

Année scolaire : 2022 /2023

Niveau : TS1

Etablissement : LEG de Diourbel

Cellule: Mathématiques

SERIE 9: PROBABILITES:

M.DIOP

Exercice 1: On lance simultanément 3 dés cubiques désignés par les lettres : A, B, C .

Les faces de chaque dé sont marquées 1,2,3,4,5,6.

Le résultat d'un lancer est noté (a, b, c) où a, b, c désignent les points marqués respectivement par les dés A, B, C .

1-) Combien y a-t-il d'éventualités ?

2-) Avec le résultat (a, b, c) d'un lancer, on écrit l'équation :

$$az^2 - bz + c = 0 \quad \text{avec } z \in \mathbb{C}.$$

Les trois dés étant parfaits, calculer la probabilité des événements E_1 et E_2 suivants :

E_1 : « $1 + i$ et $1 - i$ sont solutions de l'équation » ;

E_2 : « L'équation admet une solution double réelle ».

Exercice 2

1) a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$

b) Soient a, b et c des réels .

Montrer que la solution générale de l'équation $ay'' - by' + cy = 0$ est de la forme

$x \mapsto e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où c_1 et c_2 sont des constantes réelles si et seulement si a, b et c sont proportionnels à 1, 2 et 2 .

2) On lance trois fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le numéro de la face de dessus . Chaque numéro a la même probabilité d'apparaître . On appelle a, b et c les résultats des premier , second et troisième jet du dé .

Quelle est la probabilité pour que la solution générale de l'équation différentielle

$ay'' - by' + cy = 0$ soit de la forme $x \mapsto e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ où c_1 et c_2 sont des réelles ?

Exercice 3: Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration à un certain nombre de tirs directs . Les expériences précédentes conduisent à penser que :

* S'il a arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant $(n+1)^{\text{ième}}$ est 0,8.

* S'il a laissé passer le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6.

* La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

A_n est l'événement : « Le gardien arrête le $n^{\text{ième}}$ tir ». On a donc $P(A_1) = 0,7$.

Si E est un événement alors \bar{E} représente l'événement contraire.

1-) a-) Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $P(A_{n+1} / A_n)$ et $P(A_{n+1} / \bar{A}_n)$.

b-) Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n)$ en fonction de n .

c-) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $P(A_{n+1}) = 0,2P(A_n) + 0,6$

2-) On pose, pour $n \geq 1$, $p_n = P(A_n)$ et $U_n = p_n - 0,75$.

a-) Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

b-) En déduire l'expression de p_n en fonction de n .

c-) Montrer que p_n admet une limite que l'on calculera.

Exercice 4: Une maladie atteint 7% de la population. On dispose d'un test biologique pour la détecter. Ce test donne les résultats suivants :

- Chez les bien portants, 4% des réponses positives et 96% des réponses négatives.

- Chez les malades, 92% des réponses positives et 8% des réponses négatives.

On décide d'hospitaliser tous les individus positifs.

On pose M l'événement : « être malade »

T l'événement : « avoir le test positif »

a. Traduire les trois probabilités d'en haut.

b. Déterminer $P(T)$

On décide d'hospitaliser tous les individus positifs.

Déterminer le pourcentage de bien portants parmi les individus hospitalisés et le pourcentage d'individus malades parmi ceux qui ne sont pas hospitalisés.

Exercice 5: Une urne contient quatre jetons qui portent le nombre 1, deux qui portent le nombre e et six qui portent le nombre $\frac{1}{e}$.

On tire successivement avec remise deux jetons de l'urne et on note par x et y les nombres lus, respectivement sur le premier et le deuxième jeton tirés.

A cette expérience, on associe le point M d'affixe $z = \ln x + i \ln y$.

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

A : « M appartient à l'axe des abscisses »;

B : « M appartient à l'axe des ordonnées »;

C : « M appartient aux deux axes »;

D : « M n'appartient à aucun des axes »;

E : « l'angle (\overline{OM}, \vec{u}) est égal à $-\frac{\pi}{4}$ »;

F : « le point M appartient au cercle trigonométrique »;

2. Soit X la variable aléatoire réelle, qui à chaque tirage associe la distance OM .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Déterminer et représenter la fonction de répartition de X .

Exercice 6; Pour un examen dix examinateurs ont préparé chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans des enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidats ne seront plus disponibles pour le deuxième.

On note A_1 l'événement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et A_2 « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement A_1 est égale à $\frac{1}{19}$.

2. a. Calculer directement la probabilité conditionnelle $P(A_2 / A_1)$.

b. Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est $\frac{1}{323}$

3) a. Calculer $P(A_2 / \overline{A_1})$ b. En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$. Calculer $P(A_2)$

puis en déduire que $P(A_2 \cup A_1) = \frac{33}{323}$

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les deux valeurs 0,1 ou 2.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 7; Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz.

Le premier jour de l'année, il y'a 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz.

Si elle en propose un jour, il y'a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.

Si elle n'en propose pas un jour, il y'a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain. On appelle J_n l'évènement « la cantine propose du riz au $n^{\text{ième}}$ jour » et K_n l'évènement « la cantine n'en propose pas le $n^{\text{ième}}$ jour ».

Soit p_n la probabilité de l'évènement J_n .

1. Déterminer $p(J_2/J_1)$ et $p(J_2/K_1)$. En déduire p_2 .
2. Montrer que $p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{1}{2}$
 - a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
 - b. Calculer u_n puis p_n en fonction de n .
 - c. Un élève de l'établissement, fin mathématicien ne mange les jours pairs.

Montrer que à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{8}{15}$.

Exercice 8 : Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

Le joueur suivant les règles suivantes:

- Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points
- Si les deux dés donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.
- Dans les autres cas il gagne 15 points.

Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus par lui.

- a. Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X .
- b. Représentez graphiquement la fonction de répartition de X .

Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres.

On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.

- c. Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y ?
- d. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points?
- e. Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points?

Le joueur joue n parties de suite.

- f. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points?
- g. A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Exercice 9 : Un entraîneur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque

- 5 buts avec une probabilité de 0,2
- 4 buts avec une probabilité de 0,5
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un joueur au cours d'un entraînement.

- I. a. Calculez la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au buts lors d'un entraînement.
- b. Précisez les valeurs possibles pour X et établissez sa loi de probabilité. (on pourra s'aider d'un arbre).
- c. Calculez l'espérance de X .

II. L'entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X \geq 8$.
Montrez que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à 0,61 .

III. Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement.

On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours des 10 entraînements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.

Si au cours d'une séance d'entraînement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec.

Les résultats seront donnés par défaut, avec 3 chiffres après la virgule.

Calculez pour un joueur :

- a . la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
- b . la probabilité d'avoir exactement 6 succès .
- c . la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

III. Calculez le nombre minimale d'entraînement auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.

Exercice 10 : On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ tels que :

- le premier, S_1 , contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun des suivants, $S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1 ;
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2 , puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3 , puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
- etc.

Pour tout entier $n > 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $pE_1(E_2)$, $p\overline{E_1}(E_2)$.

En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases}$$

pour tout $n > 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités $p(E_n)$

a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,499996 \leq p(E_n) \leq 0,5$?

TRAVAUX DIRIGÉS DE MATHÉMATIQUES NUMÉRO 11

Niveau : Première Série : C Date : Samedi 25 Mai 2024

Exercice n° 1 :

(Isométries du plan).

Le plan est rapporté au repère orthonormée $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère la transformation qui au point

$$M(x, y) \text{ associe le point } M'(x'; y') \text{ définie par } f : \begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

- 1 Montrer que f est une isométrie du plan.
- 2 Quel est l'ensemble des points invariants par f .
- 3 Déterminer $f \circ f$.
- 4 Déterminer le vecteur \vec{v} et la droite (D) de vecteur directeur \vec{v} tels que $f = S \circ t = t \circ S$ ou t designe la translation de vecteur \vec{v} et S la réflexion d'axe (D) .

Exercice n° 2 :

(Calculs intégrales).

On donne :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx .$$

- 1 Justifier l'existence de I_n .
- 2 Sans calculer I_n , démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
- 3 (a) Pour tout entier naturel non nul, déterminer la dée de $\tan^{n+1}x$.
(b) Dédire, que pour tout nombre entier naturel n non nul on a : $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
(c) Montrer que : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
(d) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice n° 3 :

(Isométries du plan).

Soit $AFED$ un rectangle tel que $AE = 2AD$ et $(\vec{AE}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On designe par B et C les milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[DF]$ et par I et J les centres respectifs de $ABCD$ et $BEFC$. Les droites (AD) et (BF) se coupent en un point K .

- 1 Soit f l'isometrie du plan telle que : $f(A) = E$; $f(B) = B$ et $f(D) = F$.
(a) Déterminer les images des droites (AB) ; (BC) et (DC) par f .
(b) En déduire que $f(C) = C$.
(c) Caractériser alors l'isométrie f .
- 2 Soit g l'isometrie du plan telle que : $g(E) = C$; $g(F) = D$ et $g(C) = A$ et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
(a) Déterminer les images des points E , F et C par l'application $R \circ g$.

- (b) En déduire que g est la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
- (c) Caractériser l'application : $t = S_{(EF)} \circ S_{(BC)}$.
- (d) Déterminer les droites (Δ) et $(\Delta)'$ telles que $R = S_{(\Delta)} \circ S_{(BC)}$ et $t = S_{(BC)} \circ S_{(\Delta)'}$.
- (e) Caractériser alors l'application $R \circ t$.
- ③ Soit h l'isométrie du plan telles que : $h(A) = C$; $h(B) = F$ et $h(D) = B$.
- (a) Montrer que h ne fixe aucun point du plan.
- (b) En déduire que h est une symétrie glissante.
- (c) Montrer que la droite (IJ) est l'axe de h et \overrightarrow{IJ} est le vecteur de h .
- (d) Caractériser alors chacune des applications suivantes : $h \circ S_{(IJ)}$ et $t_{\overrightarrow{IJ}} \circ h$.

Exercice n° 4 :

(Calculs intégrales).

On donne les expressions suivantes :

$$A(x) = [|3x - |1 - x| + |5x - 3| - \frac{1}{2}|x - 7||]^3 ; B(x) = |1 - |3 - |x - 7||3 + 4x|x||| .$$

- ① Ecrire A et B sans barre de valeur absolue sur l'intervalle $[-1; 5]$.
- ② Calculer les intégrales : $H = \int_{-1}^5 A(x)dx$ et $S = \int_{-1}^5 B(x)dx$.

