = B$.
   a – Déterminer le rapport de g. En déduire que g admet un seul point invariant qu'on notera J.
   b – On désigne par (d) l'axe de la similitude g et par E le point d'intersection des droites (d) et (OC).
   Soit E' l'image de E par g. (Il est conseillé de faire une figure d'étude à part pour cette question).
   Montrer que $\overrightarrow{JE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JE}$.
   c - Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{JE}}\right) [2\pi]$.
   En déduire que les droites (d) et (CD) sont parallèles.
   d – soit C' le symétrique du point C par rapport à la droite (d). Montrer que E est le centre de gravité du triangle JCC' et en déduire que $\overrightarrow{EC} = -2\,\overrightarrow{EO}$.
   e – Construire alors le point E, l'axe (d) et le centre J de la similitude g.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2008

NOUVEAU REGIME
SESSION DE CONTROLE

SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$.

Alors I est égale à

a) 3 . b) $\frac{1}{4}$. c) $-\frac{1}{4}$.

2) Soit $\ell = \lim\limits_{x \to 1^-} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \right]$, alors

a) $\ell = 1$. b) $\ell = 0$. c) $\ell = +\infty$.

3) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.

Alors

a) $n \equiv 0 \pmod 3$. b) $n \equiv 0 \pmod 5$. c) $n \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0 .$$

1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.
   Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.

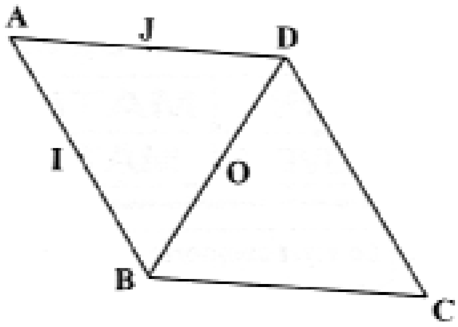
3) On considère les points A_n définis par :

A_0 le point d'affixe (-1+i) et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.

   a) Placer les points A_0, A_1 , A_2 , A_3 et A_4.
   b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 3 : (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre , ABCD est un losange de centre O , I est le milieu du segment [AB] , J est le milieu du segment [AD] et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.



1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

b) caractériser f .

c) Déterminer l'image du triangle ABD par f .

2) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $s(A) = C$.

a) Déterminer l'image du segment [BD] par s .

b) En déduire que s est la symétrie orthogonale d'axe (BD) .

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$.

a) Montrer que $g(D) = B$.

b) Caractériser alors g .

Exercice 4 : (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur [-2, 2] par $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si} \quad x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$

et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en (-2).

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2).

c) Donner le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur [-2, 2] par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$

et ($\mathscr{C}'$) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

b) Dans l'annexe ci-jointe (page 4), on a tracé la courbe ($\mathscr{C}'$) de g. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) dans le même repère.

3) Soit α un réel non nul appartenant à [-2, 2].

On désigne par $\mathscr{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que $\mathscr{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}\,dx$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).

b) Calculer $\mathscr{A}_\alpha$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

Exercice 5 : (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de f_n.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

   On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (u_n).

3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

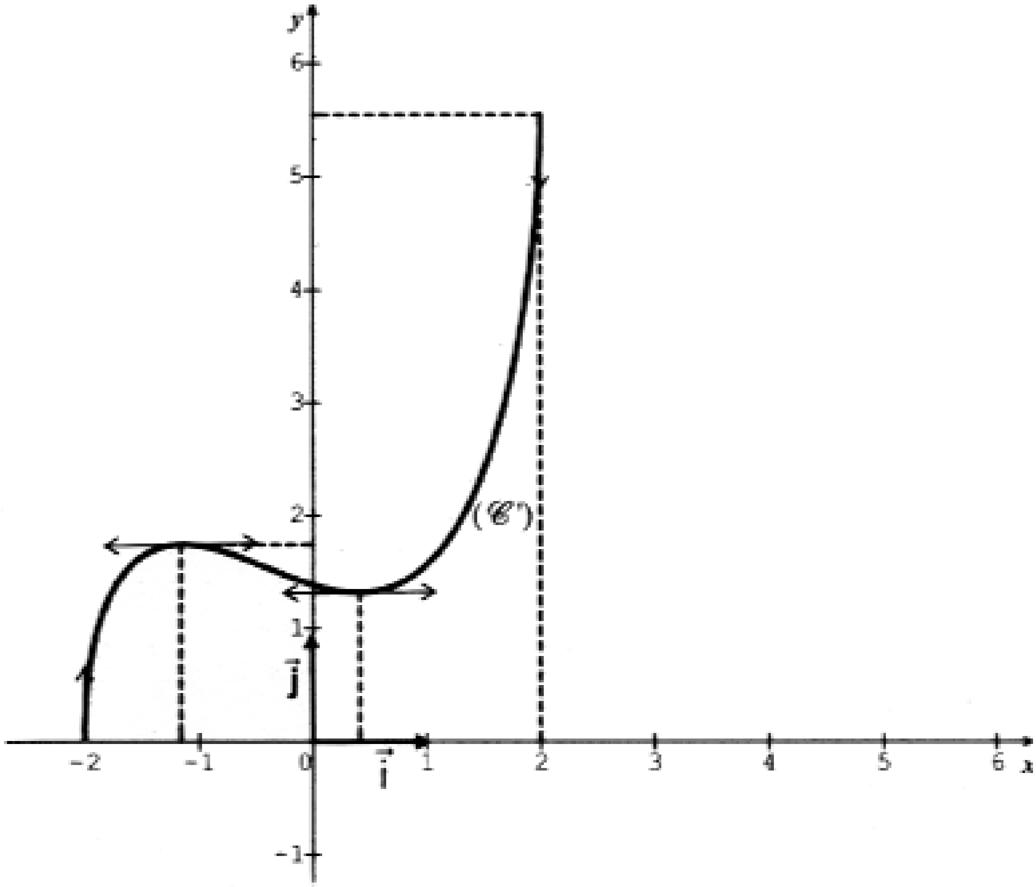
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n+1}$.

   b) Calculer la limite de la suite u_n.

Exercice 4



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION DE CONTROLE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit z un nombre complexe de module 2.

Alors le conjugué $\bar{z}$ de z est égal à

a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$

b) $\frac{2}{z}$

c) $\frac{4}{z}$

2) Dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i . L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est

a) la droite (AB) privée de A

b) le segment [AB] privé de A

c) le cercle de diamètre [AB] privé de A

3) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $(-\ln 2)$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est

a) une suite arithmétique de raison (– 2)

b) une suite géométrique de raison (– 2)

c) une suite géométrique de raison $(\frac{1}{2})$

4) La limite de $x\ln(1+\frac{2}{x})$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

a) 0

b) 1

c) 2

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	3	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.
(On précisera la demi tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0{,}4$).

3) On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_\alpha^1 [f(x)]^n \, dx$.

a) Calculer u_1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq v_n$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 9u_n + 5v_n$

a) Montrer que (w_n) est une suite constante.

b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 4/4), ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) Justifier que S(A) = B

b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que S(E) = O.

2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.

Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

b) Justifier que le point C appartient à (Γ).

3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) En déduire que S(M) = N .

4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice 5 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$.

1) a) Vérifier que (0, – 2) est une solution de (E) .

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0 .

a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.

b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y) .

Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$.

c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Section : …………… N° d`inscription : ………… Série : …………

Nom et prénom : ……………………………………………………

Date et lieu de naissance : ……………………………………………

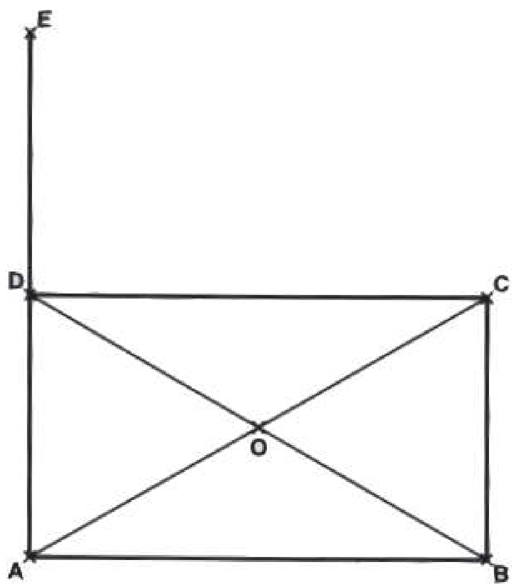
Signature des Surveillants

………………

………………

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

SESSION DE CONTRÔLE

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES   DUREE : 4h   COEFFICIENT : 4

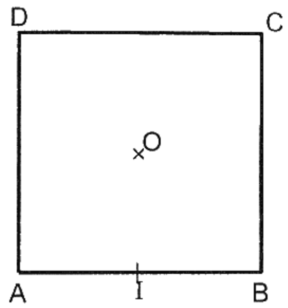
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1(4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

ABCD est un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et I le milieu de [AB].

Soit $S_{(BC)}$, $S_{(BD)}$ et $S_{(OI)}$ les symétries d'axes respectifs (BC), (BD) et (OI) et $t_{\overrightarrow{BD}}$; $t_{\overrightarrow{CD}}$ et $t_{\overrightarrow{BC}}$ les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$.



1) L'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est
   a) une rotation
   b) une translation
   c) une symétrie glissante.

2) $t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$ est égale à
   a) $t_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{(OI)}$
   b) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(OI)}$
   c) $S_{(BC)}$.

3) Soit r_1 la rotation de centre O d'angle $(-\frac{\pi}{2})$ et r_2 la rotation de centre C d'angle $(\frac{\pi}{2})$.

   $r_1 \circ r_2$ est
   a) la symétrie centrale de centre A
   b) la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$
   c) la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

4) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme D en A. Alors
   a) S(A) = O
   b) S(I) = O
   c) S(C) = O.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = \dfrac{e^2}{8}(x-2)$.

3) On se propose d'étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente Δ.

   Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$. On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0		2		3		$+\infty$
$g(x)$	||	$+\infty$ ↘	$\dfrac{e^2}{8}$	↘	$\dfrac{e^3}{27}$	↗	$+\infty$

   a) Montrer que l'équation $g(x) = \dfrac{e^2}{8}$ admet dans $]3, +\infty[$ une solution unique α telle que $4{,}2 < \alpha < 4{,}3$.

   b) Déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

4) Justifier l'existence sur $]0,+\infty[$ d'une primitive F de f telle que $F(1) = e$.

5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ de la fonction F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que $A(1, e)$; $B(0, e)$; $C(0, F(2))$ et $D(1, F(2))$.

   a) Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.

   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans l'annexe ci-jointe.

6) Soit $t \in [1, 2[$. On désigne par S(t) la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = t$ et $x = 2$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de S(t).

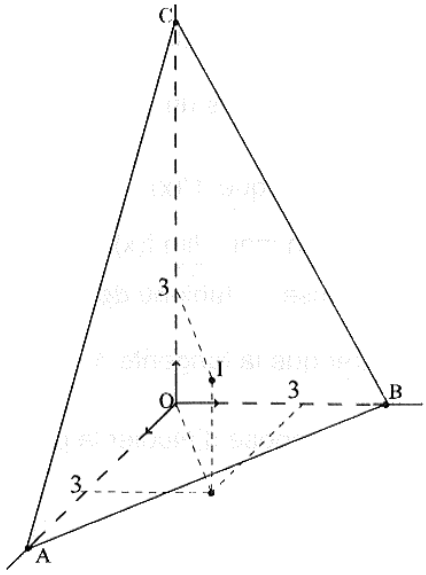
   a) Exprimer $\mathscr{A}(t)$ en fonction de F(t).

   b) Hachurer S(1) et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.

   c) Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [1, 2[$ tel que $\mathscr{A}(t_0) = \dfrac{1}{2}\mathscr{A}(1)$.

   d) Construire le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse t_0.

Exercice 3 (5 points)



Soit $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OA} = 5\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = 10\vec{w}$ et I est le point de coordonnées (3,3,3).

1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation $2x + 2y + z - 10 = 0$.

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.
   a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?
   b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).

3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.
   On désigne par S' , la sphère image de S par h.
   a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).
   b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.

