# EPREUVE 1- TERM C&E

## EXERCICE 1

On considère le nombre complexe : $u = 1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)i$

1-a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$

b) Montrer que : $\dfrac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

d) Montrer que : $u = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$

1) On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \; ; \; y_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \left(2 - \sqrt{3}\right)y_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \left(2 - \sqrt{3}\right)x_n + y_n \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que pour tout $\forall n \in \mathbb{N},\; x_n + iy_n = u^n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ : $x_n = \dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right)$ Pour tout entier naturel n, on note $A_n$ *le point d'affixe* $u^n$

a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points $O$, $A_0$ *et* $A_n$ *sont alignés*

b) Montrer que pour tout entier n, le triangle $OA_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_n$.



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EXERCICE 2

Pour tout $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on pose : $a_k = 8^{3k-2} + 8^{3k-1} + 8^{3k}$ et on considère l'entier $A = 8 + 8^2 + 8^3 + ... + 8^{888}$

1-a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $a_k \equiv 0[73]$

b-) Déterminer les entiers $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels : $a_k \equiv 2[6]$

2-a) Montrer que : $A \equiv 6[7]$

b-) Vérifier que : $A = \sum_{k=1}^{296} a_k$, puis en déduire que : $A \equiv 0[73]$

3-a) Montrer que : $7A = 8\left(8^{888} - 1\right)$ puis déduire que A est divisible par 9

Déduire de ce qui précède que :

b-) Déduire de ce qui précède que : $A \equiv 0[5256]$ $\left(\text{On donne : } 5256 = 2^3.3^2.73\right)$

4-) En utilisant le théorème de fermat montrer que :
$A \equiv 72[887]$ $\left(\text{On } \textit{admettra que } 887 \text{ est premier}\right)$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# PROBLEME Terminale C & E MATHS, BAC 2024 (En préparation)

## PARTIE 1

Pour tout entier naturel **non nul n**, on considère la fonction $f_n$ définie sur I = $[0;+\infty[$

par : $\begin{cases} \forall x \in ]0;+\infty[\,; f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

$(C_n)$ sa courbe dans le repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-a) Vérifier que : $\forall x \in ]0;+\infty[\,; \sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left( x^{\frac{1}{2n}} \ln\left( x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n$ en déduire que $f_n$

est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

c) Vérifier que : $\forall x \in ]0;+\infty[\,;\ \dfrac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left( \dfrac{\ln\left( x^{\frac{1}{2n}} \right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n$ En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$

puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

d) Calculer suivant la parité de n, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2-a) Montrer que $f_n$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$\forall x \in ]0;+\infty[\,, f'_n(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n + \ln x)$

b) Vérifier que : $\forall n \geq 2,\ f'_n(x) = 0$, si seulement si $x = 1$ ou $x = e^{-2n}$

c) Etudier, suivant la parité de n le sens de variation de $f_n$ et donner son tableau de variations.

d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(C_n)$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

**PARTIE 2**

1- Soit $\beta \in \left]1;e\right[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $\left(U_n\right)_{n\geq 1}$ définie par :

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 0 < U_n < \sqrt{e}$

b- Montrer que la suite $\left(U_n\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.

c- Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2-a) Montrer que pour tout entier **n non nul**, il existe un unique réel $x_n \in \left]1;e\right[$ tel que : $f_n\left(x_n\right) = 1$

b) Montrer que la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

a) Montrer que : $0 < l < \sqrt{e}$

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln x_n\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$

c) Montrer que si si $l < e$ alors; $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\ln x_n\right) = -\infty$

d) En déduire la valeur de $l$

**PARTIE 3**

On pose pour tout $x \in I,\ F\left(x\right) = \int_x^1 \left(f_1\left(t\right)\right)^2 dt$

1-a) Montrer que F est continue sur $I$

b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[;F\left(x\right) = -\frac{x^2}{2}\ln^2\left(x\right) + \frac{x^2}{2}\ln\left(x\right) + 4\left(1-x^2\right)$$