Exercice n° 5 :

(Dénombrement).

Résoudre dans \mathbb{N} les équations suivantes :

- ① $n! = (n - 1)! + 4(n - 1) + 6$.
- ② $A_n^3 = 72n$.
- ③ $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$.
- ④ $(C_n^2)^3 - 27(C_n^2) + 54 = 0$
- ⑤ $(A_n^3)^3 - 27(A_n^3) + 54 = 0$

Exercice n° 6 :

(Dénombrement).

Une urne contient 12 boules numérotés de 1 à 12. On tire 3 boules de cette urne. Calculer le nombre de tirages distincts dans les trois cas possibles suivants :

- ① Les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
- ② Les boules sont tirées l'une après l'autre sans le remettre dans l'urne.
- ③ Les trois boules sont tirées simultanément.

Exercice n° 7 :

(Dénombrement).

- ① A la fin de l'année scolaire, tous les élèves se serre la main. S'il y a 30 élèves, combien de poignées de mains sont échangées ?
- ② Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercice n° 8 :

(Dénombrement).

Une urne contient 7 Boules numérotées de 1 à 7. On tire 2 boules de l'urne simultanément.

- ① Quel est le nombre de tirages possibles ?
- ② Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?
- ③ Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

MATHÉMATIQUES
SÉRIE ARITHMÉTIQUE.

Exercice 1. 1. Démontrer que si a , b et c sont trois entiers relatifs tels que $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 3, alors la somme $a + b + c$ est aussi divisible par 3.

2. Démontrer que si $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 9, alors l'un au moins des trois nombres a , b et c est divisible par 3.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $a^3 + b^3 + c^3$ soit divisible par 9.

Exercice 2. 1. Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$ tels que $x^2 - y^2 = 1$.

2. $p \in \mathbb{N}$, premier, déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$ tels que $x^2 - y^2 = p$.

Exercice 3. 1. En utilisant l'algorithme d'Euclide à $a = 41$ et $b = 27$, trouver une solution particulière dans $\mathbb{N} * \mathbb{N}$ de l'équation $41x - 27y = 5$.

2. Résoudre dans $\mathbb{N} * \mathbb{N}$ l'équation $41x - 27y = 5$.

Exercice 4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N = aabb$ dans le système décimal.

1. Démontrer que N est un multiple de 11.

2. Trouver une relation entre a et b pour que N soit un multiple de 11^2 .

Exercice 5. Trouver les couples (a, b) de $\mathbb{N} * \mathbb{N}$ non nuls tels que :

1.
$$\begin{cases} ab = 1734 \\ \text{PGCD}(a; b) = 17 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} a + b = 1152 \\ \text{PGCD}(a; b) = 64 \end{cases}$$

Exercice 6. Démontrer que $\forall n \geq 1$ on a $5^{2n} - 2^{2n+3}$ est divisible par 7.

Exercice 7. $\forall n \succ 1$, on pose $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$.

1. (a) Démontrer que si $U_n \equiv 0[7]$ alors $3^n - 1 \equiv 0[7]$.

(b) Réciproquement, démontrer que si $3^n - 1 \equiv 0[7]$ alors $U_n \equiv 0[7]$.

2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles U_n est divisible par 7.

Exercice 8. 1. Quel peut être le reste de la division euclidienne par 7 d'un cube ?

2. Quel peut être le reste de la division euclidienne par 4 d'une somme de deux carrés ?

Exercice 9. 1. Déterminer $\{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^5 \equiv x[5]\}$.

2. Déterminer $\{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^2 - x + 1 \text{ soit divisible par } 7\}$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; trouver n pour que les nombres suivants soient premiers entre eux :

1. $3x + 1$ et $7n + 2$.

2. $5n + 5$ et $8n + 6$.

**Exercice 1** (4 points)

Une entreprise fabrique en grande quantité des sacs poubelle.

On admet que 3% des sacs de la production présentent un défaut.

On contrôle les sacs d'un lot.

Ce contrôle refuse 94 % des sacs avec défaut et accepte 92% des sacs sans défaut.

On prélève un sac au hasard dans le lot.

On considère les événements suivants

- D : « le sac a un défaut »,
 - A : « le sac est accepté à l'issue du contrôle ».
- ① Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $p(D)$, $p_D(\bar{A})$, $p_{\bar{D}}(A)$.
 - ②
 - a Déterminer $p(A/D)$.
 - b Calculer $p(A \cap D)$ et $p(A \cap \bar{D})$.
 - ③ Déduire de ce qui précède $p(A)$.
 - ④ Calculer la probabilité qu'un sac soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient 5 boules rouges numérotées 1, 1, 1, 0, 0 et 4 boules vertes numérotées 1, 1, 1, 0.

L'épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

- ① Calculer la probabilité des événements :
 - A « obtenir 3 boules de la même couleur »,
 - B « obtenir 3 boules portent le même numéro »
- ② A et B sont-ils indépendants ?
- ③ Calculer la probabilité d'avoir 3 boules de la même couleur ou trois boules portant le même numéro.
- ④ Calculer la probabilité d'avoir au plus une boule verte.

Exercice 3 (5 points)

Un gardien de but doit faire face à un certain nombre de tir direct (penalties).

Les expériences précédentes montrent que :



- S'il a arrêté le même tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (le $(n+1)^{\text{ième}}$) est $\frac{4}{5}$.
- S'il a laissé passer le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (le $(n+1)^{\text{ième}}$) est $\frac{3}{5}$.
- La probabilité qu'il arrête le premier tir est $\frac{7}{10}$.

Soit A_n l'événement « **le gardien arrête le $n^{\text{ième}}$ tir** » on a donc $p(A_1) = \frac{7}{10}$.

- Calculer $p(A_2 | A_1)$ et $P(A_2 | \overline{A_1})$ en déduire $p(A_2)$.
 - Calculer $p(A_1 | A_2)$.
- Calculer pour $n \geq 1$, $P(A_{n+1} | A_n)$ et $p(A_{n+1} | \overline{A_n})$.
 - Calculer $p(A_{n+1})$ à l'aide de $p(A_n)$.
 - En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ avec $p(A_{n+1}) = p_{n+1}$ et $p(A_n) = p_n$.
- Soit $q_n = p_n - \frac{3}{4}$.

 - Montrer que (q_n) est une suite géométrique et en déduire q_n puis p_n en fonction de n .
 - calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 4 (5 points)

Une enquête a montré que :

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire (c'est-à-dire le code) 75% des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve,
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80% des cas,
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70% des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (on rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve).

On note

- T l'événement « le candidat a travaillé très sérieusement »
- R l'événement « le candidat a réussi le code ».

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième.

- Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.



- 2 a Calculer la probabilité de l'événement « le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code ».
- b Montrer que la probabilité $p(R)$ qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à 0,675.
- 3 Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?
- 4 A la sortie de l'épreuve, on interroge au hasard et de façon indépendante 3 candidats (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise). Calculer la probabilité p_3 d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve.
- 5 On interroge désormais au hasard et de façon indépendante n candidats.
Quelle est la probabilité p_n d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve ?

Exercice 5 (5 points)

On dispose d'un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une boîte contenant trois jetons blancs et deux jetons rouges, tous indiscernables au toucher.

- 1 On lance le dé une seule fois et on observe le numéro de la face supérieure de ce dé.
Soit les événements :
- E : « obtenir un numéro supérieur ou égal à 5 »
 - \bar{E} : l'événement contraire de E .
- Déterminer la probabilité de chacun des événements E et \bar{E} .
- 2 On lance le dé une seule fois.
- Si l'événement E est réalisé, alors on tire simultanément et au hasard 2 jetons de la boîte.
 - Si l'événement E n'est pas réalisé, alors on tire simultanément et au hasard 3 jetons de la boîte.
- Soit l'événement A : « obtenir un seul jeton blanc ».
- On note : $p(A/E)$ la probabilité de l'événement : A sachant que l'événement E est réalisé.
 $p(A/\bar{E})$ la probabilité de l'événement : A sachant que l'événement \bar{E} est réalisé.
- a Vérifier que $p(A/E) = \frac{3}{5}$ et que $p(A/\bar{E}) = \frac{3}{10}$.
- b En déduire la probabilité de l'événement A .
- c Soit D l'événement « obtenir 2 jetons rouges ».
En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité de D .

**Exercice 6**

(4 points)

Une caisse d'assurance maladie propose à ses affiliés une modalité d'hospitalisation m .

Les employés d'une entreprise sont tous affiliés à cette caisse d'assurance et on sait que :

- Le $\frac{1}{3}$ des employés choisissent la modalité m .
- Parmi les employés qui ont choisi la modalité m , 80% sont atteints d'une maladie chronique.
- Parmi les employés qui n'ont pas choisi la modalité m , 75% sont atteints d'une maladie chronique.

On choisit un employé au hasard et on considère les événements suivants :

M : « l'employé choisit la modalité m »

C : « l'employé est atteint d'une maladie chronique »

- a Déterminer les probabilités suivantes : $p(M)$, $p(C/M)$ et $p(C/\bar{M})$.
 - b Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
- a Calculer la probabilité que cet employé ait choisit la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.
 - b Calculer la probabilité que cet employé n'ait pas choisi la modalité m et soit atteint d'une maladie chronique.
 - c En déduire $p(C)$.
- 3 Soit l'événement E : « l'employé choisit la modalité m , sachant qu'il est atteint d'une maladie chronique. »
Montrer que $p(E) = \frac{8}{23}$.

Exercice 7

(5 points)

Une urne contient trois dés équilibrés, deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6 et le troisième est rouge possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard de l'urne et on le lance. (les résultats seront données sous forme de fractions).

On considère les événements suivants :

V « le dé tiré est vert ».

R « le dé tiré est rouge ».

S_1 « on obtient 6 au lancer du dé ».

- 1 On tire au hasard un dé de l'urne et on effectue un lancer de celui-ci.



- a Donner l'arbre qui traduit la situation.
- b Calculer la probabilité $p(S_1)$.
- c Sachant qu'on a obtenu le numéro 6 sur le dé lancé, calculer la probabilité qu'il soit rouge.
- 2 On tire au hasard un dé de l'urne. Pour tout entier naturel n non nul, on lance n fois de suite ce dé. On désigne par S_n l'évènement « on obtient 6 à chacun des n lancers ».
- a Exprimer $p(S_n)$ en fonction de n .
- b Pour tout entier naturel non nul n , on pose p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun de n lancers.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$p_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$
- c Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $p_n \geq 0,999$ pour tout $n_0 \geq n$.