Exercice 4 (5 points)

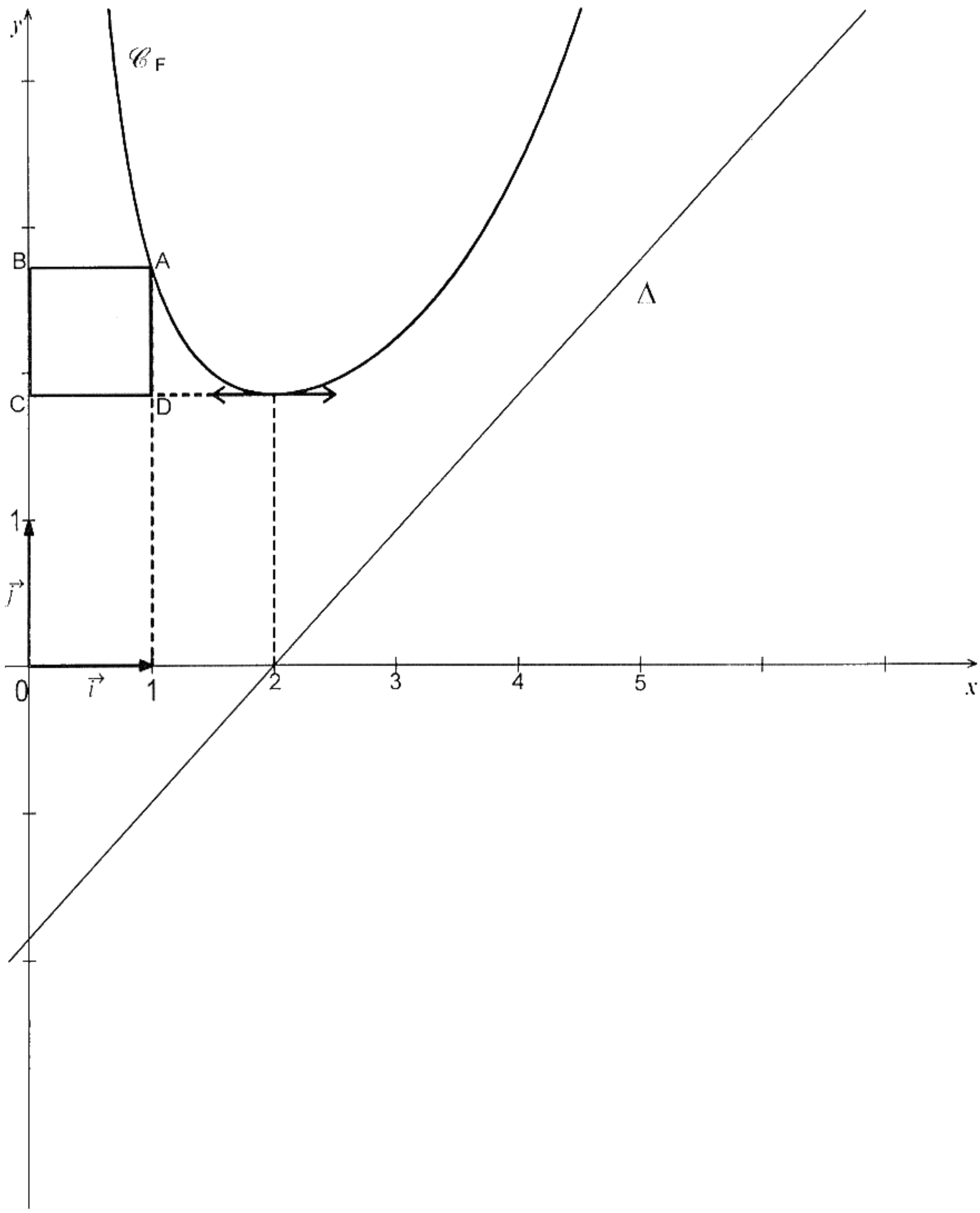
On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.
   b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

ANNEXE A RENDRE AVEC LA FEUILLE DE COPIE



REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 heures** **COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
3) $f(2) \leq \ln 2$.

EXERCICE 2 (6 points)

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$f_p(x) = p(\ln x) - x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A-1) Etudier les variations de la fonction f_3: $x \mapsto 3\ln x - x$.

2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p \geq 3$.

x	0		p		$+\infty$
$f'_p(x)$	||	$+$	0	$-$	
f_p	|| $-\infty$	$\nearrow$	$p(\ln p)-p$	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p \geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

1) Déterminer la limite de la suite (v_p).
2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4, C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6.
   a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3, u_4, u_5 et u_6 de la suite (u_p).
   b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.
3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.
   b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.
   c) Montrer que $\frac{\ln u_p}{u_p} = \frac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p).

EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1,3,2), B(1,-1,-2) et C(2,4,1) .

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.
2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.
   a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.
   b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.
   c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ).
3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.
   a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.
   b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ').
   c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que

$OA' = \frac{1}{2}OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.

2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.

   a) Déterminer la nature du triangle $OA'B'$.

   b) Construire le point B'.

   c) Montrer que $f(H) = H'$.

3) Soit I le milieu du segment $[A'B]$ et J le milieu du segment $[AA']$.

   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

   b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.

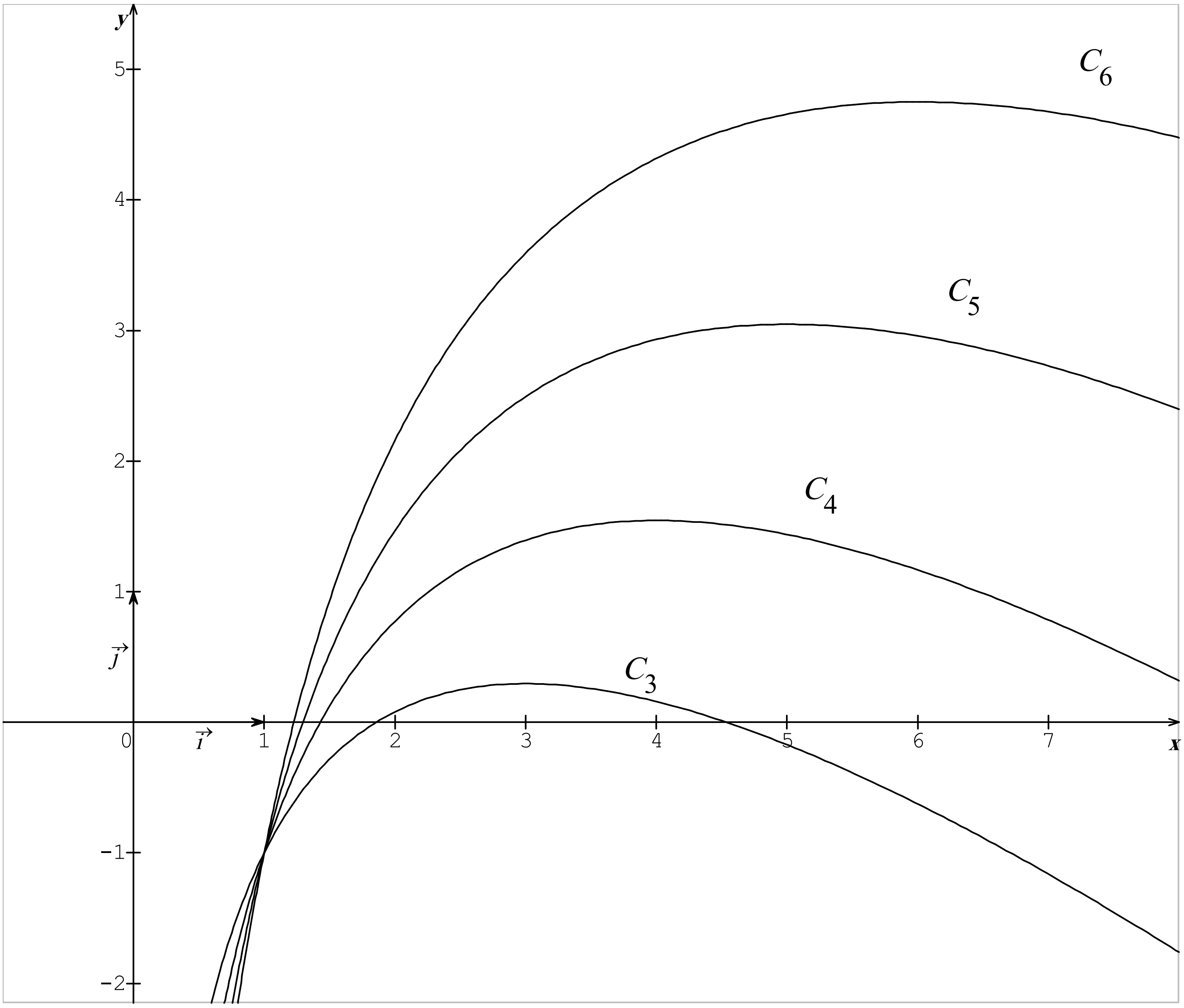
   c) Soit K le milieu du segment $[AB']$. Montrer que $JK = OH'$ et que $(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   d) Déterminer alors R(K).

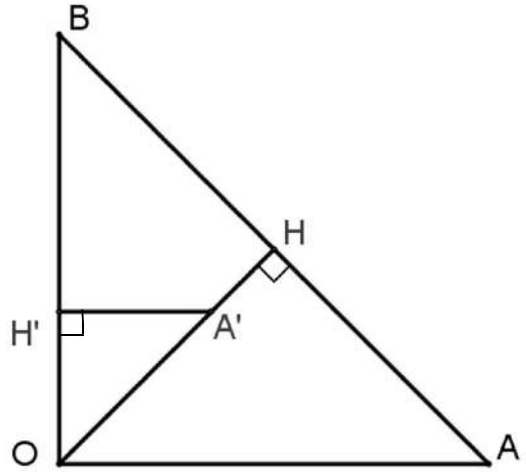
   e) En déduire que $IK = HH'$ et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.

4) Montrer que le quadrilatère $IHKH'$ est un carré.

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 figure 2

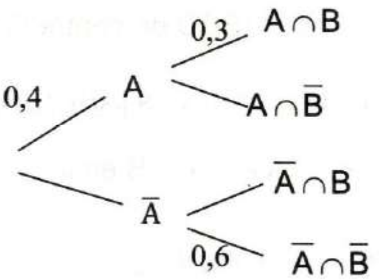


REPUBLIQUE TUNISIENNE ◇◇◇ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : mathématiques		Session de contrôle	

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (3 points)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

1) $p(\overline{A}) = 0,6$.
2) La probabilité de $\overline{B}$ sachant A est égale à 0,7.
3) $p(B)=0,7$.
4) $p(A \cup B) = 0,64$.

Exercice 2 (4 points)

Soit a un réel strictement positif.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+ i)\, a\, z + i\, a^2 = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

   a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

   b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

   a) Montrer que l'affixe de P est égale à $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\, a$.

   b) Calculer l'affixe du point Q.

   c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 3 (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple $(9,-3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

Exercice 4 (5 points)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire S(C).

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

b) En déduire que S(D) = K.

c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C ,1) et (K , 4).

d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que $S\circ S(A) = E$.

e) Construire Ω.

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Exercice 5 (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x\,(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{1}{2\,x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3{,}6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}\ln x$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **4 h** Coefficient : **4**
Section : **MATHEMATIQUES**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $2x + 5y = 6$.

1) a) Vérifier que $(3, 0)$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit (x , y) une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$?

b) Déterminer les couples (x , y), solutions de (E), tels que $x \wedge y = 3$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et (C) est le cercle de centre O passant par les points $A(2, 0)$ et $A'(-2, 0)$.

1) Soit $P(x, y)$ un point du plan n'appartenant pas à $(O, \vec{i})$, H son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{i})$ et $M(X,Y)$ le milieu du segment [PH].

a) Exprimer X et Y à l'aide de x et y.

b) Montrer que lorsque P varie sur le cercle (C), M varie sur l'ellipse (E) d'équation $\dfrac{X^2}{4} + Y^2 = 1$.

c) Tracer l'ellipse (E) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit $P_0(1, \sqrt{3})$ et $M_0(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

La tangente (T) au cercle (C) en P_0 coupe l'axe des abscisses au point I.

a) Montrer que I a pour coordonnées (4, 0).

b) Montrer que la tangente à l'ellipse (E) en M_0 passe par I.

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x-\ln(1+x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ $\quad f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x>0$, $f(x)=x-2\ln x-\ln(1+\dfrac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=\displaystyle\int_0^{\tan x}\dfrac{dt}{1+t^2}$ dt.

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $G(x)=x$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx=\ln 2-2+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, ABCD est un rectangle tel que AB = 1 et $AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

et FCDE et BFGH sont deux carrés.

1) On pose $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Montrer que $q^2 = 1 - q$.

b) Vérifier que $FG = q$ et que $EG = q^2$.

2) Soit S_1 la similitude directe de centre F, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport q.

a) Montrer que $S_1(C) = G$.

b) Déterminer l'image du carré FCDE par S_1.

3) Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E.

Montrer que S_2 est de rapport q et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4) On pose $h = S_2 \circ S_1$.

a) Montrer que h(D) = E.

b) Montrer que h est une homothétie de rapport q^2.

c) Montrer que $\overline{AE} = q^2\,\overline{AD}$ et en déduire le centre de h.

d) Montrer que les points A, G et C sont alignés.

e) Soit I = h(E) et J = h(F).

Construire les points J et I et déterminer alors l'image du carré BFGH par S_2.

5) On considère la suite (a_n) définie sur IN par $a_n = q^{2n}$.

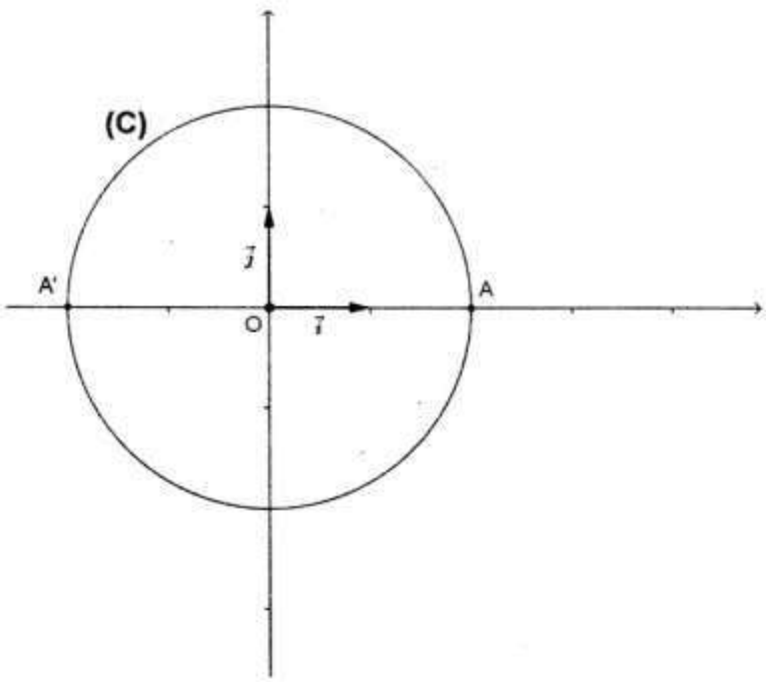
a) Vérifier que a_0, a_1 et a_2 sont les aires respectives des carrés FCDE, BFGH et GEIJ.

b) On pose pour tout entier naturel n, $\mathcal{A}_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

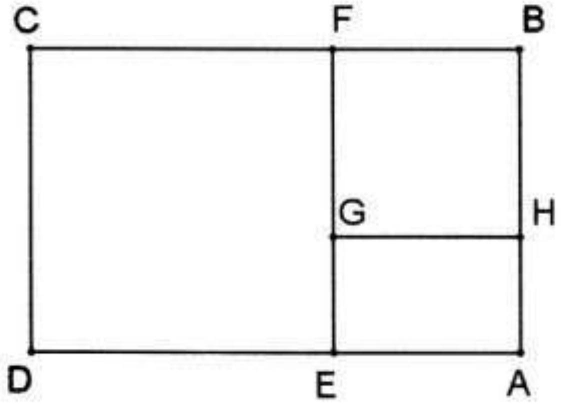
Exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n et vérifier que la limite de $\mathcal{A}_n$ est égale à l'aire du rectangle ABCD.