2-a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F\left(x\right)$

b) En déduire La valeur de $F\left(0\right)$

c) Calculer, en $cm^3$ le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion $\left(C_1\right)$ relative à l'intervalle $\left[0;1\right]$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EPREUVE 2- TERM C&E

## EXERCICE 1

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération de base 6 par : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ U_n=\overline{\underbrace{aa....a}_{n\ fois}}^{(6)}$

1. Déterminer $U_1$, $U_2$ et $U_3$ en fonction de $a$
2. 
   a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ 5U_n=a(6^n-1)$
   
   b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E):\ 6^n x-5y=a$ Résoudre l'équation (E)
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, Montrer que : $U_n\equiv 0[7]$ si seulement si n est pair.
4. Soit $n,m\in\mathbb{N}^*$ ; montrer que si m divise n alors $U_m$ divise $U_n$
5. Dans cette question on prend $a=1$
   a) Montrer que si $U_n$ est premier alors n est premier.
   
   b) *Calculer* $U_5$ . Le nombre $U_5$ est-il premier ? Conclure.
6. 
   a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ U_{n+1}=U_n+6^n a$
   
   b) Montrer que les nombres $6^n$ et $\sum_{k=0}^{n-1}6^k$ sont premier entre eux.
   
   c) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ PGCD(U_{n+1};U_n)=a$
   
   d) Soit $p$ un nombre premier avec $p\geq 7$ . On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(F)$: $U_{n+1}x+U_n y=p$
      
      i) Pour quelles valeurs de a l'équation (F) admet deux solutions.
      
      ii) Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a=1$


DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EXERCICE 2

Soit m un nombre complexe tel que : $m \neq 2$

**PARTIE 1**

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m)$:

$$Z^2-(1-i)(m+2)Z-i(m^2+4)=0$$

1.

a) Montrer que le discriminant $\Delta$ de l'équation $(E_m)$ est $\Delta=\left[(1+i)(m-2)\right]^2$

b) Déterminer $Z_1$ et $Z_2$ les deux racines de l'équation $(E_m)$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$

2. Pour Pour $m=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ , donner une forme trigonométrique des solutions $Z_1$ et $Z_2$

**PARTIE 2**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ . On considère les points $A, B, C$ *et* $\Omega$ d'affixes respectifs $a=m-2i;\ b=2-im;\ c=\frac{m}{2}(1+i)-4\text{i}$ *et* $\omega=2-2i$

1. a) Déterminer l'affixe e du point $I$ milieu de $[AB]$

b-) Montrer que : $e-\omega=\frac{1-i}{2}(m-2)$, puis montrer que $\overrightarrow{\Omega I}\perp\overrightarrow{AB}$

2. Soir R la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a) Montrer que : $R(A)=B$

b) Montrer que l'affixe du point C' image du point C par la rotation $R$ est $\frac{m}{2}(1-i)$

c) Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{C'I}$ est indépendant de $m$. En déduire une méthode de construction des points $I, A$ *et* $B$ *à partir du po*int $C$



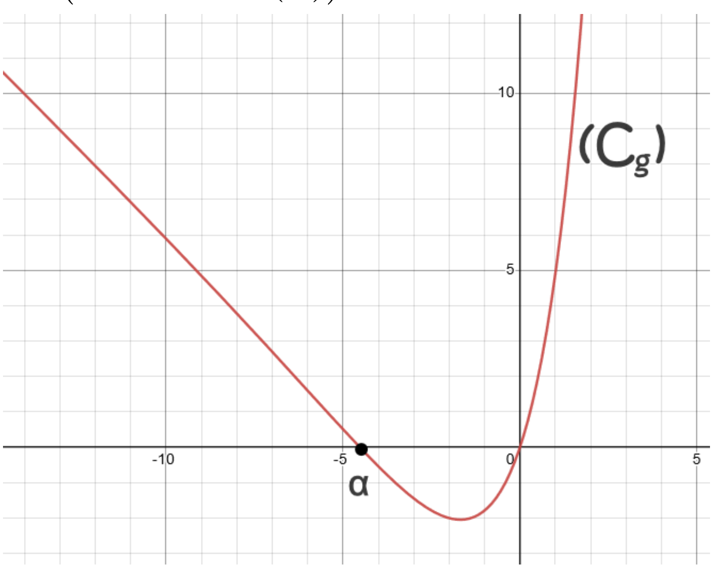
DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# PROBLEME