Exercice 8 (4 points)

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux de ces pièces sont normales : elles possèdent une face « FACE » et une face « PILE ». La troisième est truquée : elle possède deux faces « FACE ».

On extrait une pièce de l'urne au hasard, puis on effectue des lancers successifs et indépendants de cette pièce. On considère les événements suivants :

A : « la pièce extraite est normale », \bar{A} : « la pièce extraite est truquée »

P : « on obtient PILE au premier lancer », F_n : « on obtient FACE aux n premiers lancers ».

- 1 a Calculer $p(P \cap A)$ et $p(P \cap \bar{A})$.
- b En déduire $p(P)$.
- 2 Montrer que $p(F_n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + 1 \right)$.
- 3 a Sachant qu'on a obtenu FACE n fois au cours des n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir extrait la pièce truquée?
- b Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 9 (5 points)

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux événements suivants : A : « On obtient des boules des deux couleurs » ; B : « On obtient au plus une blanche ».

- 1 a Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».



- b) Calculer la probabilité de l'événement : « On obtient exactement une boule blanche ».
- c) En déduire que les probabilités $p(A \cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

- 2) Montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si, et seulement si, $2^{n-1} = n + 1$.
- 3) Soit (u_n) la suite définie, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux, par $u_n = 2^{n-1} - (n - 1)$.
Calculer u_2 , u_3 , u_4 . Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
- 4) En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants.

Exercice 10 (5 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

- ✓ Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .
- ✓ Étape n ($n \geq 2$) :
- ♣ Si la boule tirée à l'étape $(n - 1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .
 - ♣ Si la boule tirée à l'étape $(n - 1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2 , on note sa couleur et on la remet dans U_2 .

On note A l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.

On a donc $p_1 = 1$.

- 1) Calculer p_2 .
- 2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- 3) Calculer p_3 .
- 4) a) Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ .



- d Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur ℓ .

Exercice 11 (5 points)

Une classe comprend 36 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans.

Il y a 22 garçons dont 3 garçons âgés de 18 ans.

50% des élèves sont des garçons âgés de 17 ans et 25% des élèves sont âgés de 18 ans.

50% des filles sont âgées de 17 ans.

- 1 a Reproduire et compléter le tableau d'effectifs suivants :

âges	Garçons	Filles	Total
16 ans			
17 ans			
18 ans			
Total			36

- b en utilisant le tableau ci-dessus, traduire les données l'aide d'un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les résultats seront mis sous forme de fractions irréductibles.

- 2 Lors d'un cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- a A : « l'élève interrogé a 16 ans » ;
- b B : « l'élève interrogé est un garçon ».
- 3 a Définir sous forme d'une phrase les événements : $C = A \cap B$ et $D = A \cup B$.
- b Calculer la probabilité de l'événement C .
- c À l'aide des probabilités de A , B et C , calculer la probabilité de l'événement D .
- 4 Le professeur décide d'interroger au hasard un garçon.
- Quelle est la probabilité de l'événement E : « l'élève interrogé a 17 ans » ?

IA : Diourbel

Année scolaire : 2023-2024

IEF : Bambey

Classe : TS1

Lycée de Ndongol

Professeur: Dr FALL

Série : Equations différentielles

Exercice 1 :

- Soient les équations différentielles $(E_0): y' + y = 0$; $(E): y' + y = e^{-x} \cos x$ et la fonction h définie par $h(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$.
 - Trouver les réels a et b pour que h soit solution de (E) .
 - Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-h$ est solution de (E_0) .
 - Résoudre (E_0) .
 - Déduire des questions précédentes les solutions de (E) .
 - Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$.
- Soit L la fonction définie par $L(x) = e^{-x} \sin x$
 - Exprimer $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
 - Etudier les variations de L sur $[0; 2\pi]$.
 - Calculer $\int_0^{2\pi} L(x) dx$.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$.

- Résoudre (E) dans \mathbb{R} .
- Déterminer la solution g de (E) dont la courbe passe par le point $A(\frac{0}{1})$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 3$.
- Déterminer une primitive de g à l'aide de (E) .

Exercice 3 : (Extrait bac 2010)

Soient u et v des fonctions dérivables sur \mathbb{R} et a un réel non nul tels que $\begin{cases} u' = v \\ v' = au \end{cases}$

- Montrer que u et v vérifient l'équation différentielle $y'' - a y' = 0$.
- Résoudre l'équation $y'' - a y' = 0$ selon les valeurs de a .
- On suppose que $a = 1$. Déterminer u et v sachant que $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$.

Exercice 4 : (Extrait bac 2008)

Soit l'équation différentielle $(E_m) : m y'' + 2y' + 2y = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de m , l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} , solutions de l'équation différentielle (E_m) .
2. Déterminer la solution de (E_1) dont la courbe passe par $A\left(\frac{0}{1}\right)$ et admet en A une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 5 : (Bac 2000)

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ **(1)**
2. Etant donnée des fonctions f et g deux fois dérivables sur \mathbb{R}^* telles que $f(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$. Exprimer $f''(x)$ en fonction de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x .
3. On considère l'équation différentielle $y'' = -\frac{1}{x^4}y$ **(2)**
 - a. Démontrer que la fonction g deux fois dérivables sur \mathbb{R}^* est solution de **(2)** si et seulement si la fonction f définie par $f(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$ est solution de **(1)**.
 - b. En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
 - c. Soit g une solution de **(2)** définie sur $]0; +\infty[$. Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$.

Exercice 6: (Bac 95)

Le but de cet exercice est de calculer $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin(2x) + e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx$ à l'aide d'une équation différentielle.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + 2y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle $(E'): y'' + 2y' + 2y = 4 \cos(2x) - 2 \sin(2x)$.
 - a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = a \cos(2x) - b \sin(2x)$ soit solution de (E') .
 - b. Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si $f-g$ est solution de (E) .
 - c. En déduire la forme générale des solutions de (E') .
 - d. Vérifier que la solution h de (E') telle que $h(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $h'(0) = 2$ est

$$h(x) = \sin(2x) + e^{-x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

- e. Utiliser (E') pour trouver une primitive H de h puis en déduire la valeur de I.

Ce n'est parce que tu as une posture présidentielle que tu dois toujours imposer des duels. Avoir un poste ministériel ne fera pas de toi un immortel. Pinailler sur l'immensité du ciel est trop cruel. Si tu n'as jamais lu de manuel alors tu seras souvent considéré comme une passerelle. Mademoiselle, tu as le droit de te faire belle comme une gazelle mais en restant toujours naturelle. L'être providentiel c'est celui qui fait l'essentiel et qui vit dans le réel. Si tu ne penses qu'à satisfaire tes désirs charnels alors tu ne seras jamais un prix Nobel. Si nous conjugons nos efforts mutuels alors nous verrons vite le bout du tunnel et nous éviterons les querelles. Ce n'est pas parce qu'il est sous sa tutelle que tu dois le considérer comme un bordel. Ta situation actuelle n'est pas toujours le bon référentiel qui révèle tes qualités éventuelles. Ne dis pas la vérité pêle-mêle ni de façon partielle. Certes, la vérité n'est pas comme du miel et elle est parfois plus salée que le sel mais l'accepter est toujours une source de bienfaits qui en vaut toujours la chandelle. Pour avoir une âme pure, il faut accepter certains sévices corporels.

GROUPE CAUCHY - SCHWARZ
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 EFFORT-TRAVAIL-SUCCÈS
 Email : pnzouekeu@gmail.com



FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS N°1
 ARITHMÉTIQUE
 TERMINALES SCIENTIFIQUES
 CONTACT WHATSAPP : 676764402

RÉDIGÉE PAR : NZOUEKEU MBITKEU PATRICE
 INGÉNIEUR DU GÉNIE CIVIL
 PLEG MATHS



Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Vocabulaire :

a est le dividende; b le diviseur; q le quotient et r le reste.

Exercice 1. ()

Soit $n > 2$. On pose $a = n^5 - n$. Montrer que $n^3 - n$ divise a puis que 30 divise a .

Exercice 2. ()

Soit n un entier relatif, démontrer que $7n + 18$ et $10n^2 + 51n + 65$ sont premiers entre eux avec trois méthodes.

Exercice 3. ()

Montrer que tout nombre premier est nécessairement de la forme $6k + 1$ ou $6k - 1$, avec $k \geq 1$.

Exercice 4. ()

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $x^2 \equiv 7 \pmod{9}$.

Exercice 5. ()

Montrer que :

1. $11/2^{123} + 3^{121}$
2. $7/2^{n+2} + 3^{2n+1}$

Exercice 6. ()

Résoudre dans \mathbb{Z} le système :
$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{8} \\ x \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$

Exercice 7. ()

Résoudre dans \mathbb{Z} le système :
$$\begin{cases} 15x \equiv 9 \pmod{12} \\ 4x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

Exercice 8. ()

Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $25x + 15y = 35$

Exercice 9. ()

Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (F) : $x^2 - 5y^2 = 3$



**Exercice 10.** ()

1. Donner, en le justifiant, le nombre de diviseurs positifs de 100^{100} .
2. Déterminer le reste de la division de 101^{101} par 3, et par 5, en déduire le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 15.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et p un nombre premier supérieur ou égal à 3. Montrer que si $0 < n < p$ alors p divise l'un des entiers $n^{\frac{p-1}{2}} - 1$, $n^{\frac{p-1}{2}} + 1$.

Exercice 11. ()

On admet que 250507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a; b)$ vérifiant la relation

$$(E) : a^2 - 250507 = b^2$$

1. Soit X un entier naturel.
 - (a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
 - (b) Sachant que $a^2 - 250507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .
 - (c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. (a) Justifier que si le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geq 501$.
 - (b) Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501; b)$.
3. On suppose que le couple $(a; b)$ vérifie la relation (E).
 - (a) Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
 - (b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Exercice 12. ()

1. Écrire une identité de Bézout entre 11 et 13.
2. Résoudre dans \mathbb{Z} le système :
$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod{13} \end{cases}$$

Exercice 13. ()

1. Montrer que : 4^n est congru à $1 + 3n$ modulo 9.
2. En déduire que $2^{2n} + 15n - 1$ est toujours divisible par 9.

Exercice 14. ()

Exprimer en fonction de n le PGCD de $2n - 1$ et $9n + 4$.