ANNEXE

(Figure1)



(Figure 2)



Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**) , IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI] , $OA = 2OI$ et $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer h(O) et s(I).

2) Pour tout point M du plan, on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit $O' = f(O)$. Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

b) Soit $I' = f(I)$. Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.

a) Exprimer en fonction de z l'affixe z_P du point P.

b) Exprimer en fonction de z l'affixe z_Q du point Q.

c) Soit z' l'affixe du point $M' = f(M)$. Montrer que $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$.

d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

Exercice 2 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Déterminer les cordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2x + 4$.

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ l'ellipse (E) et la parabole (P) .

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 = -2|x| + 4$.

a) Vérifier que O, $\vec{j}$)est un axe de symétrie de (Γ).

b) Tracer (Γ) dans le repère $\left(O,\vec{i}, \vec{j}\right)$.

3) a) Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Vérifier que pour tout réel t de [0,2], le point $M\left(t, \sqrt{4-t^2}\right)$ appartient à $\mathcal{C}$.

b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$. Montrer que $I_1 = \pi$.

4) Calculer $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4}\ dt$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse (E).

Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de I_1 et I_2 puis calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 3 (4points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $1111\,x - 10^4\,y = 1$.

a) Vérifier que (- 9, -1) est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Soit n un entier .

a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n=1111p$ et $n=1+q10^4$

alors (p, q) est une solution de (E).

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$.

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 4 (6points)

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = e^{f(x)} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0.

b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de g.

3) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 3**), on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction f et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point A de coordonnées $(e, g(e))$.

b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g de g au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = g(n) \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$

a) Donner la limite de (u_n).

b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.

Section : ………………..…….. N° d'inscription : ………………… Série : …..……..
Nom et prénom : ……………………………………………………………………………………
Date et lieu de naissance : …………………………………………………………………………

Signatures des surveillants
………………
………………

Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

Annexe (à rendre avec la copie)

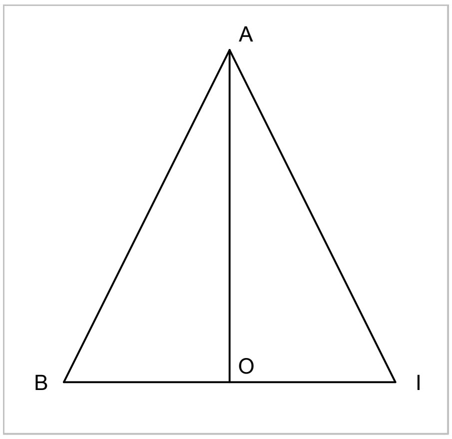


Figure 1

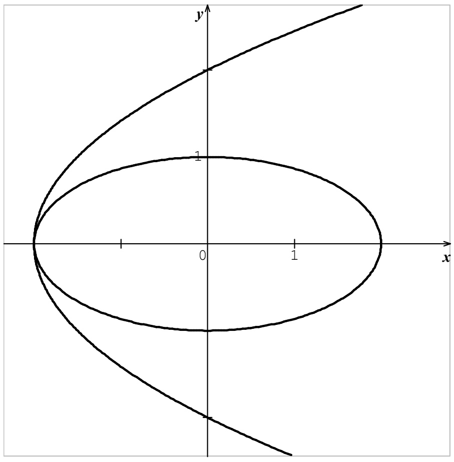


Figure 2

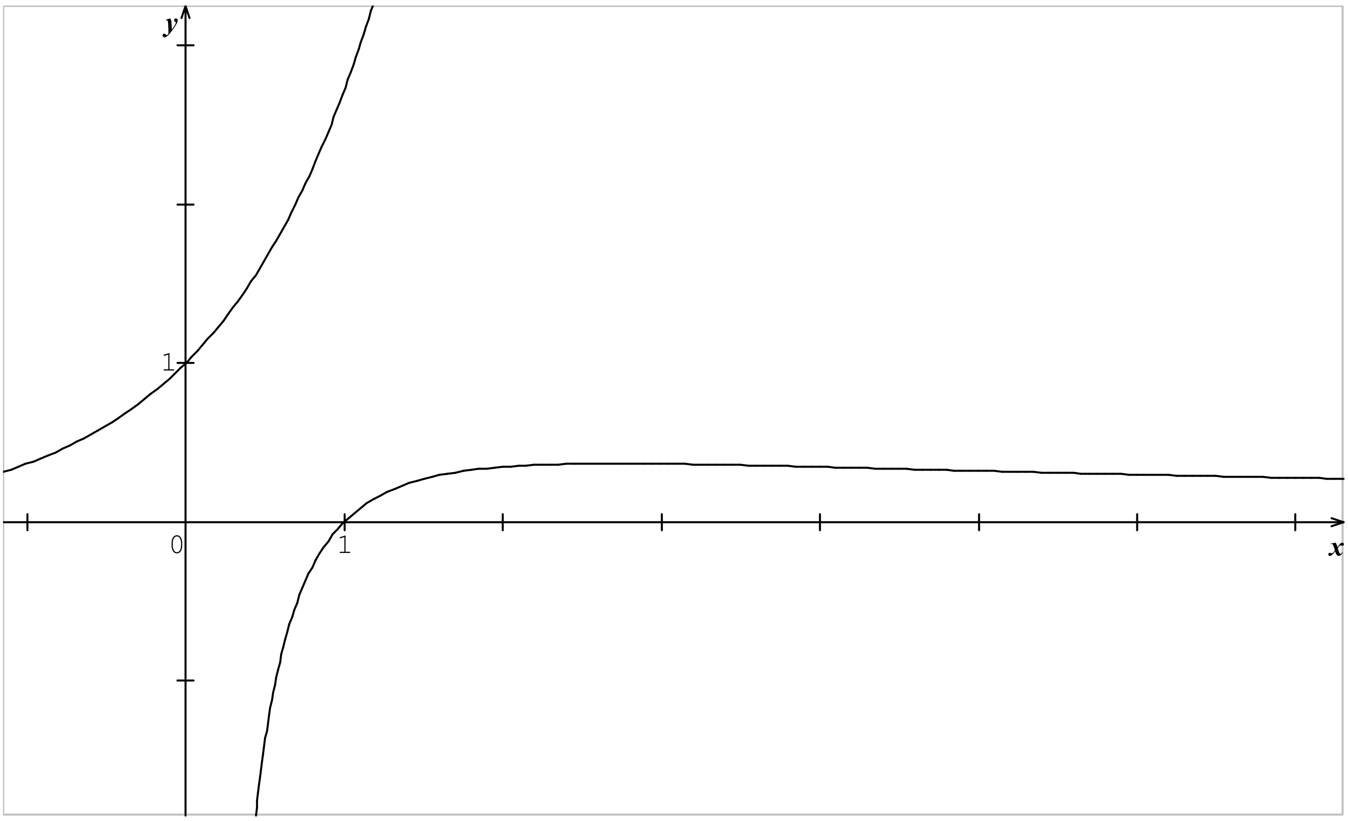
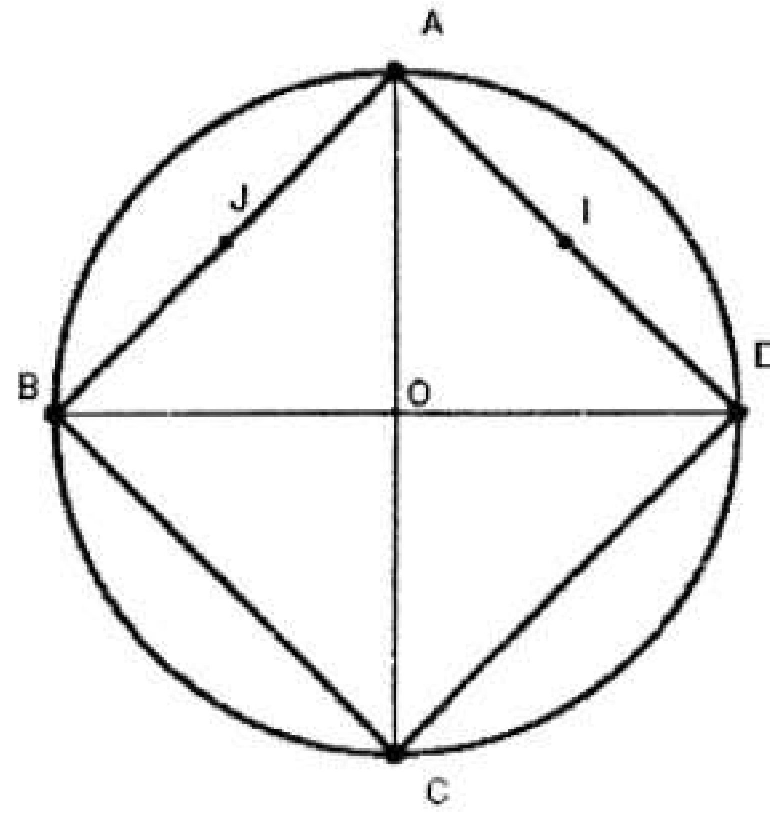


Figure 3

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve **: MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section **: Mathématiques**	**Session de contrôle**

Exercice 1 (4 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$ et I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AB]$.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A sur B et I sur O.

   a) Justifier que f est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

   b) Déterminer le centre de f.

2) La droite (CJ) recoupe le cercle $(\mathscr{C})$ en E et soit H le projeté orthogonal du point B sur (AE).

   a) Justifier que E est le milieu du segment $[AH]$ et en déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=-EA^2$.

   b) Montrer d'autre part que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$.

3) On considère la similitude indirecte g de centre E qui envoie B sur A.

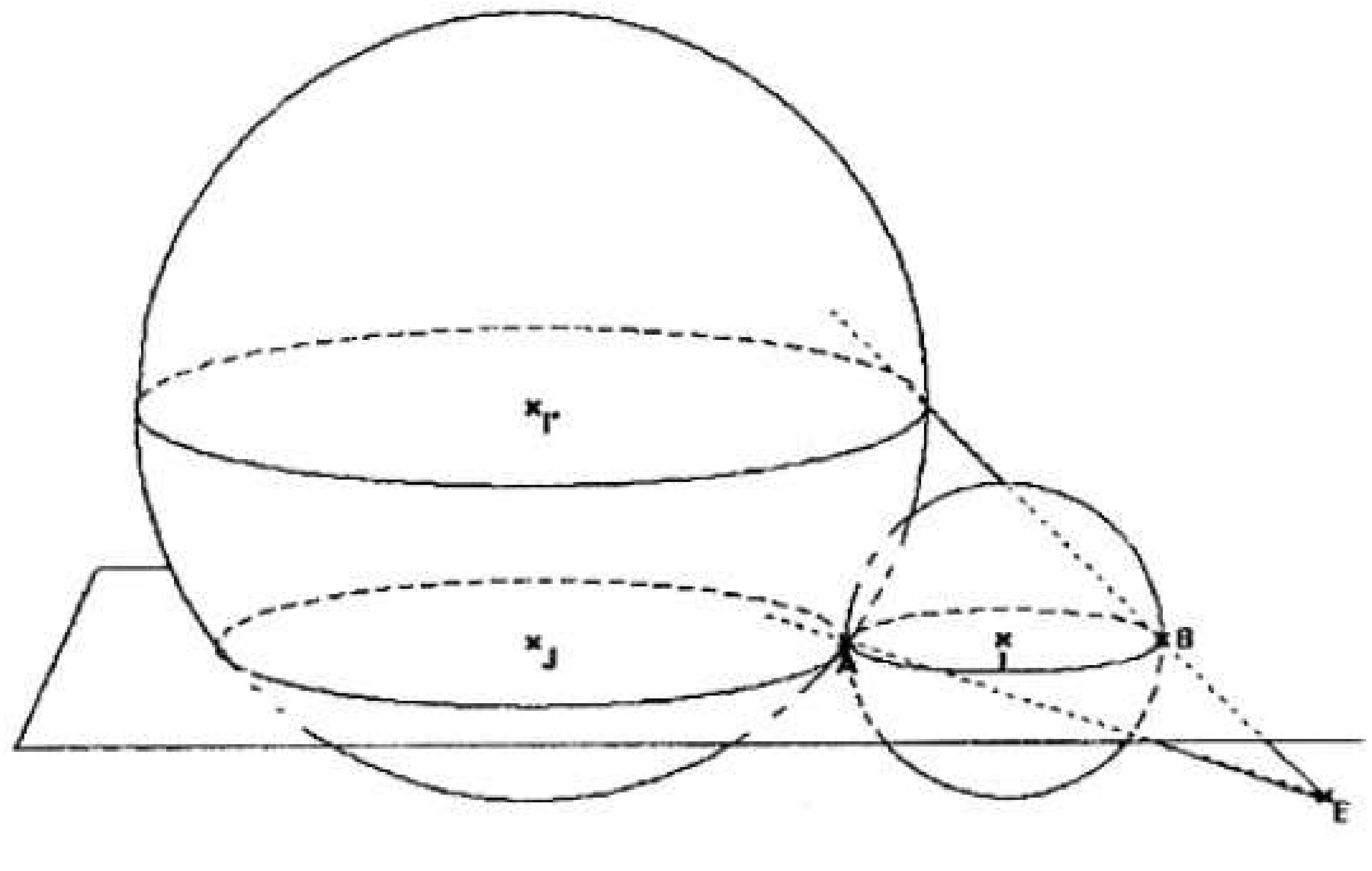
   a) Déterminer le rapport de g.

   b) Soit $O'=g(O)$. Justifier que le triangle $O'EA$ est isocèle.

   c) Montrer que $O'A = AI$.