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$

Soit $(C)$ sa courbe dans le repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(unité : 1cm)$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
3)
   a) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$
   b) Etudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et de la droite $(\Delta)$
4)
   a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$
   b) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R};\ x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée $f'$ sur $\mathbb{R}$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$
5)
   a) Montrer que : $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$ où $g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ *pour tout* $x$ *de* $\mathbb{R}$
   b) A partir de la courbe ci-dessous de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ $(\text{Re}marque\ g(\alpha))$






DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

c) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

6) Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

$\left(\text{On prendra : } \ln(4) \simeq 1{,}4 \text{ ; } \alpha \simeq -4{,}5 \text{ et } f(\alpha) \simeq -3{,}5\right)$

7) .

a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$

8) Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \ln 4$

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

d) Calculer la limite de la suite $(u_n)$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EPREUVE 3- TERM C&E

## EXERCICE 1

*Soit* $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq 2$ Posons $U_n = \overline{\underset{n\ fois}{55....5}}^{(7)}$ L'écriture dans la base 7.

1. Montrer que : $6U_n = 5(7^n - 1)$ , en déduire que : $PGCD(U_{n+1};7) = 1$
2. Montrer que : $PGCD(U_{n+1};U_n) = 5$
3. On admet que 2003 est un nombre premier. Soit x un entier naturel tel que : $x^2 + 1 \equiv 0[2003]$
   a) Montrer que : $x^{2003} \equiv -x[2003]$
   b) Montrer que : $x^{2003} \equiv x[2003]$ , en déduire que : $2x \equiv 0[2003]$
   c) Montrer que l'équation : $x^2 + 1 \equiv 0[2003]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$

## EXERCICE 2

On considère la fonction numérique $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1) Etudier les variations de la fonction $f_n$
2) .
   a) Montrer que : $\exists! \alpha_n > 0$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 < \alpha_n < e^2$
   c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$
3) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de $\alpha_n$ et $n$, puis en déduire que : $\alpha_{n+1} > \alpha_n$
4) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
5) Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \alpha_n = e^2$
6)
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists c > 0 : e^{\frac{2}{n}\alpha_n} - 1 = \frac{2e^c}{n}\alpha_n$
   b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \dfrac{e^{\frac{2}{n}\alpha_n} - 1}{\frac{2}{n}\alpha_n} \leq e^{\frac{2e^2}{n}}$ , puis déterminer : $\lim_{x\to+\infty} n(e^2 - \alpha_n)$


DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# PROBLEME

La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ unité graphique : 2 cm. Pour tout entier naturel **n**, on considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n\left(x\right)=\dfrac{e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)}$

On désigne par $\left(C_n\right)$ sa courbe dans le repère orthonormée $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

## PARTIE A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions $f_0$ et $f_1$ correspondant respectivement à **n** = 0 et **n** = 1.

On considère d'abord la fonction $f_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0\left(x\right)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

1)
   a) Déterminer la limite de $f_0\left(x\right)$ *quand x tend vers* $-\infty$
   b) Déterminer la limite de $f_0\left(x\right)$ *quand x tend vers* $+\infty$
   c) En déduire les asymptotes de $\left(C_0\right)$

2) Montrer que le point $K\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\left(C_0\right)$

3) Étudier les variations de $f_0$

4)
   a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\left(C_0\right)$ au point K.
   b) Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\left(C_0\right)$, il suffit d'étudier sur sur $\mathbb{R}$ le signe de $g\left(x\right)$ où $g\left(x\right)=2e^x-xe^x-2-x$
   c) Calculer $g'\left(x\right)$ et $g''\left(x\right)$
   d) Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''\left(x\right)$, $g'\left(x\right)$ et $g\left(x\right)$ suivant les valeurs de *x*.
   e) En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\left(C_0\right)$