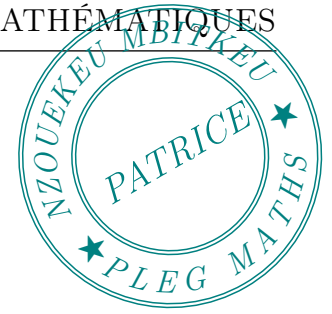
Exercice 15. ()

1. Déterminer les restes possibles de la division euclidienne du carré d'un nombre impair par 8 avec deux méthodes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. En déduire que l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

n'a pas de solution pour x , y et z impairs.



**Exercice 16.** ()

1. Vérifier que 101 est un nombre premier.
2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $77x + 100y = 1$
 - (a) Vérifier que le couple $(13, -10)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 - (b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
3. On considère dans \mathbb{N} l'équation (F) : $x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$. Soit x une solution de (F).
 - (a) Montrer que x et 101 sont premiers entre eux puis que $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$.
 - (b) Montrer que $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$
4. Soit x un entier naturel.
Montrer que si $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$ alors x est une solution de (F).
5. En déduire que l'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des entiers naturels de la forme $101k + 38$, où $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. ()

On pose : $A_n = 2^n + p$; $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et on note d_n le P.G.C.D de A_n et A_{n+1} .

1. Montrer que d_n divise 2^n .
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p .
3. En déduire le P.G.C.D de $2^{2022} + 2021$ et $2^{2021} + 2021$
4. Pour $p = 1$.
 - (a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$ et $m > 2$ premier, $a^m + 1 \equiv 0 \pmod{a+1}$
 - (b) En déduire que, si A_n est premier, alors n est de la forme $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. ()

On se propose de déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ solutions de l'équation (E) : $2^m - 3^n = 1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$
 - (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
 - (b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8.
2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un couple de solution, montrer que $m \leq 2$.
3. En déduire tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d'entier naturels solutions de (E)

Exercice 19. ()

On considère un entier $n \geq 3$.

1. Montrer que, quel que soit l'entier x , les carrés des nombres x et $n - x$ sont congrus modulo n .
2. Dresser la table des carrés modulo 7.
3. Montrer que l'équation $x^2 - 6xy + 2y^2 = 7003$ n'a pas de solutions (x, y) entière.
(Exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).

«CE QUI EST AFFIRMÉ SANS PREUVE PEUT ÊTRE NIÉ SANS PREUVE.» EUCLIDE D'ALEXANDRIE



IA : Diourbel

Année scolaire : 2023-2024

IEF : Bambey

Classe : TS1

Lycée de Ndongol

Professeur : Dr FALL

Série: Nombres complexes

Exercice 1 : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants (on précisera la partie réelle et la partie imaginaire)

$$z = \frac{3-2i}{1+2i}; z = (2+i)^6; z = (1+\sqrt{3}i)^{1000}; z' = \frac{z+1}{z-2i} \text{ où } z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}; z = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}};$$

$$z = \frac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}; \theta \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 :

1. Donner une écriture trigonométrique et une écriture exponentielle de chacun des nombres complexes suivants : $z = (-3 + i\sqrt{3})^{10}$; $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$; $z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}i)(-1 - i)$;

$$z = -\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}; z = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}; z = \frac{3e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

2. $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

a. Calculer z^2

b. En déduire le module et un argument de z .

3. On donne $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

a. Calculer j^2 . En déduire $1 + j + j^2$; j^3 et $\frac{1}{j}$.

b. Montrer que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, 2(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

Exercice 3 :

1. Linéariser les expressions suivantes : $\cos^5 x$; $\sin^4 x$; $\cos^3 x \sin^3 x$ et $\sin^2(x)\cos^3(x)$

2. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.

3. Exprimer $\cos(2x)\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

4. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

5. Donner une expression simple de $S = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S' = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$

6. Résoudre dans \mathbb{R}

a. $\cos x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0$

b. $\cos(5x) + 2 \cos(3x) + \cos x = 0$

Exercice 4 :

1. Résoudre dans \mathbb{C} les équations : $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$; $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$
 $z^2 - 2(1 + 2 \cos \theta)z + 5 + 4 \cos \theta = 0$; $\theta \in \mathbb{R}$

2. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$

a. Démontrer que P admet une racine réelle α

b. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$

3. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

4. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne $A(-1 + i)$; $B(-1 - i)$; $C(2i)$ et $D(2 - 2i)$.

a. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$. En déduire la nature du triangle ACD .

b. Démontrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5. Soit (E): $z^4 - (2 - i)z^3 - 3i z^2 + (4 - i)z + 1 + 3i = 0$

a. Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .

b. Résoudre (E).

c. Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 , solutions de (E). Montrer que A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 5 :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$. Déterminer la valeur de $z^n + \frac{1}{z^n}$; $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$ et $u \neq 1$. Montrer que $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$.

3. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}^2, |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ puis interpréter graphiquement l'égalité et en déduire une propriété du parallélogramme.

5. Soient $z, z', u \in \mathbb{C}$: $u^2 = zz'$. Montrer que $|z| + |z'| = \left| \frac{z+z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} - u \right|$

Exercice 6 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$ d'image respective A et B.

1. Démontrer que O, A et B sont alignés si et seulement si $a\bar{b} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour que $\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}$ si et seulement si O, A et B sont alignés ou $OA = OB$.
3. On suppose que O, A et B ne sont pas alignés et que $|a| = |b| = 1$. Montrer que $\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}_*$
4. Applications : Soit M_1, M_2 les points d'affixe respective z_1 et z_2 tels que O, M_1, M_2 ne sont pas alignés.
 - a. Calculer en fonction de z_1 et z_2 , l'affixe Z de $G = \text{bar}\{(M_1, |z_1|); (M_2, |z_2|)\}$.
 - b. Montrer que $\frac{Z}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.
 - c. En déduire que \vec{OG} est un vecteur directeur de la bissectrice de $M_1 \hat{O} M_2$.

Exercice 7 : On définit $Z = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$. On pose $z = x + yi$ et $Z = X + Yi$; $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer l'ensemble (G) des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 8 : Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Soient les nombres complexes z et U tels que $U = \frac{z+1-i}{z+3}$. Déterminer et construire l'ensemble :
 - a. (E_1) des points M tels que $|U| = 1$.
 - b. (E_2) des points M tels que $|U| = 2$.
 - c. (E_3) des points M tels que U soit un réel négatif.
 - d. (E_4) des points M tels que U soit imaginaire pur.
2. Déterminer et représenter les ensembles de points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.
 - a. $|z + \bar{z} - 1| = 4$
 - b. $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$

- c. $|z + 5 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$
- d. $\arg(3i - z) \equiv 0[2\pi]$
- e. $\arg(z^2 - 4) \equiv \arg(z + 2)[2\pi]$
- f. $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$
- g. $\arg\left(\frac{1}{z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Exercice 9 : $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

1. Calculer z_0^4 .
2. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

Exercice 10

1. Résoudre dans \mathbb{C} , (E): $z^5 = 1$ et représenter les images des solutions de (E).
2. Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$
3. Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
4. Soit (E'): $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$.
 - a. Démontrer que si z_0 est solution de (E') alors $\left|\frac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1$
 - b. En déduire que les solutions de (E') sont des imaginaires pures.
 - c. Résoudre (E').

Exercice 11 :

1. Calculer la somme $S(z) = 1 + z^2 + z^4 \dots + z^{2n-2}$; $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$
2. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^{2n} - 1 = 0$; $n \geq 1$
3. Démontrer que $S(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z^2 - 2z \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1)$
4. En considérant $S(1)$, démontrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$
5. En considérant $S(i)$, calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 12 :

1. $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans \mathbb{C} : $S_{(\alpha,1)}: z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$.
2. En déduire la forme trigonométrique des solutions de $S_{(\alpha,n)}: z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1 = 0; n \in \mathbb{N}^*$
3. On pose $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n \cos \alpha + 1; n \in \mathbb{N}$

a. Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$, on a :
$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[z^2 - 2z \cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + 1 \right]$$

b. Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{n} \right)}{4^{n-1}}.$$

4. Soit $\alpha \in]0; \pi[$ et n un entier naturel ≥ 2 . On pose
$$H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \right)$$

a. Montrer qu'on a
$$2^{n-1} H_n(\alpha) = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2n} \right)}.$$

b. Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ quand α tend vers 0.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$,
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Vouloir réussir sans souffrir, c'est vouloir dormir sans fermer les yeux. La réussite n'est jamais le fruit du hasard, c'est une affaire de décision, de désir et de persévérance. Les gens qui réussissent sont ceux qui ont une obsession pour la réussite, qui font des efforts réfléchis et continus et non ceux qui ont juste besoin de réussir. Le premier pas pour aller de l'avant, c'est être droit dans ses bottes et de ne pas suivre nécessairement tout ce qui est en vogue.

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Exercice:1

L'espace orienté \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une isométrie. (c'est à dire que f conserve la distance.)

b) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées $(0, 0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

2. Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A .

a) Montrer que le point I de coordonnées $(-1, 0, 0)$ appartient à P .

b) Prouver que $I' = f(I)$ appartient à P .

3. Déterminer la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques.

4. Déterminer l'ensemble des points M de \mathcal{E} d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient :

a) au plan Q d'équation cartésienne : $2x + y - z = 0$;

b) à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est : $x = y = z$.

Exercice 2

Dans un plan \mathcal{P} de l'espace, on considère un cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$. Soit (Δ) la droite passant par A et orthogonale à \mathcal{P} et S un point de (Δ) distinct de A . On note I le projeté orthogonal de A sur (BS) .

Pour tout point M du cercle \mathcal{C} on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS) .

1. Placer les données précédentes sur une figure, (Δ) étant tracée verticalement.

2. Prouver que H appartient à la sphère Σ de diamètre $[AS]$.

3. Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B .

Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS) . En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS) .

4. Montrer que H appartient au plan Π passant par I et orthogonal à la droite (BS) .

5. Déterminer l'intersection Γ de la sphère Σ et du plan Π .

Exercice

Une urne contient 9 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge. Il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne et on note leurs couleurs. Soit G l'événement : « Obtenir deux boules de même couleur. »

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n, b, r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G .

Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{72} [n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$.

2. Le but de cette question est de trouver les valeurs de n, b et r pour lesquelles la probabilité $g(n, b, r)$ est minimale.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(9, 0, 0)$, $(0, 9, 0)$ et $(0, 0, 9)$. Soit M le point de coordonnées (n, b, r) .

- Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est : $x + y + z - 9 = 0$.
- En déduire que M est un point du plan (NBR) .
- Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{72}(OM^2 - 9)$.
- Déterminer les coordonnées de H , projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR) .
- En déduire les valeurs de n, b et r pour lesquelles la probabilité $g(n, b, r)$ est minimale. Justifier alors que cette probabilité minimale est égale à $\frac{1}{4}$.

3. On suppose que le nombre de boules de chaque couleur a été choisi par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit $\frac{1}{4}$.

Un joueur mise 1000 francs puis tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne. S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k francs. Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

- Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de k .
- Déterminer la valeur de k pour que le jeu soit équitable c'est à dire pour que $E(X) = 0$.

Exercice 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(0, 0, 3\sqrt{2}), \quad B(4, 0, -\sqrt{2}), \quad C(-2, -2\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad D(-2, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2}).$$

- Montrer que ABC est un triangle équilatéral. 0.5 pt
 - Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires puis démontrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier. 0.5 + 0.75 pt
 - Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. 0.5 pt
- On note P, Q, R et S les milieux respectifs des arêtes $[AC], [AD], [BD]$ et $[BC]$.
 - Déterminer la nature exacte du quadrilatère $PQRS$. 0.75 pt
 - Calculer l'aire du quadrilatère $PQRS$. 0.25 pt
- Le tétraèdre qui est parfaitement équilibré, a une face numérotée 0, une face numérotée 1 et deux faces numérotées 2. On le lance deux fois de suite et on lit à chaque fois les chiffres apparus sur les trois faces visibles.
Calculer la probabilité des événements suivants :

E : « le produit des six chiffres apparus est non nul. »	0.5 pt
F : « la somme des six chiffres apparus est supérieure ou égale à 8. »	0.75 pt
- On note X la variable aléatoire qui à chaque série de deux lancers associe la somme des chiffres apparus sur les faces visibles.

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

- On considère le plan \mathcal{P} passant par le point $B(1; -2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et le plan \mathcal{R}

d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

- Démontrer que \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires.
- Démontrer que l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{R} est la droite Δ passant par le point $C(-1; 4; -1)$ et de

vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- c. Soit $A(5; -2; -1)$. Calculer la distance de A au plan \mathcal{P} puis la distance de A au plan \mathcal{R} .
- d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ .
- a. Soit, pour tout nombre réel t , le point M_t de coordonnées $(1 + 2t; 3 - t; t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM . On note $\phi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction ϕ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- b. Etudier les variations de la fonction ϕ sur \mathbb{R} ; préciser son minimum.
- c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

Exercice 6

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne trois points :

$$A(1; 2; -1) ; B(-3; -2; 3) \text{ et } C(0; -2; -3)$$

- 1)
 - a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- 2) Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$.
Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.
- 3) On appelle G le barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; -1)$ et $(C; 2)$.
 - a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2; 0; -5)$.
 - b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P) .
 - c. Déterminer les coordonnées du point H , intersection du plan (P) avec la droite (CG) .
- 4) Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
- 5) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S) .

Exercice 7

$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté ci-dessous.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overline{AB}; \overline{AD}; \overline{AE})$.

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

- 1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
- 2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE .
 - a. Calculer les coordonnées de I .
 - b. Démontrer que $\overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
- 3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE) .

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre réel k , on définit deux points M_k et N_k , ainsi qu'un plan P_k de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overline{AM_k} = k\overline{AG}$;
- P_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan P_k et de la droite (BC) .

- 1) Identifier $P_{\frac{1}{3}}$; $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$
- 2) Calcul des coordonnées de N_k .
 - a. Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $(A; \overline{AB}; \overline{AD}; \overline{AE})$.
 - b. Déterminer une équation du plan P_k dans ce repère.
 - c. En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1; 3k - 1; 0)$.
- 3) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
- 4) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?
- 5) Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan P_1

RÉFLEXION DE LA SEMAINE

Exercice n° 1 :

On considère dans un plan orienté un triangle ABC rectangle en A tel que $(\widehat{BC}, \widehat{BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et (Δ) la tangente en A au cercle circonscrit (\mathcal{C}) au triangle ABC . La parallèle à (AB) menée de (\mathcal{C}) coupe (Δ) en T .

- ❶ Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés $(\widehat{CA}, \widehat{CB})$, $(\widehat{AC}, \widehat{AT})$, $(\widehat{AB}, \widehat{AT})$, $(\widehat{CA}, \widehat{CT})$.
- ❷ Soit I le milieu du segment $[AT]$.
 - (a) Montrer que le triangle AIC est équilatéral.
 - (b) Montrer que la droite (IC) est tangente en C au cercle (\mathcal{C}) .
- ❸ Soit D un point du segment $[AB]$ distinct de A et B . La parallèle à (Δ) menée de D coupe $[AC]$ en E .
 - (a) Montrer que $(\widehat{BD}, \widehat{DE}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.
 - (b) Tracer le cercle (\mathcal{C}') circonscrit au triangle BCE .
 - (c) Soit E_1 l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{MB}, \widehat{ME}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.
Montrer que $C \in E_1$. Déterminer alors l'ensemble E_1 .
 - (d) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $(\widehat{MB}, \widehat{ME}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.
 - (e) Vérifier que le point D appartient au cercle (\mathcal{C}') .

Exercice n° 2 :

Soient $f(x) = \frac{1}{\cos x - 2}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ et $g(x) = \cos x - (\frac{2x+1}{x})$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

- ❶ (a) Dresser le tableau de variation de g .
 (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\lambda \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.
- ❷ (a) Montrer que f est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ dans un intervalle J à préciser.
 (b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J et calculer $(f^{-1})'(x)$ sur le domaine où f^{-1} est dérivable.
 (c) Construire dans le même repère C_f et $C_{f^{-1}}$.
- ❸ (a) Étant dans J , exprimer en fonction de x , $\cos(f^{-1}(x))$ et $\sin(f^{-1}(x))$.
 (b) En déduire $f^{-1}(\frac{2}{3})$ et $f^{-1}[\frac{1}{\sin x - 2}]$.
- ❹ On définit la fonction H par $H(x) = \sqrt[3]{|f(x)|}$.
 (a) Étudier les variations de H et en déduire que H admet une réciproque H^{-1} .
 (b) Étudier la dérivabilité de H^{-1} et calculer $(H^{-1})'(x)$ pour tout $x \in [\sqrt[3]{0.5}; 1[$.

- ❶ Travailler sans cesse les jeunes, votre futur se prépare maintenant !
- ❷ Rien ne résiste au travail acharné sur le long terme...

Bon courage à vous les jeunes !

IA : Diourbel

Année scolaire : 2023-2024

IEF : Bambey

Classe : TS1

Lycée de Ndongol

Professeur: Dr FALL

Série : Cocyclicité-Isométries-Applications affines et similitudes directes

Exercice 1 : Dans le plan orienté, soit B et C tels que $BC = 6 \text{ cm}$.

1. Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$.
2. Soit A le point d'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et de (E) de telle sorte que ABC soit direct. Le point A' milieu de $[BC]$ se projette orthogonalement en K sur (AB) et en H sur (AC).
 - a. Justifier la nature de ABC.
 - b. Montrer que K, A', H et A sont cocycliques et tracer le cercle (C) qui les contient.
 - c. Montrer que $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KH}) \equiv \frac{2\pi}{3} [\pi]$.
 - d. Montrer que B, K, H et C sont cocycliques et tracer le cercle (C') qui les contient.
3. La droite (A'K) coupe (E) en D et E de telle sorte que BKD soit direct. Soit F le milieu de $[AE]$
 - a. Montrer KFA est isocèle en F.
 - b. En déduire que $(\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{KA}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}) [\pi]$.
 - c. Montrer que (DB) et (KF) sont perpendiculaires.

Exercice 2 : Dans le plan orienté, soit A et B tels que $AB = 4 \text{ cm}$.

1. Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
2. Construire le point C appartenant à (E) tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Quelle est la nature de ABC ?
3. Soit M et N, les images respectives de B et C par les symétries orthogonales d'axes (AC) et (AB). Démontrer que A, M et N sont alignés.
4. Soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Soit l'orthocentre de ABC et H son image par $S_{(BC)}$. Démontrer que $H \in (E)$.

Exercice 3 : Soit ABC un triangle équilatéral de centre O. (C) le cercle circonscrit à ABC. La droite (BO) recoupe (C) en D et (AO) recoupe (C) en E.

1. Faire la figure.

2. Caractériser les applications suivantes : $f_1 = S_{(DE)} \circ S_{(BA)}$;

$$f_2 = S_{(BA)} \circ S_{(BE)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(DE)} ; f_3 = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AE)} \circ S_{(AC)} \text{ et}$$

$$f_4 = S_{(BD)} \circ S_{(BA)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AE)}$$

Exercice 4 : Dans le plan orienté, soit ABCD un carré de sens direct centré en O. J et I sont les milieux respectifs de [AD] et [DC]. Soit les applications suivantes : $f_1 = r_{O; \frac{\pi}{2}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$;

$$f_2 = r_{A; \frac{\pi}{2}} \circ r_{O; \frac{\pi}{2}} ; f_3 = r_{D; \frac{\pi}{2}} \circ r_{O; -\frac{\pi}{2}} ; f_4 = S_{(AD)} \circ r_{O; \frac{\pi}{2}} \circ t_{\overrightarrow{OB}} ; f_5 = S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{BA}} \text{ et}$$

$$f_6 = S_{(AD)} \circ r_{O; \frac{\pi}{2}}$$

1. Trouver $f_1(B)$

2. Caractériser f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 .

Exercice 5 : Dans le plan orienté, soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par E le symétrique de B par rapport à C.

1. Faire une figure et montrer que BDE est rectangle et isocèle en D.

2. Caractériser $S_{(DE)} \circ S_{(AC)} ; t_{\overrightarrow{BD}} \circ r_{C; -\frac{\pi}{2}} ; S_{(DE)} \circ S_{(DA)}$ et $S_O \circ r_{D; \frac{\pi}{2}}$

3. Montrer que $f = S_{(DE)} \circ S_{(DB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 6 : Dans le plan orienté, soit ABCD un carré de sens direct de centre O, $B' = S_{(AD)}(B), C' = S_{(DC)}(B)$, E est un point de [CD] distinct de C et D, (BE) coupe (AD) en F et (Δ) est la perpendiculaire à (AC) en A.