4) Soit $S=g\circ f$. Montrer que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Exercice 2 (5 points)



Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.
On considère les points $A(-2,3,2)$ et $B(2,3,2)$ et l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0$.

1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.

   b) Montrer que $[AB]$ est un diamètre de S.

2) Soit P le plan d'équation z = 2 et soit J (-6,3,2).

a) Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$.

b) Dans le plan P, on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4.

Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A .

3) Soit E le point de coordonnées $(4,3,0)$. On considère l'homothétie h de centre E, de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h .

a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I'.

b) Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ'.

c) La droite (EA) recoupe S' en A'. Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S'.
Montrer que les points E , B et B' sont alignés.

Exercice 3 (4 points)

On a recensé, dans un pays, les dépenses en dinars des ménages en produits informatiques et téléphoniques de l'année 2004 jusqu'à l'année 2013.

Le tableau ci- dessous donne ces dépenses Y (en 10^6 dinars) suivant le rang de l'année X.

Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dépenses Y (10^6D)	0.38	0.46	0.52	0.78	0.86	0.92	0.96	1.02	1.08	1.20

Dans l'annexe ci-jointe (Figure1), on a représenté dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ le nuage de points de la série (X, Y).

1) On se propose d'ajuster la série double (X, Y) par la droite de Mayer. (Les valeurs seront arrondies au centième près).

a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

b) Soit G_1 le point moyen des cinq premiers points du nuage. Calculer les coordonnées de G_1.

c) Tracer la droite (GG_1) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

d) Déterminer une équation de la droite (GG_1) sous la forme $y = a\,x + b$.

e) En utilisant l'ajustement de cette série par la droite de Mayer, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2019.

2) On pose $Z = e^{Y}$ et on obtient le tableau suivant :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	1.46	1.58	1.68	2.18	2.36	2.51	2.61	2.77	2.95	3.32

a) Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (X, Z).

b) Ecrire une équation de la droite affine de Z en X par la méthode des moindres carrés.
(les coefficients de la droite seront arrondis au centième).

c) En utilisant cet ajustement, donner une prévision des dépenses de l'année 2019.

Exercice 4 (7 points)

I- 1) Soit la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(t)=3\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction u.

b) En déduire le signe de u.

2) Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} f(x)=x^3[\ln(1+x)-\ln x] \text{ si } x\in]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0 et calculer $f'_d(0)$.

b) Vérifier que pour tout $x\in]0,1]$, $f'(x)=x^2u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

II- On considère les fonctions g et h définies sur $[0,1]$ par

$$g(x)=x^3\ln(x+1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x)=x^3\ln x \text{ si } x\in]0,1] \\ h(0)=0 \end{cases}$$

On désigne respectivement par (C_f) ,(C_g) et (C_h) les courbes des fonctions f, g et h dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la courbe (C_h) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Vérifier que pour tout réel x de $[0,1]$; $f(x)=g(x)-h(x)$.

b) Donner la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

c)Soit T et T' les tangentes respectives à (C_f) et (C_g) aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

Montrer que T et T' sont parallèles.

3) Dans l'annexe ci-jointe (Figure2), on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C_g) et (C_h) et leurs tangentes aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

a) Construire le point de (C_f) d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$ et la tangente (T).

b) Tracer la courbe (C_f).

4) a) Justifier que h admet une unique primitive H sur l'intervalle $[0,1]$ qui s'annule en 1.

b) Soit $\alpha\in]0,1]$ et $A_\alpha=\int_\alpha^1 x^3\ln x\,dx$. Exprimer A_α en fonction de H .

c) Calculer A_α à l'aide d'une intégration par parties.

d) En déduire H(0).

e) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Mathématiques**	
	Durée : **4 h**	Coefficient : **4**
SESSION **2016**	**Session de contrôle**	

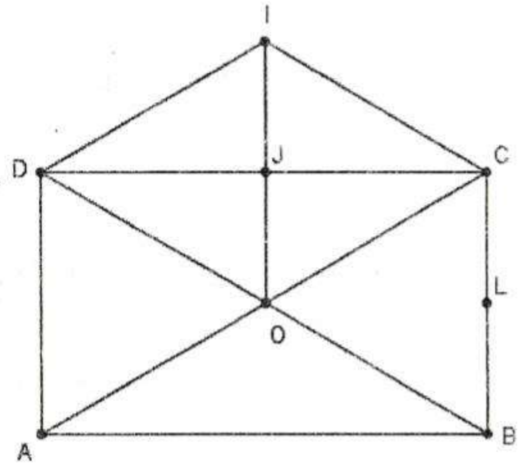
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6
Les pages 5/6et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle direct de centre O

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment $[CD]$et le point L est le milieu du segment $[BC]$.



1) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $R(O)$ et $R(D)$.

b) Montrer que $R(A) = B$.

2) Soit $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$.

a) Vérifier que $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $\varphi = R \circ h \circ g^{-1}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Soit K le milieu du segment $[IC]$. Montrer que $\varphi(B) = K$.

c) Montrer que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image par φdu rectangle ABCD.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par (E) l'ellipse d'équation : $x^2 + 9y^2 = 9$.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, (C_1) est le cercle de centre O et de rayon 1, (C_2) est le cercle de centre O et de rayon 3, N est le point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. P est le point de coordonnées $(3\cos\theta, 3\sin\theta)$, où θ est un réel appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Soit M le point de coordonnées $(3\cos\theta, \sin\theta)$.

a) Vérifier que M est un point de l'ellipse (E).

b) Placer le point M.

c) Justifier qu'une équation de la tangente T à (E) en M est $x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3$.

2) La tangente T à (E) en M coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en H et K.

a) Déterminer les coordonnées des points H et K.

b) Montrer que $HK^2 = \dfrac{9}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(\theta) = HK^2$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\theta) = 2\left(4\sin^2\theta - 1\right)\dfrac{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}$.

b) En déduire que la distance HK est minimale si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) On désigne par D le point de l'ellipse (E) correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Construire le point D ainsi que la tangente en ce point à l'ellipse (E).

Exercice 3 (4 points)

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq q$ et $q \equiv p \pmod 4$.

a) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 5$.

b) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 2$.

c) En déduire que $a^q \equiv a^p \pmod{10}$.

3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $25x - 21y = 4$.

a) Vérifier que $(1,1)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) Soit (α,β) un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5, n^{α} et n^{β} ont le même chiffre d'unité.

<u>Exercice 4</u> (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right]$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\dfrac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}\right) = e^{-\sqrt{2}}$.

b) En écrivant $\dfrac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \dfrac{-\left(\ln x + \sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \cdot \dfrac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}$, montrer que $\lim\limits_{x \to (e^{\sqrt{2}})^-} \left(\dfrac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}}\right) = -\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

2) On donne, ci-dessous, le tableau donnant le signe de $f''(x)$, le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.

x	$e^{-\sqrt{2}}$		e^{-1}		α		β		$e^{\sqrt{2}}$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖
$f'(x)$		$+$	0			$-$			‖
f	0	$\nearrow$	e			$\searrow$			0

Justifier que les points C et D, de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$, sont deux points d'inflexion de C_f.

3) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct ;

A et B sont les points de coordonnées respectives $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$;

C et D sont les points de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$;

Γ est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

a) Construire les points de C_f d'abscisses $e^{-\sqrt{2}}$, e^{-1} et $e^{\sqrt{2}}$.

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = \sin x$.

a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

On note h sa fonction réciproque.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et que $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Soit u la fonction définie sur $\left[e^{-1}, e\right]$ par $u(x) = h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$.

Montrer que pour tout $x \in \left[e^{-1}, e\right]$, $u'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) En déduire que $\int_{e^{-1}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\pi}{2}$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = e$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = 2 + \int_{e^{-1}}^{e} \left(\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\right) dx$.

b) Vérifier que pour tout $x \in \left[e^{-1}, e\right]$, $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x)$.

c) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

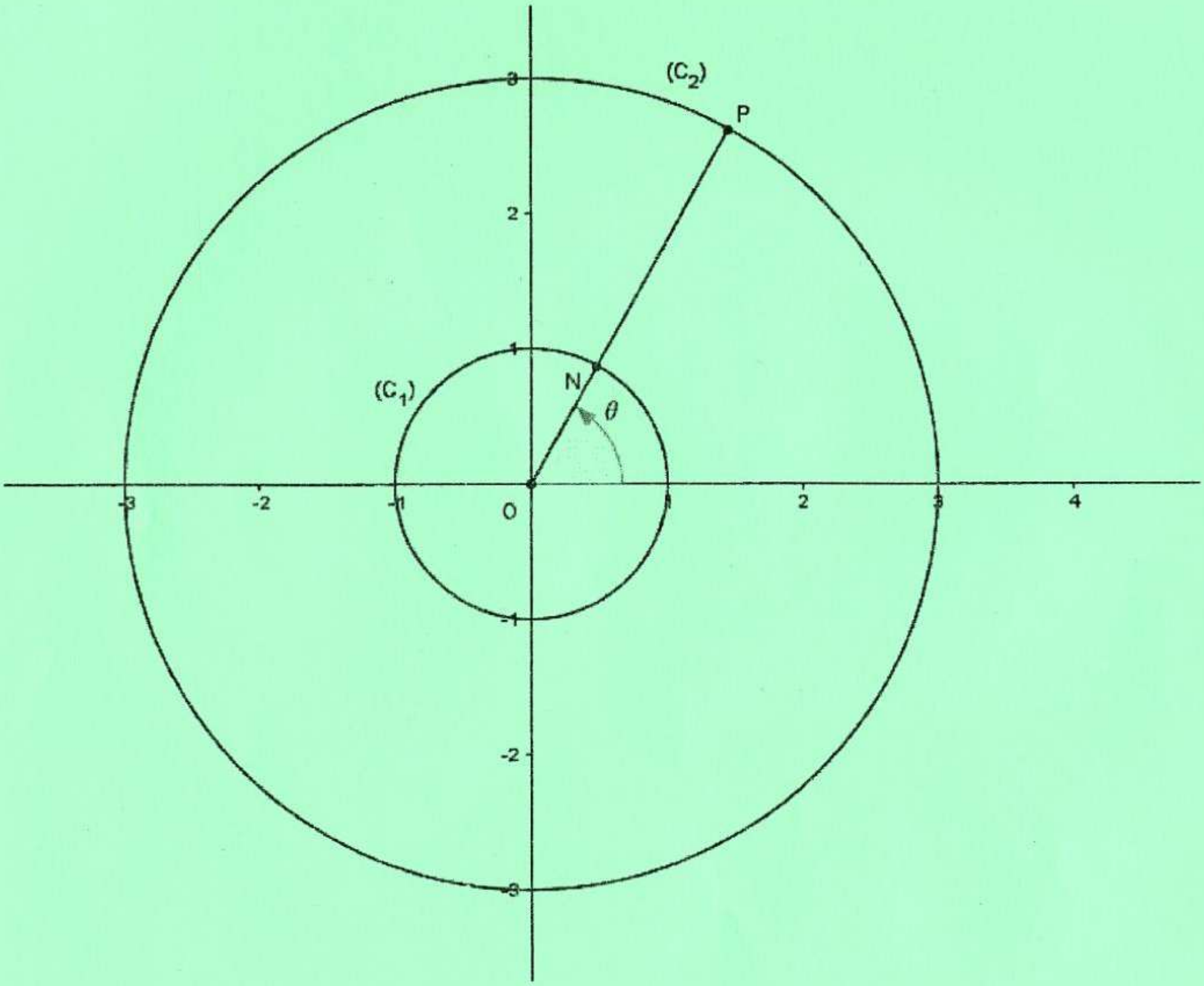


Figure 1

Annexe 2 (à rendre avec la copie)

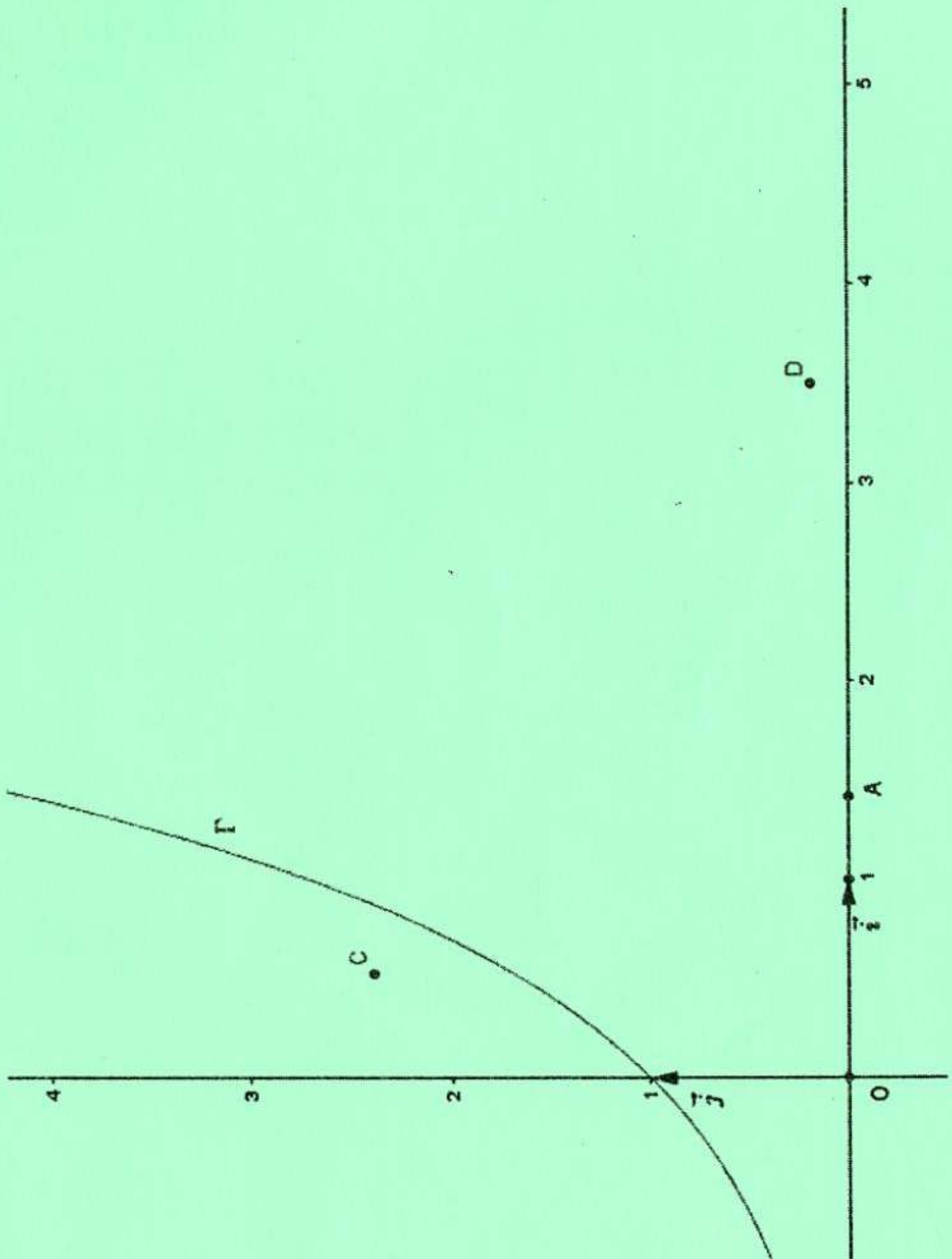


Figure 2

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Mathématiques** Durée : 4h — Coefficient : 4 **Session de contrôle**