5) *Tracer* $\left(C_0\right)$ et $\left(T\right)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

6) a) Montrer que pour tout réel **x**, les points $M\left(x;f_0\left(x\right)\right)$ et $M'\left(x;f_1\left(x\right)\right)$ sont symétriques par rapport à la droite $\left(d\right)$ d'équation $y=\dfrac{1}{2}$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

b ) Comment obtient-on $(C_1)$ à partir de $(C_0)$? Tracer $(C_1)$.

**PARTIE B**

Étude de la suite **u** définie pour tout entier naturel **n** par : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1) Montrer que : $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
2) Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$. En déduire $u_1$
3) Montrer que la suite **u** est positive.
4) On pose : $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$
   a. Montrer que, pour tout **x** réel, $k(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$
   b. Etudier le signe de $k(x)$ pour $x \in [0;1]$
   c. En déduire que la suite **u** est décroissante.
5)

a) Montrer que pour tout entier narurel $n \geq 2$ ; $u_{n-1} + u_n = \frac{1-e^{-(n-1)}}{n-1}$

b) Calculer $u_2$.

6) Soit **v** la suite définie pour tout entier narurel $n \geq 2$ on a : $v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$

a) Calculer la limite de $v_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

b) Montrer que pour tout entier narurel $n \geq 2$ : $0 \leq u_n \leq v_n$

c) En déduire la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EPREUVE 4- TERM C & E

## EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

1) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{2n}{n+1}\right]$
2) *En* déduire que : $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$
3) Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in \left]\frac{2n}{n+1}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$
4) Vérifier que : $\alpha^n = \frac{1}{2-\alpha}$

## EXERCICE 2

*Pour* tout $n \in \mathbb{N}^*$, On considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x - n\ln x$

1)
   a) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$
   b) Etudier les variations de la fonction $f_n$
   c) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions $u_n$ et $v_n$ et que : $0 < u_n < n < v_n$
2)
   a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ 0 < u_n < e$
   b) *Montrer* que : $\forall n \geq 3,\ f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$
   c) *Montrer* que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente
   d) *En* encadrant $\ln(u_n)$, déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 3}$
   e) *Montrer* que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n(u_n - 1) = 1$
3)
   a) *D*éterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
   b) Calculer $f_n(n\ln(n))$, puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ n\ln(n) < v_n$
   c) *Montrer* que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ x > 2\ln x$. déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ n > 2\ln n$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

d) Déterminer le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis montrer que :

$\forall n \geq 3,\ n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$

e) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n\ln(n)} = 1$

# PROBLEME

Soit $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x \in ]0;+\infty[ ;\ f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

## PARTIE A

On note $(C)$ sa courbe dans le repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(Unité$ graphique : $5cm)$

1. Démontrer que $(\Delta)$ d'équation $y=1$ est asymptote à $(C)$

2. Pour $x>0$ Calculer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Etudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. $\left(On\right.$ pourra utiliser $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty} u^n e^{-u} = 0\left.\right)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe $(C)$ ?

3. Démontrer que $\forall x \in ]0;+\infty[ ;\ f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$

4. Etudier les de la fonction f et dresser son tableau de variation.

## PARTIE B

On note $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$

1. Montrer que dans $]0;+\infty[$ les équations $g(x)=0$ et $x^3+x^2+2x-1=0$ sont équivalentes.

2. Démontrer que l'équation $x^3+x^2+2x-1=0$ admet une seule racine réelle $\alpha$ dont on justifiera un encadrement à $10^{-2}$ près.

3. On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ Encadrer A à $10^{-1}$ près $(Justifier)$ et montrer que $A = f'(\alpha)$

4. *Pour* tout $a>0$, on note $T_a$ la tangente à $(C)$ au point d'abscisse a. Montrer que $T_a$ a pour équation $y = Ax$. Tracer Ta, puis la courbe $(C)$ .