1. Faire une figure.

2. Identifier $S_{(BD)} \circ S_{(\Delta)}$. En déduire que $t_{\overrightarrow{AC}} \circ r_{A; -\frac{\pi}{2}}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3. Identifier $S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$. En déduire que $(FB') \parallel (EC')$.

4. On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tes que $z' = iz + 1 - i$.

a. Montrer que f est une isométrie.

- b. Montrer que f admet un unique point invariant que l'on précisera. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
- c. On considère les points A_n définis par : A_0 est le point d'affixe 2 et $A_{n+1} = f(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit z_n l'affixe de A_n et Z_n l'affixe de $\overrightarrow{BA_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = e^{in\frac{\pi}{2}}$. En déduire l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels B, A_0 et A_n soient alignés.

Exercice 7 : On considère dans le plan orienté un triangle ABC isocèle en A , direct, tel que : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Soit (C) le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC . Figure en annexe à compléter.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que : $f(A) = C$ et $f(B) = A$.
Caractériser f .
b) Déterminer $f(I)$.
c) Soit (Δ) la droite telle que $f = S_{(OA)} \circ S_{\Delta}$.
Déterminer $S_{\Delta}(A)$ et en déduire que $\Delta = (OI)$.
2. La droite (OI) coupe (BC) en D . Le cercle (C') de centre B passant par D coupe (AD) en D et E .
a) Soit $D' = f(D)$.
Montrer que $D' = S_{(OA)}(D)$ et que les points O, J et D' sont alignés.
b) Déterminer (C'') l'image de (C') par f .
c) En déduire $f(E)$.
3. Soit g l'antidéplacement tel que : $g(A) = C$ et $g(B) = A$
a) Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera. Caractériser $g^{-1} \circ f$.

Exercice 8 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ; f est une application qui à

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ associe } M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ tels que } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f admet un unique point invariant O . En déduire la nature de f .
3. Soit $I(1, 0)$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'})$. En déduire les éléments caractéristiques de f .

4. Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(D): y = x$. Démontrer qu'il existe une symétrie orthogonale S' telle que $f = S' \circ S$ dont on déterminera l'axe.

Exercice 9: Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ; f est une application qui à $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

associe $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie. Est-elle un déplacement ? un antidéplacement ?
2. Démontrer que l'ensemble des points I milieux de $[MM']$ est une droite (D) .
3. Déterminer l'expression analytique de $S_{(D)}$.
4. Déterminer t tel que $f = S_{(D)} \circ t$.

Exercice 10 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ; f est une application qui à

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection.
2. Déterminer l'expression analytique de f^{-1} .
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
4. Démontrer que $\overline{MM'}$ a une direction fixe $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
5. Soit $H \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}$, le projeté orthogonal de $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sur l'ensemble des points invariants par f parallèlement à la direction de \vec{u} .
 - a. Déterminer les coordonnées de H en fonction de celles de M.
 - b. Trouver une relation entre \overline{HM} et $\overline{HM'}$. En déduire que f est une affinité dont on déterminera l'axe, le rapport et la direction.

Exercice 11 : Dans le plan orienté, soit ABCD un carré de sens direct centré en O ; I et J sont les milieux respectifs de $[CD]$ et $[AD]$.

1. Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels $(\overline{MA}, \overline{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
2. Soit (D) , la droite passant par A telle que $(\overline{AC}, \vec{u}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ où \vec{u} est un vecteur directeur de (D) . (E) et (D) se coupent en un point E.
 - a. Montrer que EAC est équilatéral.
 - b. En déduire qu'il existe une rotation de centre E qui transforme A en C.

3. Soit H le centre de gravité de EAC. La parallèle à (AC) passant par H coupe (EA) et (EC) respectivement en G et F.
 - a. Montrer que $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC} = \frac{2}{3}$.
 - b. Montrer qu'il existe une homothétie de centre E qui transforme A en G et C en F.
 - c. En déduire qu'il existe une similitude directe de centre E qui transforme A en F.

Exercice 12 : Dans le plan orienté, OABC et OCDE sont des carrés de côté commun [OC] tels que $(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv (\vec{OC}, \vec{OE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. I et J sont les milieux respectifs de [CD] et [OC] et H est le point d'intersection de [AD] et [IE].

1. Montrer qu'il existe une similitude directe S qui transforme A en I et D en E. Déterminer le rapport de cette similitude. On pose $(\vec{AD}, \vec{IE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
2. Déterminer $S(B)$ et $S(C)$ puis placer $S(C)$ sur la figure.
3. Soit Ω le centre de S.
 - a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AI] et à celui de diamètre [DE].
 - b. Montrer que Ω ne peut être le point H.
 - c. Construire Ω .

Exercice 13 : Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité graphique 5 cm, Soit A, B et C les points d'affixes respectives $i; \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + i$, I, J et K sont les milieux respectifs de [OB], [AC] et [BC] et S la similitude directe qui transforme A en I et O en B.

1. Faire une figure.
2. Déterminer l'écriture complexe de S puis préciser les éléments caractéristiques de S.
3. Placer le centre Ω de S sur la figure.
4. Quelle est l'image par S du rectangle AOBC ?
5. Soit la transformation $f = S \circ S$
 - a. Quelles sont les images par f de O, B et A ?
 - b. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
 - c. En déduire que (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.
6. On considère les points A_n définis par : $A_0 = A$ et $A_{n+1} = S(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Préciser les points A_1, A_2 et A_3 sur la figure.

- b. Soit u_n la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$. Exprimer u_n en fonction u_{n-1} . Calculer u_0 puis exprimer u_n en fonction de n .
- c. Calculer $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Quelle est la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 (BAC S1-S3 2007)

Dans le plan orienté, soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On note O l'intersection des bissectrices intérieures de ABC. Soit s_1 la similitude directe de centre A qui transforme B en O et s_2 la similitude directe de centre C qui transforme O en B. A tout point M distinct de A et B, on associe le point $N = s_1(M)$ et le point $P = s_2^{-1}(M)$.

1. Déterminer une mesure de $(\widehat{MA, MN})$.
2. Soit s' la similitude directe de centre de centre A qui transforme B en M.
 - a. Montrer que $s' \circ s_1 = s_1 \circ s'$. En déduire l'image de O par s' .
 - b. Déterminer une mesure de $(\widehat{AM, AN})$.
 - c. Proposer une construction géométrique de N lorsque M est donné.
3.
 - a. Quelle est la nature de $r = s_1 \circ s_2$? Préciser ses éléments caractéristiques.
 - b. Déterminer $r(P)$. En déduire une construction géométrique de P à partir de N.
 - c. Lorsque $N = O$. Montrer que N appartient à [AC) et P appartient à [CA).
4. Faire une figure comportant A, B, C, O, P et N lorsque $M = O$.

L'humilité et l'intégrité sont les marques de fabrique d'une grande personnalité.

DIVISEURS-DIVISION EUCLIDIENNE : Exercices d'application :

Exercice 1 :

Déterminer dans chaque cas la division euclidienne :

1) a) 32 par 6 ; b) de -32 par 6 ; c) de 32 par -6 ; d) -32 par -6.

2) a) de 18 par 5 ; b) de 18 par -5 ; c) de -18 par 5 ; d) de -18 par -5.

Exercice 2 : Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1) $(n+2)^2$ par $n+4$; 2) $2n^2+n$ par $n+1$; 3) $7n+15$ par $3n+2$

Exercice 3 : Soit n un entier supérieur ou égal à deux ; $A = n^4 - 1$.

1) Montrer que $n-1$, $n+1$, n^2+1 sont des diviseurs de A .

2) Déterminer les autres diviseurs de A distincts des précédents.

Exercice 4 : Soit a et b deux entiers naturels. Montrer que $(a+2b)^4 - a^4$ est multiple de huit.

Exercice 5 : Soit a et b deux entiers naturels. Montrer que si 3 divise $a^3 + b^3$ alors 3 divise $(a+b)^3$

Exercice 6 : Déterminer les entiers naturels n tels que :

1) $n-1$ divise $n+3$; 2) $n+3$ divise $2n+18$; 3) $n-4$ divise $3n+24$.

Exercices d'approfondissement :

Exercice 7 : Déterminer le plus petit entier naturel possédant : 1) 10 diviseurs ; 2) 15 diviseurs.

Exercice 8 : Soit p un nombre premier.

1) Montrer que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$, pour p et k , entiers tels que $1 \leq k \leq p$.

2) En déduire que p divise C_p^k pour tout entier naturel k tels que $1 \leq k \leq p-1$.

3) En déduire que pour tout nombre premier p $(a+b)^p - (a^p + b^p)$ est divisible par p .

Exercice 9 : 1) Déterminer les diviseurs de 25.

2) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$.

Exercice 10 : Soit un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2.

1) Développer $(n+1)^n$ par la formule du binôme de Newton.

2) Soit $A_n = (n+1)^n - 1$. Montrer que n^2 divise A_n et déterminer le quotient de la division de A_n par n^2 .

Exercice 11 : 1) Soit x un entier naturel. Montrer que $x+1$ divise $x^3 + 1$.

2) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, 3^k divise $2^{3^k} + 1$.

Exercice 12 :

1) Montrer que quel que soient les entiers naturels a , b , n , $a-b$ divise $a^n - b^n$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n pair, 3 divise $2^n - 1$

3) Montrer alors que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, $A_n = \frac{2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1}{3}$

est un entier naturel.

Exercice 13 : Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 donne un reste égal au carré du quotient.

Exercice 14 : Soit n un entier naturel.

1) Vérifier que $n^3 - n = (n+2)(n^2 - 2n + 3) - 6$.

2) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\frac{n^3 - n}{n+2}$ est un entier.

Exercice 15 : 1) Démontrer que $a \mid b$ si et seulement si pour tout k de \mathbb{Z} $a \mid (b - ka)$.

2) Déterminer les entiers relatifs a , tels que $(a-5) \mid (a+7)$.

3) Déterminer les entiers relatifs b , tels que $(b+2) \mid (4b-6)$.

Exercice 16 : On divise 524 par un entier naturel b non nul. Le quotient est 15 et le reste r . Déterminer les valeurs possibles de b et r .