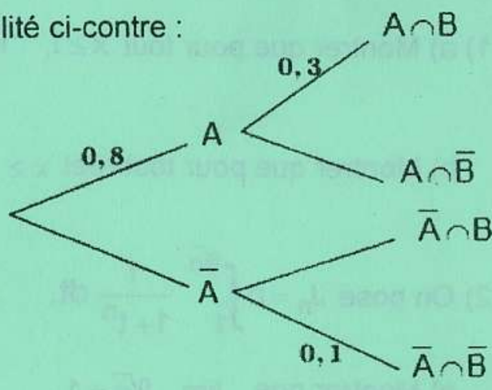
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre :



1) La probabilité de l'évènement $\overline{B}$ sachant A est égale à :

a) 0,7 b) 0,24 c) 0,11

2) La probabilité de l'évènement $\overline{A}\cap B$ est égale à :

a) 0,11 b) 0,18 c) 0,92

3) La probabilité de l'évènement A sachant B est égale à :

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{7}$

<u>Exercice 2</u> (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, ABC est un triangle direct tel que $\left(\overrightarrow{BC},\widehat{\ \overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

et $\left(\overrightarrow{CA},\widehat{\ \overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$. Les points I, J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C. Le point E est le milieu du segment $[AC]$.

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On note Δ est la médiatrice du segment $[IE]$ et on pose $f=S\circ S_{\Delta}$.

a) Montrer que $S(I)=B$. En déduire que $f(E)=B$.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser $f\circ f$. En déduire que $f(B)=C$.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que $f(J)=K$.

3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C)=A$ et $g(K)=I$.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

b) On pose $D=g(A)$. Montrer que le point D appartient à la droite (BI).

c) Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi = g \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

5) Soit Ω le centre de φ.

a) Vérifier que $D=\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)$. En déduire que $\left(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On pose $F=\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$. Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

c) Vérifier que $F=\varphi \circ \varphi(I)$. En remarquant que $IB=IE$, montrer que $FD=FA$.

d) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω.

Exercice 3 (4 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1=0$.

1) a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions) .

b) Déterminer z_1+z_2. En déduire que les solutions de l'équation (E) ne sont pas conjuguées.

On désigne par z_1 la solution telle que $|z_1|>1$ et z_2 l'autre solution.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, les points A, B, I et J d'affixes respectives z_1, z_2, 1 et -1.

2) a) Soit C le milieu du segment $[AB]$. Montrer que l'affixe du point C est $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En utilisant $(z_2-z_1)^2=(z_2+z_1)^2-4z_1z_2$, montrer que $(z_2-z_1)^2=4\left(z_C^2-1\right)$.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}\right)+\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}\right) \equiv 0\ [2\pi]$.

En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle IAJ. On note K le centre de (C) et z_K l'affixe du point K.

a) Prouver que K est un point de l'axe $(O,\vec{v})$. On pose $z_K = i\,y$, où y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z. Justifier que $(M\in(C))$ équivaut à $\left(|z-iy|^2 = |1-iy|^2\right)$.

En déduire que $(M\in(C))$ équivaut à $\left(z\bar{z}+iy(z-\bar{z})=1\right)$.

c) En remarquant que $z_1 = \dfrac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle (C).

4) a) Construire le point C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment $[AB]$.

c) Déduire une construction des points A et B, images des solutions de l'équation (E).

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x+2}{x(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=x+1$.

b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α.

d) Montrer qu'une équation de la tangente T à (C_f) au point A est $y=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) Vérifier que la tangente T passe par le point $B\left(0\,,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la droite D d'équation

$y = x + 2$ et la courbe Γ de la fonction $x : \mapsto x^2 + 1$.

a) Construire les points A et B.

b) Construire la tangente T et tracer la courbe (C_f).

B) Soit n un entier naturel non nul.

On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f\left(t^n\right) dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f\left(x^n\right)(x-1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G_n(x) = x\, f\left(x^n\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$.

2) On pose $J_n = n\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n} dt$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$.

b) En utilisant B)1)a), montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha)$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .
Nom et Prénom : . . . .
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants
. . . .
. . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 1 à rendre avec la copie

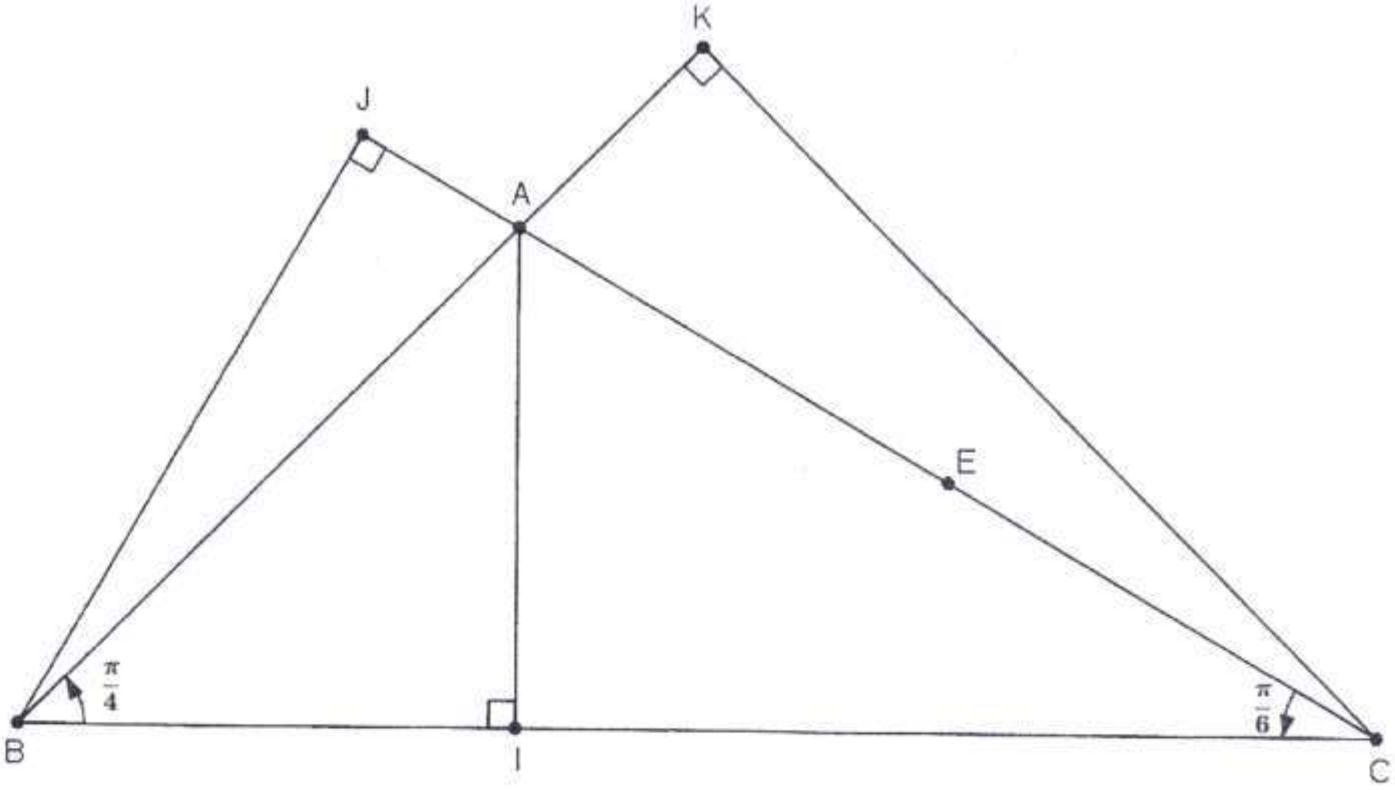


Figure 1

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 2 à rendre avec la copie

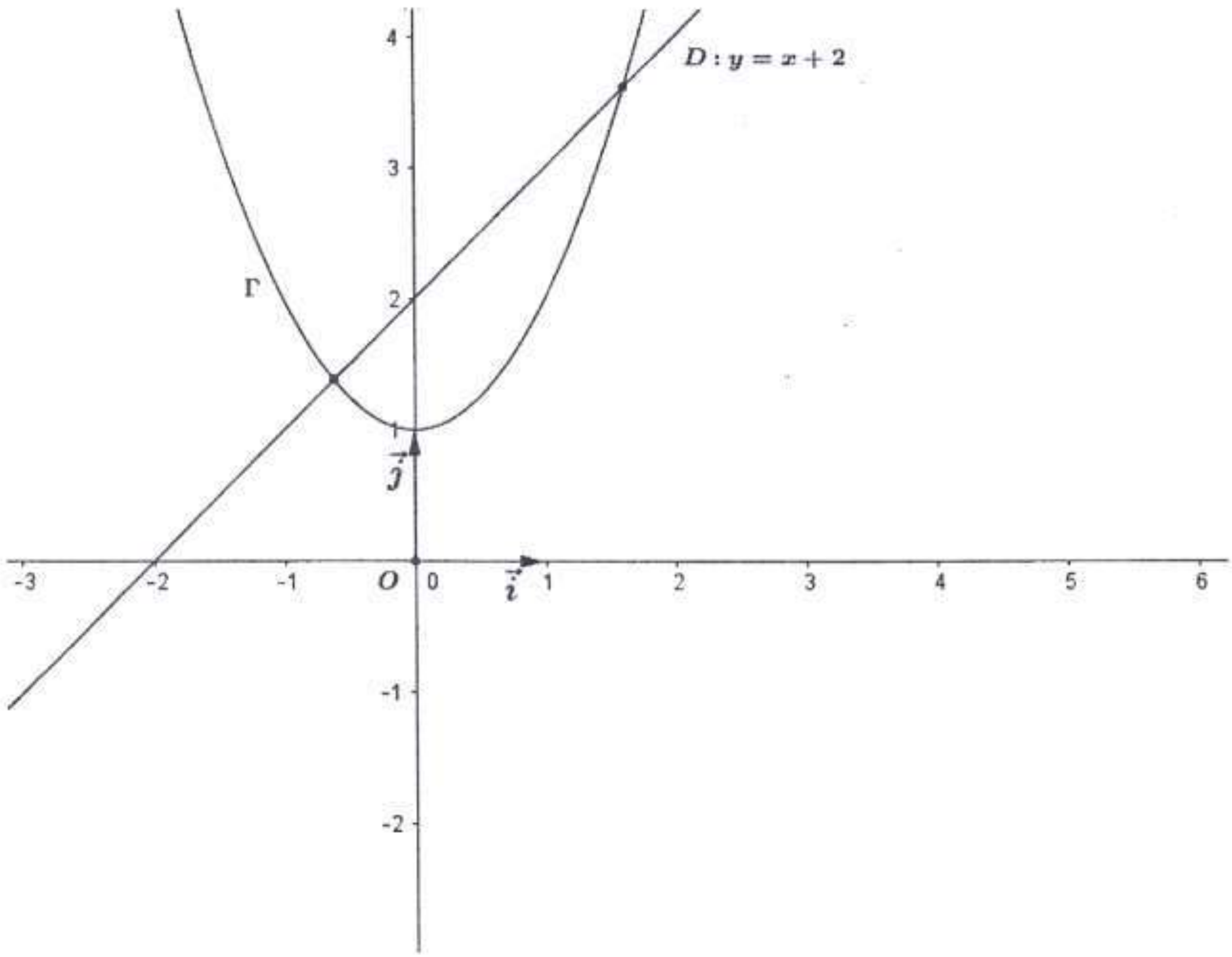


Figure 2

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Mathématiques***
	Durée : **4h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7.
Les pages 5/7, 6/7 et 7/7 sont à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> (5 points)

Le plan est orienté. Dans la **Figure 1** de **l'annexe** jointe,

- ABC est un triangle équilatéral direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$;
- $\mathscr{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;
- I est le milieu du segment $[BC]$;
- AICD est un rectangle direct.

1) Soit f le déplacement tel que $f(A)=C$ et $f(B)=A$.

Montrer que f est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit g l'antidéplacement tel que $g(A)=C$ et $g(B)=A$.

a) Justifier que g est une symétrie glissante.

b) Montrer que $g = t_{\overrightarrow{BI}} \circ S_\Delta$, où Δ est la médiatrice du segment $[AI]$.

3) Soit h l'homothétie de centre A et telle que $h(O)=I$. On pose $\varphi = g\circ h\circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{3}{2}$.

b) Montrer que $\varphi(B)=C$ et $\varphi(O)=D$.