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes $T_a$ à $(C)$ (en des points d'abscisses non nulles), seule $T_\alpha$ passe par l'origine O.

6. On admettra que $T_\alpha$ est au-dessus de $(C)$ $sur$ $]0;+\infty[$.

a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation **f** (**x**) = **m,** suivant le réel **m** donné.

b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation **f** (**x**) = **mx** selon le réel **m** donné.

**PARTIE C**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$. Sans calculer explicitement $u_n$, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite $(u_n)$ est croissante.

2. Démontrer que la fonction $h$ définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de $de\, f$ sur $]0;+\infty[$

3. Calculer $u_n$. Interpréter graphiquement le résultat.

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EPREUVE 5 - TERM C&E

## EXERCICE 1

**A-**

1) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+;\ 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} \leq x^3$

2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+;\ 0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

**B-** On considère $f$ définie sur I = $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} \forall x \in ]0;+\infty[;\ f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Et $(C)$ sa courbe dans le repère orthonormée $(O;\vec{i};\vec{j})$

1)

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

c) *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ Puis interpréter graphiquement le résultat.

2)

a) Montrer que : $\forall x \in ]0;+\infty[;\ f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$ où $g(x) = x + \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$

b) Montrer que : $\forall x \in I,\ ;\ 0 \leq g'(x) \leq x^2$

c) En déduire que : $\forall x \in I,\ ;\ 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

d) Déterminer le sens de variation de f sur I.

3)

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Re *présentez* $(C)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité : 2cm

**C-**

1. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in ]0:1[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$

**2.** On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

**a)** Montrer que : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in ]0:1[$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

**b)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$

**c)** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

**d)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$

**D-** $\forall x \in I$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

**1.** Montrer que F est dérivable sur I et Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

**2.**

**a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$\forall x \in ]0;+\infty[;\ F(x) = 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$

**b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ puis en déduire que $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1$

**c)** Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(C)$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

**E-** On pose $\forall k \in \mathbb{N}, \Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k$

1.

**a)** Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

**b)** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

**2 a)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

**b)** En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

**c)** Montrer que la limite $l$ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EXERCICE 2

*Soit* $m \in \mathbb{C}^*$ et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

**I-** Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $\forall z \in \mathbb{C},\ (E_m) : z^2 + mj^2 z + m^2 j = 0$

**1-** Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

**2-**

a) Montrer que le discriminant de l'équation $(E_m)$ est : $\Delta_m = [m(1-j)]^2$

b) Déterminer $z_1$ *et* $z_2$ les deux solutions de l'équation $(E_m)$

**3-** Dans cette question on suppose que : $m = 1 + i$. Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est imaginaire pur.

**II-** Le plan complexes est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

Soit $\varphi$ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1 + j)z$

**1-** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\varphi$

**2-** On considère les points $A,\ B$ *et* $C$ *d'affixes respectives* $m,\ mj$ *et* $mj^2$ et on note $A'(a'), B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points $A,\ B$ *et* $C$ par l'application $\varphi$ et soient $P(p),\ Q(q)$ *et* $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA'],\ [CB']$ et $[AC']$

a) Montrer que : $a' = -mj^2,\ b' = -m$ et $c' = -mj$

b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

# EXERCICE 3

ABCD est un rectangle de centre O et I est le milieu du segment [AB] E est le centre de gravité du triangle ABC

**1**- Construire le point F le barycentre de (C,1) et (D,3)

**2**- Soit G le milieu du segment [ED]

Montrer que G est le barycentre de (A,1) ; (B,1) ; (C,1) et (D,3)

**3**- Montrer G appartient à la droite (IF)

**4**- Soit K le point défini par $4\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AD}$

a- Déterminer deux réels a et b pour que K soit le barycentre de (A,a) et (B,b)