Exercice 17 : Dans une division euclidienne, on a augmenté le dividende de 20 et le diviseur de 4 ; le quotient et le reste sont alors inchangés. Quel est le quotient ?

Exercice 18 : Dans la division euclidienne de 377 par l'entier naturel b non nul, le reste obtenu est 8. Déterminer les valeurs possibles du diviseur et du quotient.

Exercice 19 : 1) Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^{n+3} - 4^{n+2}$ est divisible par 11.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29.

Exercice 20 : 1) Pour tout entier naturel n , démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.

2) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

3) Existe-t-il des entiers naturels pour lesquels $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n^2 + 3n + 2$?

Exercice 21 : Déterminer les entiers naturels dont la division euclidienne par 64 donne un reste égal au cube du quotient.

Exercice 22 : Résoudre dans \mathbb{N}^2 les équations :

1) $x^2 - y^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 13$; 3) $x^2 - y^2 = p$, où p est un nombre premier.

NOMBRES PREMIERS - PGCD - PPCM :

Exercices d'application :

Exercice 23 : Les nombres suivants sont-ils premiers ?

1) 1421 ; 2) 1527 ; 3) 1519 ; 4) 1247 ; 5) 2419 ; 6) 5183 ; 7) 5189 ; 8) 6131.

Exercice 24 : Déterminer, s'il en existe, les valeurs de l'entier naturel n pour lesquels u_n est premier.

1) $u_n = n^3$; 2) $u_n = n^2 - 1$; 3) $u_n = 7n^2 + 12n$; 4) $u_n = n^2 + 8n - 20$.

Exercice 25 : Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les nombres suivants sont premiers entre eux :

1) n et $n+1$; 2) $3n+1$ et $9n+4$; 3) $3n+2$ et $2n+1$; 4) $2n+1$ et $n(n+1)$; 5) $2n+5$ et n^2+5n+6 .

Exercice 26 : Calculer le PGCD et PPCM de :

1) 171 et 99 ; 2) 924 et 336 ; 3) 480 et 576 ; 4) 227 et 3325.

Exercice 27 : 1) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 171, 324, 225, et 396.

2) En déduire le PGCD et le PPCM des entiers 171, 324, 225, et le PPCM des entiers 171, 324 et 396.

Exercice 28 : 1) Déterminer le PGCD des entiers : 748, 968, 1089.

2) Déterminer le PPCM des entiers : 450, 180, 108, 300.

Exercice 29 : Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers, puis déterminer le plus grand carré qui le divise : 1) 17 199 ; 2) 27 104.

Exercice 30 : 1) Quel est le plus petit entier qui multiplié par 1998, donne un carré parfait ?

2) Même question lorsque le multiplicateur est 5246.

Exercices d'approfondissement :

Exercice 31 : Deux entiers a et b ont pour PGCD δ . Quel est le PGCD des entiers :

1) $x = 7a + 3b$ et $y = 2a + b$; 2) $x = 13a + 5b$ et $y = 5a + 2b$.

Exercice 32 : Soit n un entier naturel non nul.

1) Démontre que les entiers n et $n + 1$ sont premiers entre eux.

2) En déduire que la fraction $\frac{n}{2n+1}$ est irréductible.

Exercice 33 : Calculer pour tout entier naturel n non nul :

1) PGCD($n, 2n+1$) et PPCM($n, 2n+1$) 2) PGCD($n, 2n+2$) et PPCM($n, 2n+2$).

3) PGCD($2n+2, 4n+2$) et PPCM($2n+2, 4n+2$).

Exercice 34 : Soit n un entier naturel non nul. On pose $a = 2n - 1$ et $b = 9n + 4$.

1) Démontrer que le PGCD de a et b est un diviseur de 17.

2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les entiers n pour lesquels le PGCD de a et b est 17.

Exercice 35 : 1) Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 5 ; 13 ; 17 lorsqu'on le divise respectivement par : 15 ; 23 ; 27.

2) Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 8 ; 12 ; 18 lorsqu'on le divise respectivement par : 14 ; 18 ; 24.

Exercice 36 : Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 40. Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est ce nombre ?

Exercice 37 : Une usine fabrique des boîtes de sucre de dimension $15\text{cm} \times 10\text{cm} \times 6\text{cm}$. Quelle est l'arête de la plus petite caisse cubique pouvant être remplie exactement de ces boîtes ? Combien de boîtes de sucre contiendra-t-elle ?

Exercice 38 : Une entreprise fabrique des savons de forme cubique et dispose de caisses de dimensions $48\text{cm} \times 84\text{cm} \times 60\text{cm}$. Quelle est la plus grande dimension à donner à un savon afin de pouvoir remplir exactement une caisse ?

Exercice 39 : Le PGCD de deux entiers naturels non nuls, est 84. Le plus grand est 2520 trouver les valeurs possibles de l'autre.

Exercice 40 : Le PPCM de deux entiers naturels non nuls, est 792. Sachant l'un de ces nombres est 24, trouver les valeurs possibles de l'autre.

Exercice 41 : Trouver tous les entiers naturels non nuls a et b dont :

- 1) le PDCD est 30 et la somme 540. 2) Le PGCD est 7 et la différence $a^2 - b^2 = 686$.
- 3) Le PGCD est 17 et leur produit 1734.

Exercice 42 : Trouver tous les entiers naturels non nuls a et b dont :

- 1) Le PPCM est 140 et la somme 48. 3) Le PPCM est 252 et le produit 1512.
- 3) Le PPCM est 340 et $5a - 4b = 0$.

Exercice 43 : Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:
 1) $\begin{cases} \text{PGCD}(a,b) = 15 \\ \text{PPCM}(a,b) = 90 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \text{PGCD}(a,b) = 42 \\ \text{PPCM}(a,b) = 1680 \end{cases}$
 3) $\text{PGCD}(a,b) - \text{PPCM}(a,b) = 77$; 4) $2 \times \text{PGCD}(a,b) + 7 \times \text{PPCM}(a,b) = 111$.

EQUATIONS DIOPHANTIENNES : $ax + by = c$

Exercices d'application :

Exercice 44 : Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de chacune des équations suivantes :

- 1) $24x + 17y = 1$; 2) $59x + 68y = 1$; 3) $137x - 191y = 1$; 4) $1274x - 275y = 1$

Exercice 45 : Résoudre dans \mathbb{Z}^2 les équations : 1) $11x = 16y$; 2) $65x + 25y = 0$; $9x + 21y = 0$.

Exercice 46 : 1) a) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres 37 et 23.

- b) En déduire une solution particulière dans \mathbb{Z}^2 de l'équation : $37x + 23y = 1$.
- 2) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $37x + 23y = 1$.

Exercice 47 : 1) a) Déterminer une solution particulière dans \mathbb{N}^2 de l'équation $41x - 27y = 1$;

- b) En déduire une solution particulière, dans \mathbb{N}^2 de l'équation $41x - 27y = 5$
- 2) Résoudre dans \mathbb{N}^2 l'équation $41x - 27y = 5$.

Exercice 48 : Soit l'équation (E) : $11x - 5y = 14$.

- 1) Vérifier que le couple (19 ; 39) est solution de (E).
- 2) En déduire tous les couples (x,y) entiers relatifs solutions de (E).

Exercice 49 :

Résoudre dans \mathbb{Z} : 1) $14x \equiv 3 \pmod{4}$; 2) $6x \equiv 3 \pmod{4}$ 3) $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{5} \\ 5x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$

Exercices d'approfondissement :

Exercice 50 : 1) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 , l'équation $6x - 13y = 5$ (1)

2) Soit N un entier naturel. Lorsqu'on divise N par 6, le quotient est q et le reste 2. Lorsqu'on divise N par 13, le quotient est q' et le reste 7.

- a) Montrer que (q,q') est solution de (1).
- b) En déduire la forme générale de N.

Exercice 51 : On considère l'équation (E) $6x + 10y = a$, où a est un entier relatif.

- 1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (E) possède au moins une solution.
- 2) Résoudre (E) dans le cas où $a = 22$.

Exercice 52 : 1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'équation $6y - 3x = a$ admet des solutions dans \mathbb{Z}^2 si et seulement si, a est multiple de 3.

- 2) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 les équations : a) $6y - 3x = -3$; b) $6y - 3x = 3$.
- 3) En déduire les solutions dans \mathbb{Z}^2 , de l'équation $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = -7$.

Exercice 53 : Pour tout entier relatif x, on pose : $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ et $A = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

- 1) Montrer que A n'est pas l'ensemble vide, puis déterminer l'ensemble A.
- 2) Déterminer : $B = \{x \in A / 4x^2 - 9(f(x))^2 \text{ est divisible par } 7\}$.

Exercice 54 : Soit dans \mathbb{Z}^2 , l'équation (E) : $324x - 245y = 7$

- 1) Montrer que, pour toute solution (x,y) de (E), x est multiple de 7.
- 2) Déterminer une solution (x_0, y_0) de (E). En déduire toutes les solutions de (E).
- 3) Soit d le PGCD des éléments d'un couple solution de (E). Quelles sont les valeurs possibles de d ? Déterminer les solutions de (E) telles que x et y soient premiers entre eux.

Exercice 55 :

Soit le système (S) $\begin{cases} n \equiv 1 [5] \\ n \equiv 5 [7] \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$

1) Montrer que si n est solution du système (S) alors $\begin{cases} 4n + 1 \equiv 0 [5] \\ 4n + 1 \equiv 0 [7] \end{cases}$

2) En déduire que tout entier n , solution vérifie la relation : $35k - 4n = 1$, où $k \in \mathbb{Z}$ (1).

3) Déterminer les solutions de (1) puis en déduire celles de (S).

Exercice 56 : On désigne par S l'ensemble des solutions, dans \mathbb{Z} , de l'équation : $138x - 55y = 5$ (1).

1)a) Montrer que si $(x; y)$ est un élément de S , alors x est divisible par 5.

b) En déduire une solution (x_0, y_0) de (1). 2) Résoudre (1).

3) k est un entier naturel, on considère les nombres : $a = 55k + 10$ et $b = 138k + 25$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k , $(a; b)$ appartient à S .

b) En déduire les valeurs possibles de $\text{PGCD}(a; b)$.

c) Déterminer pour quelles valeurs de k : $\text{PGCD}(a; b) = 5$.