4) Soit $E=\varphi(C)$.

a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.

b) Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

c) Construire alors le point E.

d) Soit Ω le centre de φ.

Montrer que $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$. Construire le point Ω.

5) On pose $\mathscr{C}_2=\varphi(\mathscr{C}_1)$.

Le cercle $\mathscr{C}_2$ coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ au point C et en un autre point M. On pose $N=\varphi(M)$.

Montrer que les points Ω, B et M sont alignés. Construire alors le point N.

Exercice 2 (3 points)

Une urne contient six pièces de monnaie :

- quatre pièces sont équilibrées ;
- les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « FACE » est égale à $\frac{2}{3}$.

On tire, au hasard, une pièce de l'urne et on effectue n lancers successifs de cette pièce, $n \geq 1$.
On considère les événements suivants :

- E : « la pièce tirée est équilibrée ».
- F_n : « on obtient FACE pour les n lancers».

1) a) Déterminer $p(E)$, $p(F_1/E)$ et $p(F_1/\bar{E})$.

b) Montrer que $p(F_1)=\frac{5}{9}$.

2) Montrer que $p(F_n)=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$.

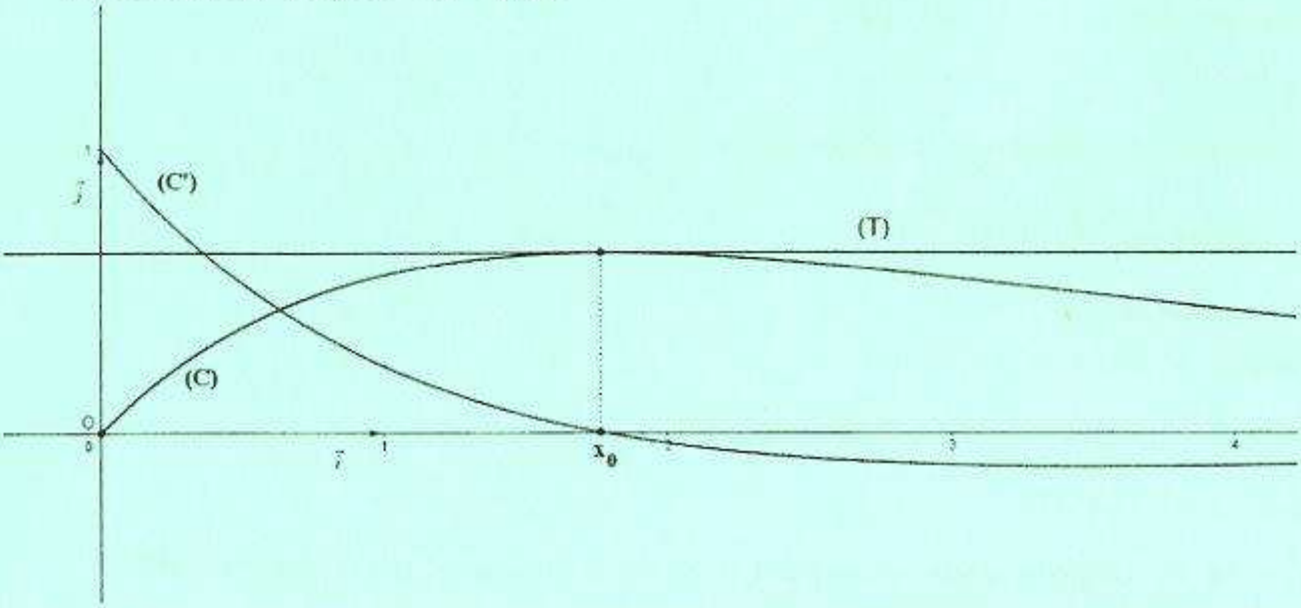
3) Soit X_n la variable aléatoire définie de la manière suivante : $\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé ;} \\ X_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Donner la loi de probabilité de X_n.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X_n.

c) Dans la figure ci-dessous,

- $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan,
- (C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{(x-1)}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right)$,
- (C') est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f,
- la courbe (C') coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en un seul point d'abscisse x_0,
- (T) est la droite d'équation $y=f(x_0)$.



Exploiter le graphique pour déterminer l'entier naturel n pour lequel l'espérance mathématique $E(X_n)$ est maximale.

Exercice 3 (7 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $1+x\ln x\geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+x\ln x} & \text{si } x>0, \\ f(0)=1. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la **figure 2** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$.

a) Construire le point A de (C_1) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et le point B de (C_2) d'abscisse $1-\dfrac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de (C_f) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de (C_f) et (C_2).

c) Tracer la courbe (C_f).

5) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t+t\ln(t)}\leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\ln(1+\ln x)\leq F(x)\leq\ln x$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction $h:x\mapsto x-F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x)=n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$.

d) Vérifier que $\dfrac{\alpha_n}{n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$.

Exercice 4 (5 points)

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-(1+i)z-i=0$.

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2, les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1, i, z_1 et z_2.

Soit z un nombre complexe distinct de 1, i, z_1 et z_2.

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z'=\dfrac{z+i}{z-i}$.

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z=i+2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z'=1+ie^{-i\theta}$.

c) Montrer que $AM'=1$ et que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}-\theta\ [2\pi]$.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ.

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q=e^{i\frac{\pi}{4}}z_P$.

a) Vérifier que $z_P=\dfrac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$.

b) En déduire que $z_Q=\dfrac{i\sqrt{2}+2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$.

c) Montrer alors que $z_Q=\dfrac{1}{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ, le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$4x^2+\frac{4}{9}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1.$$

b) Dans la **figure 3 de l'annexe** jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ le cercle Γ, l'ellipse $\mathcal{E}$, et on a placé un point M sur le cercle Γ tel que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)\equiv\theta\ [2\pi]$. Construire les points M' et Q.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques - Session de contrôle - 2018**

Annexe à rendre avec la copie

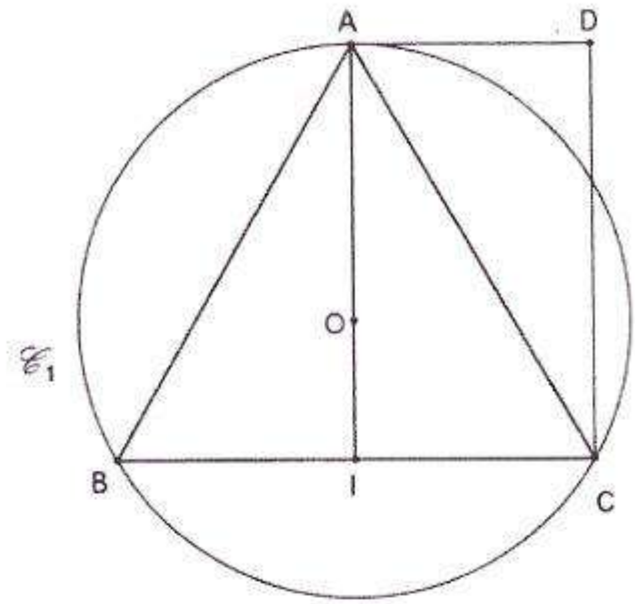


Figure 1

Ne rien écrire ici

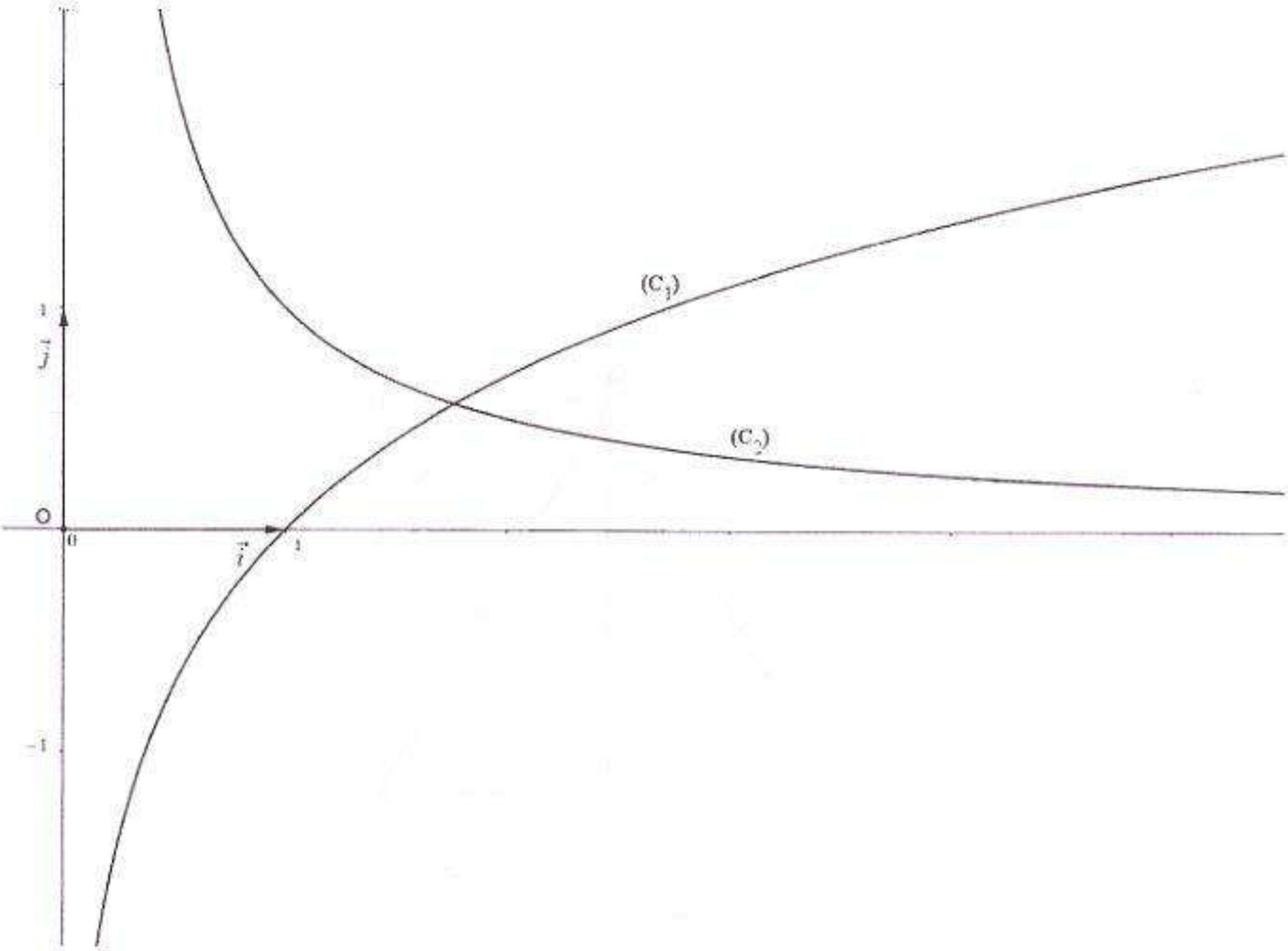


Figure 2

Ne rien écrire ici

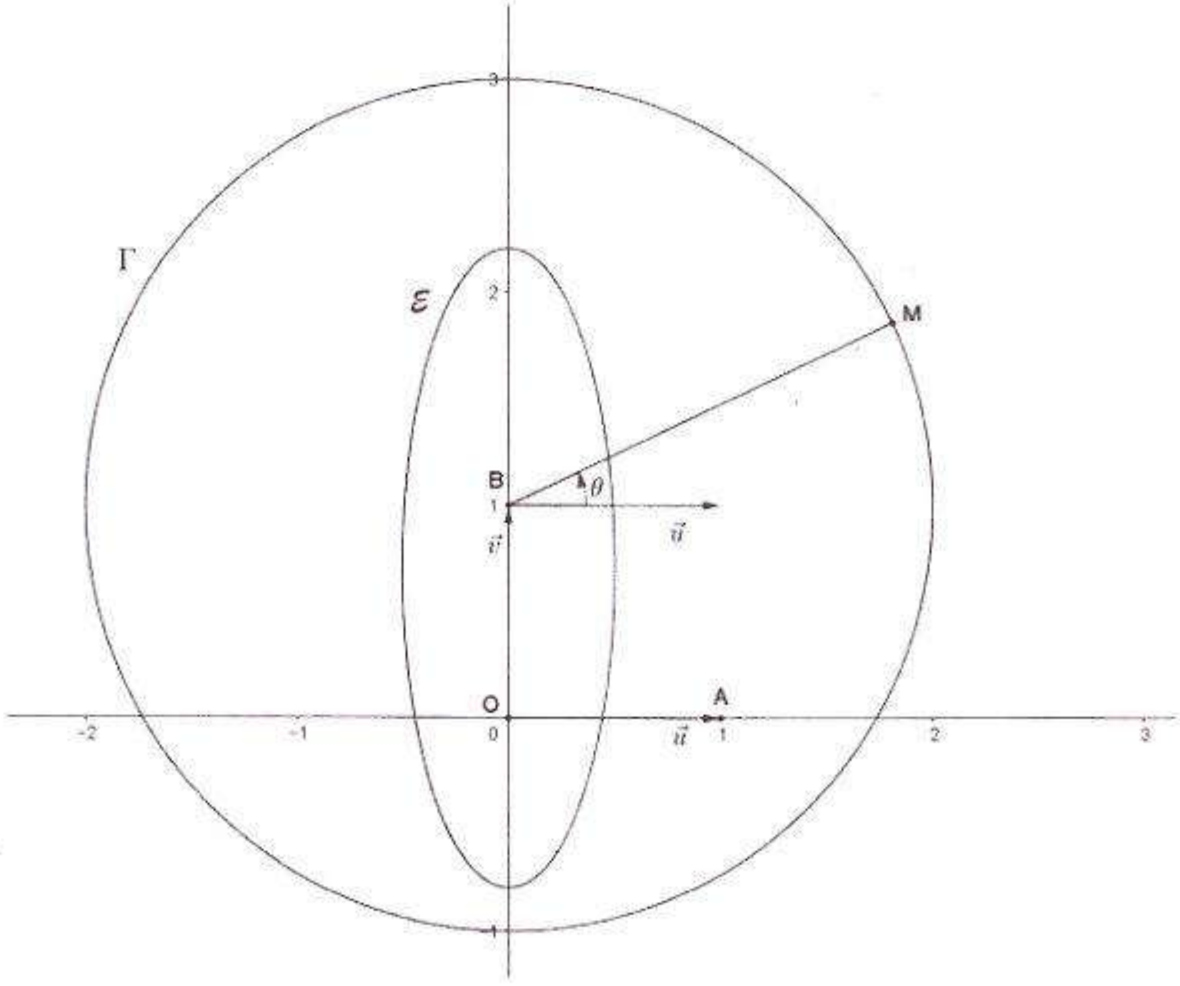


Figure 3

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session de contrôle** Épreuve : **Mathématiques** — Section : **Mathématiques** Durée : **4h** — Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice1 : (3 points)

Soient ABC un triangle rectangle en A et Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse.