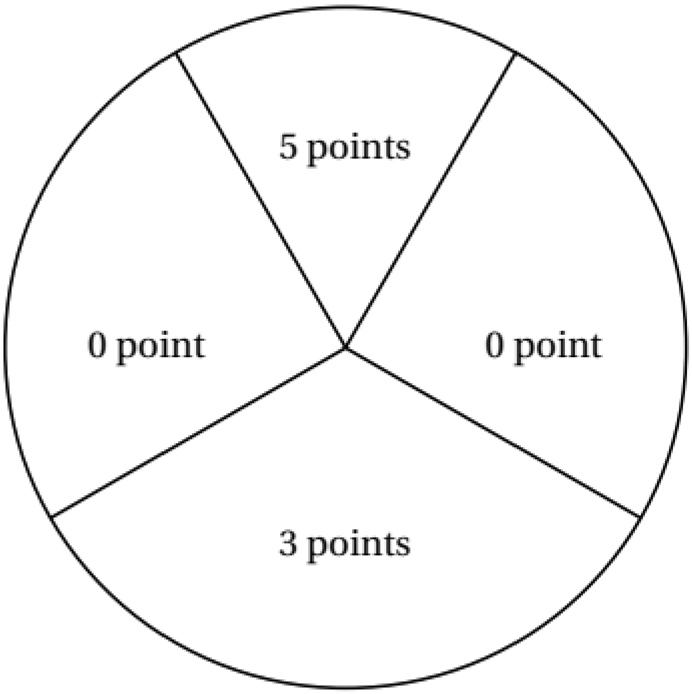
b- Montrer que le milieu du segment [BC] appartient à la droite (GK)

**5** – a) Montrer que pour tout point M du plan on a $4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{CA}$

b ) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MD}\|$

# EXERCICE 4

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.






DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

**1)** Le joueur lance une fléchette.

On note $p_0$ la probabilité d'obtenir 0 point.

On note $p_3$ la probabilité d'obtenir 3 points.

On note $p_5$ la probabilité d'obtenir 5 points.

On a donc : $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que : $p_5 = \frac{1}{2} p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3} p_0$.

Déterminer les valeurs de : $p_0, p_3$ *et* $p_5$

**2)** Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note $G_2$ l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

On note $G_3$ l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».

On note p(A) la probabilité d'un évènement A

a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$, on admettra dans la suite que : $p(G_3) = \frac{7}{36}$

b) En déduire p(P)

**3)** Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

**4)** Pour une partie, la mise est fixée à 2.000F, Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5.000F. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3.000F. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : −2, 1 et 3.
a. Donner la loi de probabilité de X.
b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EPREUVE 6 - TERM C&E

## EXERCICE 1

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

D'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

**1)** Placer sur une figure les points A, B, C et D.

**2)**

a) Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$

b) Calculer le complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$

c) Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?

**3)**

a) Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?

b) Calculer l'aire $\mathbf{S}_0$ du quadrilatère ABCD.

**4)**

a) Placer sur la figure précédente les points $A_1$, $B_1$, $C_1$ et $D_1$ tels que : $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1C}$ où les points $A_1$ et $B_1$ appartiennent à [DC], le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère ABCD.

b) Tracer le carré $A_1B_1C_1D_1$ et déterminer son aire $S_1$.

**5)**

a) On continue par le même procédé : un carré $A_nB_nC_nD_n$ étant déterminé, on considère les points $A_{n+1}$, $B_{n+1}$, $C_{n+1}$ et $D_{n+1}$ tels que $\overrightarrow{D_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = \overrightarrow{B_{n+1}C_n}$ Où les points $A_{n+1}$ et $B_{n+1}$ appartiennent à $[D_nC_n]$, le quadrilatère $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $A_nB_nC_nD_n$. Tracer le carré $A_2B_2C_2D_2$.

b) Soit sn l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$. Exprimer $S_{n+1}$ en fonction de $S_n$, puis de n. En déduire $S_n$, en fonction de n.

c) Déterminer, en fonction de n, l'aire $S_n$ de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, … et $A_nB_nC_nD_n$.

d) La suite $(S_n)$ est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.


DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EXERCICE 2

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

• « À quel niveau est votre bureau ? »

• « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

• 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau.

• Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

– N1 : « La personne va au premier niveau. »

– N2 : « La personne va au deuxième niveau. »

– N3 : « La personne va au troisième niveau. »

– E : « La personne emprunte l'escalier. »

**1)** Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

**2)**

a) Montrer que la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$

b) Montrer que les évènements $N_1$, $N_2$ et $N_3$ sont équiprobables.

c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2$^{e}$ niveau.

**3)** On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Déterminer, à $10^{-4}$ près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2$^{e}$ niveau.

c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2$^{e}$ niveau ?

**4)** Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population.



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2e niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

## EXERCICE 3

Le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u};\vec{v}\right)$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E_\theta\right)$ : $z^2-2z+\dfrac{1}{\cos^2\theta}=0$ tel que $\theta$ est un paramètre réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

**1)** .

a) Résoudre l'équation $\left(E_\theta\right)$

b) Soient $z_1$ et $z_2$ les deux solutions de l'équation $\left(E_\theta\right)$ tel que : $\operatorname{Im}\left(z_1\right)=\tan\theta$ Ecrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique .

**2)** Soient $M_1$ et $M_2$ les images respectives de $z_1$ et $z_2$ dans le plan complexe. Montrer que le triangle $OM_1M_2$ est isocèle en O.

**3)** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ : $z^{2n}-2z^n+\dfrac{1}{\cos^2\theta}=0$

Déterminer les solutions de l'équation (E) sous forme trigonométrique.

## EXERCICE 4

Une urne $U_1$ contient six boules portant les nombres : 0 ; 0; 1; 1; 1; 2 et une urne $U_2$ contient cinq boules portant les nombres: 1; 1; 1; 2; 2.

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne $U_1$ et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne $U_2$ , ensuite on tire une boule de l'urne $U_2$ et on note le nombre b qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

A: "la boule tirée de l'urne $U_1$ porte le nombre 1"



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

B: "le produit ab est égal à 2"

**1)** .

a) Calculer p(A); la probabilité de l'événement A.

b) Montrer que $p(B)=\frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

**2)** Calculer p(A/B); probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

**3)** Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

a) Montrer que : $p(X=0)=\frac{1}{3}$

b) Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

c) On considère les événements :

M : " le produit ab est pair non nul" et

N : "le produit ab est égal à 1 "

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EPREUVE 7 - TERM C&E

## EXERCICE 1

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Soit $(C_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ *unité* : $1cm$

**1)**

a) Vérifier que : $\forall x \in ]0;+\infty[$ : $f(x) = \dfrac{3x - 2 - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ et que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$)

c) Déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

d) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

**2)** Montrer que : $\forall x \in ]0;+\infty[$ : $f'(x) = \dfrac{2(1 - x + x\ln x)}{x^2}$

**3)** En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée $f'$ de $f$ sur $]0;+\infty[$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $f'(\beta)$ | ↘ | $0$ |

*(On donne $\beta \simeq 4{,}9$ )*

a) Prouver que $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de $f$

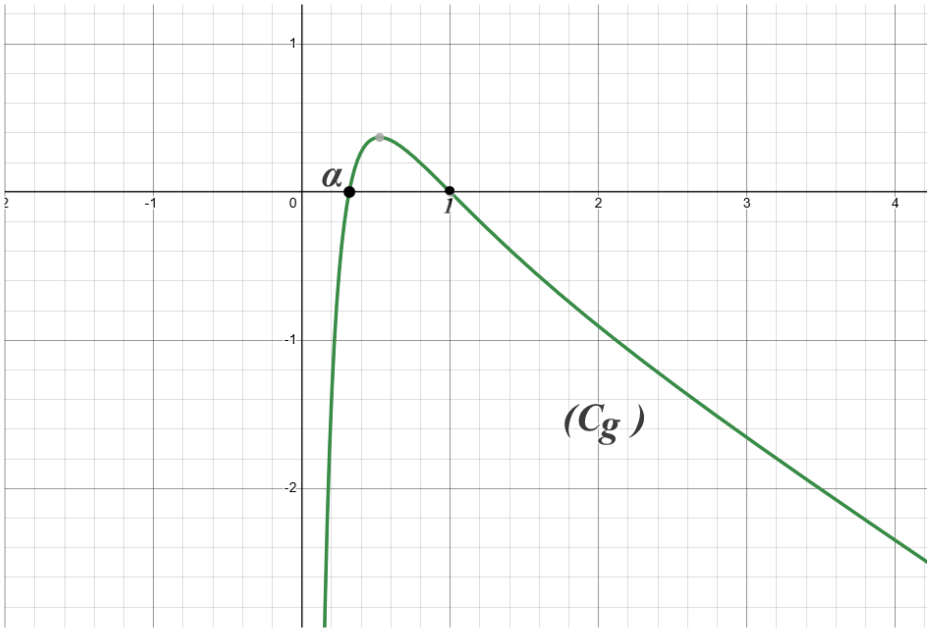
b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde $f''$ de la fonction $f$ sur $]0;+\infty[$