1) $t_{\overrightarrow{BC}} \text{o}\ S_{\Delta} = t_{\overrightarrow{AC}} \text{o}\ S_{(AC)}$.
2) $S_{(AB)} \circ h_{(A,2)} \circ S_{(AC)} = h_{(A,-2)}$.
3) Si f est une isométrie fixant les points A et B alors $f^{-1} \text{o} S_{\Delta} \text{o} f$ est une symétrie glissante d'axe Δ.

Exercice 2 : (4,5 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $R(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points I, C, D et K d'affixes respectives $1 + i$, $1 + 2i$, $2i$ et $3i$.

1) a) Placer les points I, C, D et K dans le repère R.
   b) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K.
   c) Déterminer le rapport de g.
   d) Déterminer l'image du triangle IDO.
2) Soit M un point du plan et M' son image par g.
   On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M'.
   a) Montrer que $z' = -\dfrac{1}{2}(1+i)\,\overline{z} + 1 + 2i$.
   b) Soit Ω le centre de g. Déterminer l'affixe de Ω.
   c) Vérifier que K est le milieu du segment $[\Omega I]$.
   d) Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.
3) Soit h = gog.
   a) Montrer que h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
   b) On considère la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $A_0 = I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+2} = h(A_n)$.
   Déterminer et construire les points A_2 et A_4.
   c) Soit $S_n = A_0A_2 + A_2A_4 + \dots + A_{2n-2}A_{2n}$.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : (3 points)

Une entreprise fabrique des pièces électroniques pour une marque de voitures. Une étude statistique a prouvé que 6% des pièces fabriquées sont défectueuses.

L'unité de contrôle rejette 97% des pièces défectueuses et 2% des pièces non défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on la soumet à un test de contrôle.
On note D : " la pièce est défectueuse." et R : "la pièce est rejetée par l'unité de contrôle."

1) Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2) a) Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse et ne soit pas rejetée par l'unité de contrôle.
   b) On dit qu'il ya erreur de contrôle lorsque une pièce défectueuse est acceptée ou une pièce non défectueuse est rejetée. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de contrôle.
3) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit acceptée est égale à 0,923.
4) Pour la commercialisation de ses pièces l'entreprise décide de faire passer chaque pièce à trois contrôles successifs mais indépendants :
   - Si la pièce est acceptée par les trois contrôles, elle sera commercialisée avec le logo de la marque de voiture.
   - Si elle est acceptée uniquement par deux contrôles, elle sera commercialisée sans le logo de la marque de voiture.
   - Si elle est acceptée uniquement par un contrôle ou rejetée, elle sera détruite.

   a) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit commercialisée sans le logo de la marque de voiture est $3\times(0{,}923)^2\times(0{,}077)$.
   b) Déterminer la probabilité pour que la pièce soit détruite.

Exercice 4 : (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives $P_1 : 3x - 2y - 2z = 1$ et $P_2 : 4x - 11y + 2z = 0$.

1) a) Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ.
   b) Donner une représentation paramétrique de Δ.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer les points de Δ à coordonnées entières.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x - 13y = 1$.
   Vérifier que (2, 1) est une solution de (E) et résoudre l'équation (E).
3) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y-2z=1, \\ 4x-11y+2z=0. \end{cases}$

   a) Soit $(x, y, z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
   Montrer que (x, y, z) est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} 7x-13y=1, \\ 2z=11y-4x. \end{cases}$
   b) En déduire l'ensemble des points de Δ à coordonnées entières.

Exercice 5 : (5,5 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{\frac{-1}{2x^2}}$ si $x \neq 0$ et $g(0)=0$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Etudier la parité de g. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{x}$ et en déduire que g est dérivable en 0.

   b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $g'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$, pour tout $x \neq 0$.

   c) Dresser le tableau de variation de g.

   d) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$.

   e) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g, expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

3) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexions A et B que l'on déterminera.
   (A désigne le point d'inflexion d'abscisse positive).

   b) En annexe, on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives $y=e^x$ et $y=x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Construire dans le même repère les points A et B et tracer la courbe $\mathscr{C}$

4) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=g^2(x)$. Justifier que f est croissante sur $[0,+\infty[$.

5) Soit un entier $n \geq 2$. On pose $V(n)=\pi\int_0^n f(t)\,dt$.

   a) Interpréter graphiquement $V(n)$.

   b) Montrer que $V(n) \geq \pi\int_{\sqrt{n}}^n f(t)\,dt$.

   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(n)=+\infty$.

   d) Montrer que $V(n) \leq n\pi$.

   e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V(n)}{n}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

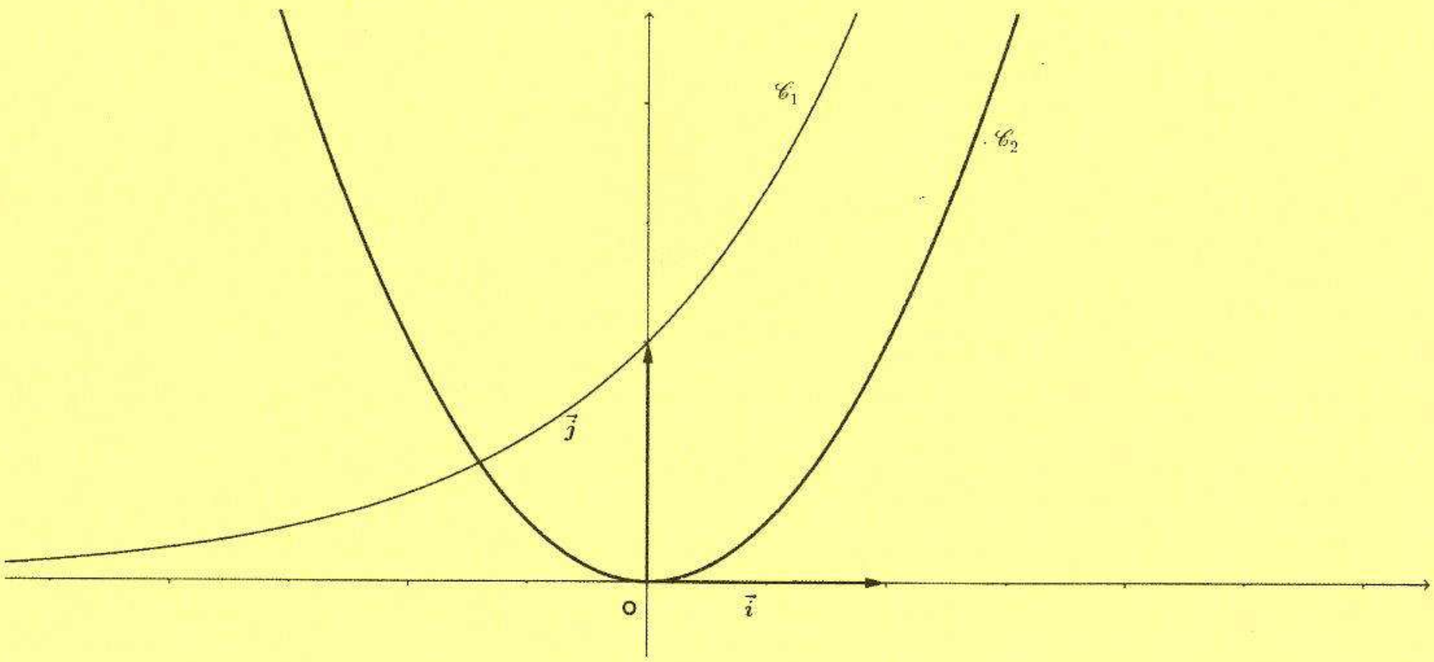
Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session de contrôle (2019)

Annexe à rendre avec la copie



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	Session de contrôle	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure** de l'annexe jointe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.

I, J et K sont les milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Soit S la similitude directe de centre B et telle que S(J)=C.

1) Déterminer l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$ et (Γ') le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Montrer que S (K) = O.
   b) En déduire que $S(\Gamma) = \Gamma'$.
   c) Déterminer et construire le point $A' = S(A)$.

3) La droite (OC) recoupe (Γ') en P et la droite (BP) recoupe (Γ) en Q.

On note S^{-1} l'application réciproque de S.

   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S^{-1}
   b) Montrer que $S^{-1}(A) = Q$.
   c) Quelle est la nature du triangle BJQ ?
   d) Prouver que K est le milieu du segment $[QI]$.

4) Soit $\sigma = S \circ S_{(AB)}$ où $S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
   a) Justifier que σ est une similitude indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer $\sigma(Q)$ et $\sigma(J)$.
   c) La droite (IJ) coupe la droite (QB) en un point M.
   Déterminer et construire le point $M' = \sigma(M)$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k.

1) Montrer chacun des résultats suivants :
   $k^3 \equiv 1 \pmod 7$, si et seulement si, $r \in \{1, 2, 4\}$.
   $k^3 \equiv 6 \pmod 7$, si et seulement si, $r \in \{3, 5, 6\}$.
   $k^3 \equiv 0 \pmod 7$, si et seulement si, $r = 0$.
2) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer les restes possibles modulo 7 de $x^3 + y^3$.
3) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $E_a = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x^3 + y^3 = a \right\}$.

Montrer que les équations $x^3 + y^3 \equiv 3 \pmod 7$ et $x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod 7$ n'admettent

pas de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4) On considère l'ensemble E_{9990}. Supposons qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $(x,y) \in E_{9990}$.
   a) Montrer alors que $x \equiv 0 \pmod 7$ ou $y \equiv 0 \pmod 7$.
   b) Déterminer E_{9990}.

Exercice 3 : (5 points)

On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules noires et deux boules blanches et d'une urne U_2 contenant une boule noire et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On procède à l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de U_1.

- Si elle est blanche, on la remet dans U_1 et on tire simultanément deux boules de U_2,

- Si elle est noire, on la met dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

On considère les évènements suivants :

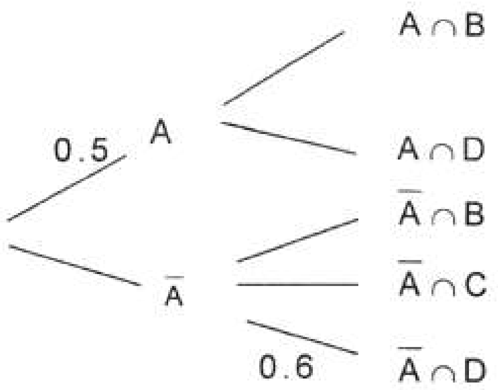
A « La boule tirée de U_1 est blanche. »

B « On tire deux boules blanches de l'urne U_2. »

C « On tire deux boules noires de l'urne U_2. »

D « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne U_2. ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :



b) Déterminer p(B) et p(D).

c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est égale à $\frac{3}{10}$

2) Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans U_2.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans U_2 ?

3) On répète n fois de suite (n>1) et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente.

On désigne par F_n l'évènement : « Il ne reste dans U_2 aucune boule noire pour les (n-1) premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la $n^{ème}$ épreuve ».

Quelle est la probabilité p_n de F_n ?

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x\ln(1+x)}{1+x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que $f'(x) = \frac{x+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$, x > -1.

c) Montrer que $x+\ln(1+x) > 0$, si et seulement si, $x > 0$.

d) En déduire le tableau de variation de f.

e) Tracer (C).

B) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $V_n = \int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n)\,dt$ et on considère la fonction F_n définie sur $[1, +\infty[$ par $F_n(x)=\int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t}\,dt$.

1) Montrer que $G(x)=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)-\frac{1}{2}\ln^2(2)$, $x \geq 1$.

2) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $G(x^n) \leq F_n(x) \leq x\,G(x^n)$.

3) Montrer que F_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $F'_n(x)=n\,f(x^n)$, $x \geq 1$.

4) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $n\,V_n = F_n(\frac{n+1}{n})$.

5) a) Montrer que $G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n\,V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$, $n \geq 1$.

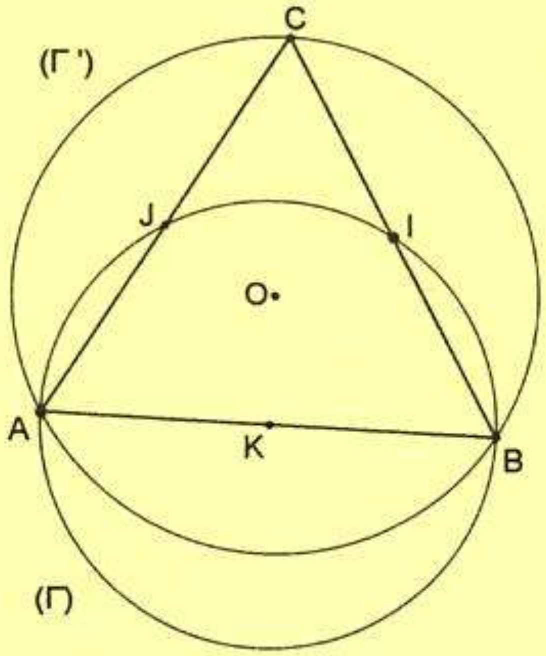
b) Vérifier que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,V_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

	Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série :	Signatures des surveillants
	Nom et Prénom :	. . . .
	Date et lieu de naissance :	. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription | | | | | | |

*****

Le sujet comporte cinq pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1) Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2.

2) Vérifier que $a^3 \equiv a \ (mod\ 6)$.

3) **a/** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a \ (mod\ 6)$.

b/ En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a^{2n} \equiv a^2 \ (mod\ 6)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \ (mod\ 6), \\ x^3y^2 \equiv 1 \ (mod\ 6). \end{cases}$

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct, le point O est le milieu du segment $[BC]$ et les triangles AEB et ACF sont équilatéraux directs.

1) Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$. Montrer que $r_1(B) = F$ et $r_1(E) = C$.

2) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).

a/ Montrer que $S\big([BE]\big) = [CF]$.

b/ Les droites (BE) et (CF) se coupent en un point Ω.
Montrer que les points A, O et Ω sont alignés.

3) Soit f un déplacement qui envoie le segment $[BE]$ sur le segment $[CF]$.

a/ Montrer que $f = r_1$ ou f est la rotation r_2 d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ et de centre Ω.

b/ Construire le point $A' = r_2(A)$ et montrer que $ACA'F$ est un losange.

4) Soit g l'antidéplacement qui envoie B sur F et E sur C.

a/ Montrer que g est une symétrie glissante.

b/ Montrer que $g(A) = A'$.

c/ Soit I le milieu du segment $[BE]$ et $J = g(I)$. Montrer que $g = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$.

Exercice 3 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+z+\frac{1}{3}=0$.

On note z_1 et z_2 les solutions avec $Im(z_1)>0$.

b/ Écrire z_1 sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe , A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Δ est la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

2) La droite Δ coupe la droite (OB) au point C.

Montrer que l'affixe du point C est égale à z_1.

3) Soit D le point d'affixe $z_D=\frac{1}{3\sqrt{3}}i$.

a/ Vérifier que $z_D=z_1^3$.

b/ Montrer que $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$.

c/ Construire le point D.

4) Soit $z\in\mathbb{C}$.

Montrer que $\left(z^2+z\in\mathbb{R}\right)$ équivaut à $\left(z\in\mathbb{R}\text{ ou } Re(z)=-\frac{1}{2}\right)$.

5) Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on désigne par M et N les points d'affixes respectives z et z^3.

a/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

b/ Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point P de la droite Δ d'affixe α .

Construire, en justifiant, le point Q d'affixe α^3.

Exercice 4 (7.5 points)

Partie A

Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^x$.

α et β sont les réels tels que $g(\alpha)=1$ et $g(\beta)=\frac{1}{2}$.

1) En utilisant le graphique,

a/ donner le tableau de signe de la fonction dérivée g' de g,

b/ résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

$$g(x)<\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad g(x)<1.$$

2) Montrer que $\alpha>\frac{1}{2}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=g(x)-\left(g(x)\right)^2$.
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a/ Calculer $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter le résultat.

c/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4) **a/** Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2g'(x)\left(\frac{1}{2}-g(x)\right)$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

a/ Montrer que $\mathscr{A}=\frac{1}{2}-\int_0^\alpha xe^{2x}dx$.

b/ En déduire que $\mathscr{A}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{4\alpha^2}$.

Partie B

Pour tout entier $n\geqslant 2$, on pose $J_n=\int_0^\alpha \left(g(x)\right)^n dx$.

1) **a/** Montrer que $0\leqslant J_n\leqslant \frac{\alpha}{n+1}$.

b/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2) **a/** Montrer que $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha}\left(g(x)\right)^n dx \leqslant J_n$.

b/ Montrer que $\frac{1}{n}\left[g\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)\right]^n\leqslant J_n\leqslant 1$.

c/ Justifier que $\sqrt[n]{n}=e^{\frac{\ln n}{n}}$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{J_n}=1$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2021)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

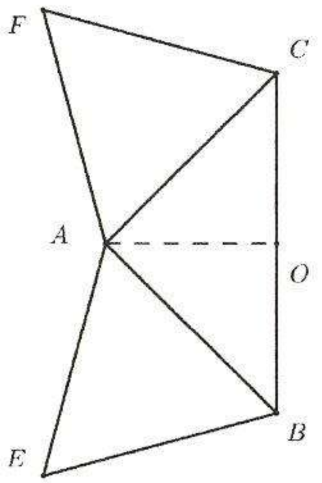
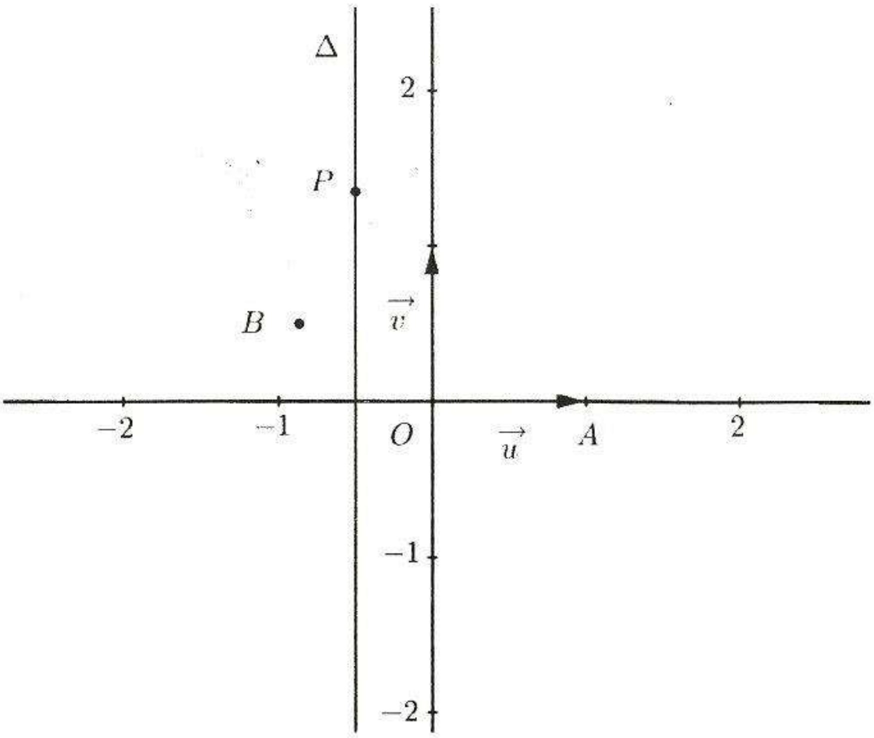
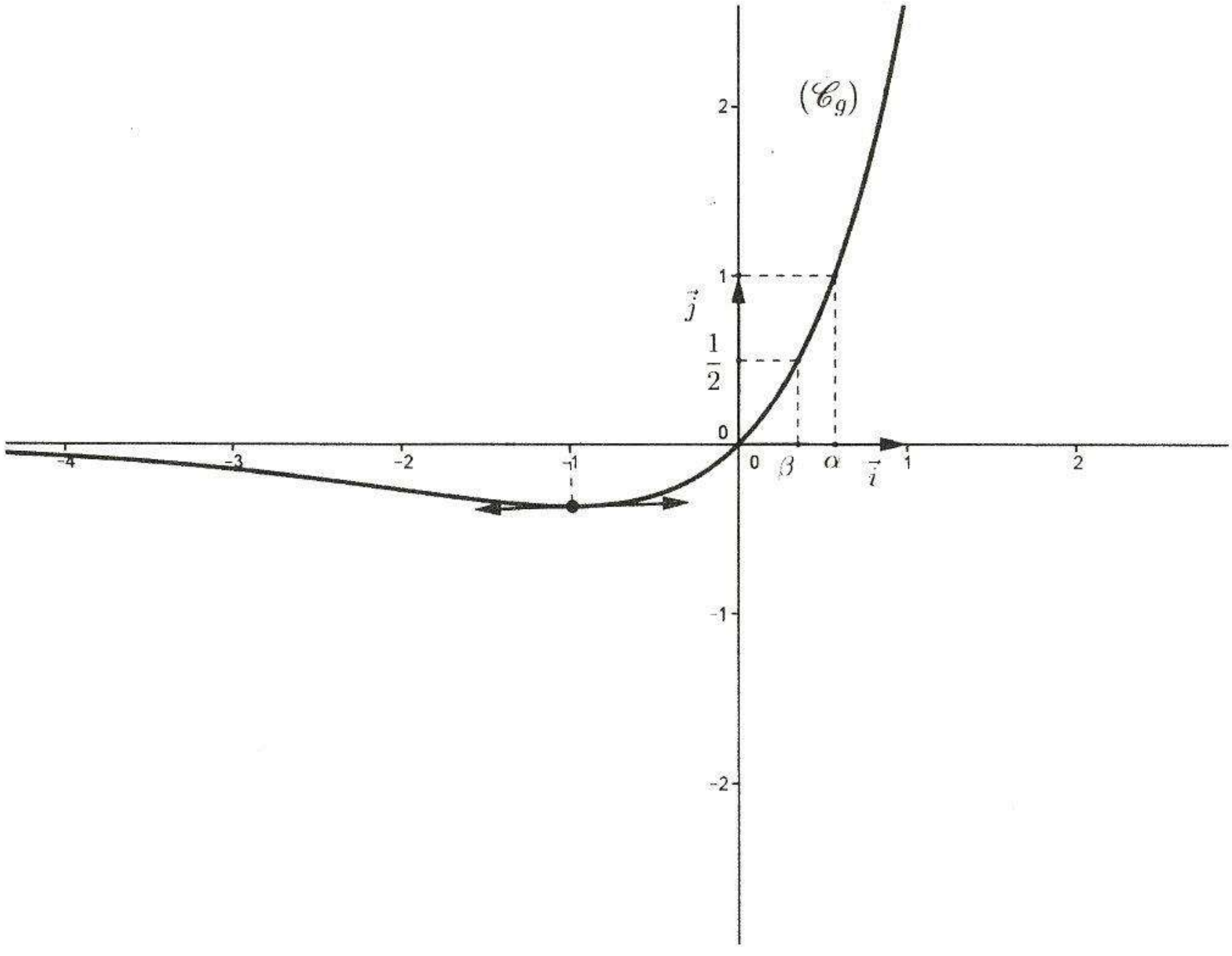


Figure 2



Ne rien écrire ici

Figure 3



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5,5 points)

Le plan est orienté. Dans la figure de l'annexe jointe,

- Le triangle OEB est rectangle en B et tel que $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le triangle OEF est rectangle en E et tel que $\left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FO}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le point I est le milieu du segment $[OF]$.

1) On pose $R = S_{(OE)} \circ S_{(OB)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Montrer que $R(E) = I$.

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Montrer que $f(E) = F$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera les éléments caractéristiques.

3) La médiatrice du segment $[IE]$ coupe la droite (BE) en un point A.

a) Montrer que $f(B) = A$.

b) Vérifier que $EA = EO$. Montrer alors que le quadrilatère AEIF est un losange.

4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(B) = A$ et $g(E) = F$.

On désigne par Ω le centre de g et on pose $K = g(F)$.

a) Montrer que le rapport de g est égal à 2.

b) Justifier que $\left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}\right) [2\pi]$.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FK}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$ puis que $F \in [EK]$.

d) Montrer que le point Ω appartient à la droite (EF) privée du segment $[EF]$.

e) En déduire l'axe de g.

f) Construire le point Ω.

5) a) Montrer que $g\left((\Omega I)\right)=(\Omega A)$.

b) Montrer que les points Ω, B et I sont alignés.

Exercice 2 (3,5 points)

On dispose d'une urne contenant cinq boules portant les numéros $-1,0,0,1,2$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) On considère les évènements :

A : «Les deux boules tirées sont de même numéro.»

B : «Avoir au moins une boule numérotée 0.»

a) Calculer la probabilité de l'évènement A.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement B est égale à $\frac{7}{10}$.

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au produit des numéros des boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

3) Une expérience consiste à répéter l'épreuve précédente n fois de suite $(n \geq 2)$ en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0.

a) Déterminer $P(Y=1)$.

b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que le nombre moyen de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0 soit supérieur ou égal à 5.

Exercice 3 (4 points)

Partie A

Soit p un nombre premier tel que $p>3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_p) : x^3 \equiv 1 \pmod p$.

1) Montrer que si $x \equiv 1 \pmod p$ alors x est une solution de (E_p).

2) Soit x une solution de (E_p).

a) Montrer que $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

b) En déduire que $x \equiv 1 \pmod p$.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_p).

Partie B

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{43}) : x^3 \equiv 1 \pmod{43}$.

1) Montrer que $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$.

(On pourra remarquer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.)

2) a) Vérifier que $(2x+1)^2 + 3 = 4(x^2 + x + 1)$ et que $30^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

b) Montrer que $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$ si et seulement si $(2x+1)^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

c) En déduire que :

$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow (2x - 29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x + 31) \equiv 0 \pmod{43}$.

3) a) Vérifier que 22 est un inverse de 2 modulo 43.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{43}).

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$.

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

1) Montrer que f est paire.

2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter.

3) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1 - e^{2x})\, e^x}{(1 + e^{2x})^2}$, pour tout réel x.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Tracer (ζ).

Partie B

Soit F la fonction définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} f(t)\, dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \tan x$ est une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]0, +\infty\right[$.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

b) Déterminer $g^{-1}(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, pour tout $x > 0$.

3) Montrer que $F(x) = g^{-1}(x) - \dfrac{\pi}{4}$, pour tout $x>0$.

4) Soit $\lambda > 0$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\lambda$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que $A(\lambda) = 2\,F(e^{\lambda})$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Partie C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\ F(e^t)\ dt$.

1) a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $0 \leq F(e^t) \leq \dfrac{\pi}{4}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{F(e)}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\ f(t)\ dt$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,I_n = g^{-1}(e) - \dfrac{\pi}{4}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques

Session de contrôle (2022)

Annexe à rendre avec la copie