c) Déduire la concavité de la courbe $(C_f)$ en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion.



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

**4)** La courbe $(C_g)$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $g: \mapsto f(x)-x$ et qui s'annule en α et 1




Soit $(\Delta)$ la droite d'équation $y=x$

a) A partir de la courbe $(C_g)$ déterminer le signe de la fonction $g$ sur $]0;+\infty[$

b) Déduire que la droite $(\Delta)$ est en dessous de $(C_f)$ sur l'intervalle $[\alpha;1]$ et au-dessus de $(C_f)$ sur les intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$

**5)** Construire la courbe $(C_f)$ et la droite $(\Delta)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$(\text{On prend } \alpha \simeq 0{,}3\ ;\ \beta \simeq 4{,}9 \text{ et } f(\beta) \simeq 1{,}9)$

**6)**

a) Vérifier que la fonction $\mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $\mapsto 1-\ln x$ Sur $[\alpha;1]$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2\,dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

c) Déduire en fonction de $\alpha$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=1$

**7)** Soit la suite numérique $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 \in ]\alpha;1[ \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha < u_n < 1$

b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante. (On peut utiliser la question 4) b)

c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

# EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 + \dfrac{1}{e} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{e^{n+1}}\right) \end{cases}$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} - \dfrac{e^{-2x}}{2} < \ln\left(1 + e^{-x}\right) < e^{-x}$

2)

a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + e^{-k}\right)$

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e^2} + \ldots + \dfrac{1}{e^n}$ et $S_n = \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{1}{e^4} + \ldots + \dfrac{1}{e^{2n}}$ En utilisant les résultats de la question 1) et 2)b) montrer que : $R_n - \dfrac{1}{2}S_n < \ln(u_n) < R_n$

3)

a) Soit $\alpha$ un réel de $]1;+\infty[$ Calculer la somme : $T_n = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha^n}$ puis déterminer la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée et en déduire qu'elle est convergente. On note $l$ sa limite.

c) Montrer que : $e^{\frac{2e+1}{2(e^2-1)}} < l < e^{\frac{1}{e-1}}$

# EXERCICE 3

On considère la fonction numérique $x \mapsto e^x$ et soit $(\Gamma)$ sa courbe dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{0;1;\ldots;n\}$ On note $M_k$ un point de $(\Gamma)$ de coordonnées $\left(\dfrac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

1.a) Montrer que : $\forall k \in \{0;1;\ldots;n-1\};\ \exists c_k \in \left]\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \dfrac{1}{n}e^{c_k}$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com

b) Montrer que : $\forall k \in \{0;1;....;n-1\}$; $M_k M_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

$\left(M_k M_{k+1}\right.$ désigne la distance de $M_k$ à $\left.M_{k+1}\right)$

c) En déduire que : $\forall k \in \{0;1;....;n-1\}$; $\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2) Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$

a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$



DAVID DIN TRESOR : +225 07 47 96 08 13 / 05 04 70 54 80 / tresordin@gmail.com