Exercice 57 : On considère, lorsque n appartient à \mathbb{N}^* , les deux entiers a et b : $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$.

1)a) Démontrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.

b) En déduire que $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(a; 50)$. 2)a) Résoudre dans \mathbb{N}^* , l'équation $50x - 11y = 3$.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles les nombres a et b ont 50 comme plus grand commun diviseur.

3) Pour quelles valeurs de n , les nombres a et b ont-ils 25 pour plus grand commun diviseur ?

Exercice 58 : Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$.

On note $d = \text{PGCD}(a; b)$

1) Donner la valeur de d pour $n = 1$; $n = 11$; $n = 15$.

2) Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d .

3)a) Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

b) Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.

4)a) Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7. b) Pour quelles valeurs de r , d est égal à 1 ?

Exercice 59 : Un astronome a observé, au jour J_0 , le corps céleste A , qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. 6 jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B , dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronomie. Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 .

Montrer que le couple $(u; v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2)a) Donner un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution particulière de (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b) En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de (E_1) c) Déterminer toutes les solutions de (E_1) .

d) Déterminer la solution $(u; v)$ permettant de donner J_1 .

3)a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile).

c). Si l'astronome a manqué ce rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

CONGRUENCE : Exercices d'application :

Exercice 60 : Déterminer le reste de la division euclidienne de : 1) 35^{27} par 7; 2) 69^{35} par 11; 3) 77^{20} par 13.

Exercice 61 : 1) Vérifier que $1000 \equiv 1 [37]$ et en déduire que pour tout entier naturel n , on a $10^{3n} \equiv 1 [37]$.

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Exercice 62: 1) Vérifier que $1000 \equiv -1 [13]$

2) En déduire selon la parité de n les restes de la division de 10^{3n} par 13.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n , $10^{3n+3} + 10^{3n}$ est divisible par 13.

Exercice 63 : 1) Vérifier que 999 est divisible par 27.

2) En déduire que, pour tout entier naturel n , $10^{3n} \equiv 1 [27]$.

3) $A = 10^{100} + 100^{10}$. Quel est le reste de la division euclidienne de A par 27 ?

Exercice 64 : 1) Montrer que $3^5 \equiv 1 [11]$.

2)a) En déduire que, pour tous entiers naturels k et r , $3^{5k+r} \equiv 3^r [11]$.

b) Soit n un entier naturel. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 ?

3) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3^n + 7$ soit divisible par 11.

Exercice 65 : Déterminer les entiers n tels que $N = n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5.

Exercices d'approfondissement

Exercice 66 : Montrer que :

- 1) $67^{89} - 1$ est un multiple de 11.
- 2) Quel que soit l'entier naturel n , $n(n+2)(n+4)$ est un multiple de 3.
- 3) Quel que soit l'entier naturel n , $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5.
- 4) Quel que soit l'entier naturel n , $n(n^6 - 1)$ est un multiple de 42.
- 5) Quels que soient a, b entiers naturels $ab(a^4 - b^4)$ est multiple de 30.

Exercice 67 : 1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier x à quoi est congru x^2 modulo 5.

2) En déduire que l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z}^2

Exercice 68 : Pour quelles valeurs de n entier naturel :

- 1) $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3 ?
- 2) $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7 ?

Exercice 69 : 1) Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme $5n-1$ ou $5n$ ou $5n+1$.

2) Démonstre que le cube de tout entier naturel est de la forme $7n-1$ ou $7n$ ou $7n+1$.

Exercice 70 : 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $7^{3n} \equiv 1 [19]$.

2) Démontrer que, quels que soient les entiers naturels n et k , on a $7^{3n+k} \equiv 7^k [19]$.

Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 7^n par 19 ?

3) Démontrer que si a, b, c sont trois entiers naturels consécutifs, alors $7^a + 7^b + 7^c$ est un multiple de 19.

Exercice 71 : 1) Le nombre $2^{11} - 1$ est-il premier ?

2) a) Si p et q sont des entiers naturels non nuls comment la somme :

$S = 1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + \dots + 2^{p(q-1)}$ peut-elle encore s'écrire ?

b) En déduire que $2^{pq} \equiv 1 [2p-1]$.

3) a) Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et $2^q - 1$.

b) En déduire que si le nombre $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. La réciproque est elle vraie ? (Les nombres de la forme $2^n - 1$ sont appelés nombres de MERSENNE).

Exercice 72 : 1) Vérifier que 7 divise les nombres : $2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$; $5^6 - 1$.

2) Soit n un entier naturel et A_n défini par : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.

Montrer que $A_{n+6} - A_n$ est divisible par 7.

3) Soit n un entier naturel, q et r son quotient et son reste, dans la division euclidienne par 6. Montrer que A_n et A_r ont même reste dans la division euclidienne par 7.

4) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 7.

5) Soit $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$. a) Montrer que $A_n \equiv B_n [7]$.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7.

Exercice 73 : On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 , et u_4 . Quelle conjecture peut-on faire émettre concernant les derniers chiffres de u_n ?

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \equiv u_n [4]$.

b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}, u_{2k} \equiv 2 [4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0 [4]$.

3) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n \equiv 28 [100]$.

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n .

5) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

NUMERATION :

Exercice 74 : Déterminer l'écriture en base cinq de : 1) 126 ; 2) 221 ; 3) 1000.

Exercice 75 : Ecrire dans le système à base seize, à base deux, et à base cinq le nombre 1238.

Exercice 76 : Un nombre s'écrit $\overline{11011}$ en base deux, l'écrire en base dix, en base cinq et en base seize.

Exercice 77 : Un nombre s'écrit $\overline{3BD}$ en base seize, l'écrire en base dix, en base deux et en base cinq.

Exercice 78 : 1) Un nombre A s'écrit $\overline{5x3y}$ en base dix. Déterminer les nombres A qui sont pairs et divisibles par 11.

2) Déterminer le chiffre x pour que le nombre $\overline{53x4}$ en base dix soit divisibles par 9.

Exercice 79 : Calculer en numération binaire : $1101+1011$; $1101-1011$; 110×101 ; $(101)^2$.

Exercice 80 : Calculer dans le système de numération à base seize : $39B7 + 213$; $110100 + 39BC$; 27×43 .

Partie 01 : Dénombrement

Exercice 01:

On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme.

Une porte est munie d'un dispositif de fermeture portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et A, B, C, D. La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code. Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non.

1. Quel est le nombre de codes possibles ?
2. Déterminer le nombre de codes correspondant respectivement à chacun des cas suivants :
 - a) les trois chiffres sont pairs
 - b) les deux lettres sont identiques
 - c) le code contient deux chiffres impairs
3. La porte est équipée d'un système d'alarme qui se déclenche lorsque aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code. Déterminer le nombre de codes déclenchant l'alarme.

Exercice 02:

Dans le comité pédagogique d'une école composé de 8 membres, on souhaite représenter les quatre filières de recrutement. Aussi doit-il comporter 1 membre de la filière A, 2 membres de la filière B, 2 membres de la filière C, 3 membres de la filière D. Sachant que la population de la filière A est de 10, celle de la filière B de 18, celle de la filière C de 22 et celle de la filière D de 30, calculer :

- a) de combien de façons peut-on composer la représentation de la filière A ?
- b) même question pour la filière B
- c) même question pour la filière C
- d) même question pour la filière D
- e) de combien de manières peut-on constituer ce comité pédagogique ?

Exercice 03:

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes, pour obtenir une main de 5 cartes.

1. Calculer le nombre de mains possibles
2. Déterminer le nombre de mains contenant
 - a. Exactement deux rois
 - b. Exactement deux dames et 3 As
 - c. 5 piques
 - d. Exactement 3 trèfles
 - e. Au moins un carreau
 - f. Au plus 4 cœurs
 - g. Exactement un valet et 2 piques

Exercice 04:

Etant données n droites concourantes 2 à 2 et non concourantes 3 à 3, dénombrer :

1. Le nombre T_n de triangles formés par ces n droites.
2. Le nombre R_n de régions formées par ces n droites.

Exercice 05:

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1. Combien de nombres de 5 chiffres de E distincts ou non peut on former ?
2. Calculer la somme S de tous ces nombres de 5 chiffres obtenus

Exercice 06

Soit A et B deux ensembles finis. On définit $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

1. Illustrer par un dessin l'ensemble $A \Delta B$
2. Montrer que $A \Delta B = B \Delta A$
3. Montrer que $card(A \Delta B) = card A + card B - 2card(A \cap B)$

Partie 02 : Probabilité

Exercice 01:

Dans une urne, il y a 9 boules blanches ou noires, petites ou grosses. On sait qu'il y a 5 grosses et 4 petites, et que 6 sont blanches et 3 sont noires.

1. Sachant qu'il y a 3 boules à la fois blanches et grosses, déterminer le nombre de boules «petites et noires », « petites et blanches». (On pourra utiliser un diagramme).
2. On tire une boule au hasard ; chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, déterminer les probabilités pour qu'elle soit : a) petite et blanche b) blanche c) blanche ou petite d) ni blanche ni petite.

Exercice 02:

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. On tire successivement, sans remise, 3 jetons du sac on forme ainsi un nombre de 3 chiffres. Calculer la probabilité pour que :

- a) le chiffre des unités du nombre obtenu soit 9
- b) le chiffre 9 figure dans le nombre
- c) la somme des chiffres obtenus soit 9.

2. Maintenant on suppose que le tirage successif des 3 jetons se fait avec remise. Calculer la probabilité pour que :

- a) le chiffre des centaines soit 9
- b) le chiffre 9 ne figure pas dans le nombre
- c) le chiffre 9 figure exactement une fois dans le nombre.

Exercice 03:

Un programme d'histo-géo d'un candidat au BAC se compose de 15 chapitres d'histoire et de 12 chapitres de géographie. Le candidat n'a étudié que 11 chapitres d'histoire et 10 chapitres de géographie. Il a fait l'impasse sur les 6 autres chapitres dont il ne sait rien. Le sujet comporte 2 questions d'histoire et 2 questions de géographie portant sur des chapitres distincts. Le candidat ne doit traiter qu'une seule question (au choix) dans chacune des deux disciplines. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « le candidat ne sait traiter aucune des 4 questions » ; C : « le candidat sait traiter au moins une des 4 questions » ; D : « le candidat sait traiter au moins une question d'histoire et au moins une question de géographie ».

Exercice 04:

On lance trois fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les résultats sont alors les triplets (a, b, c) , où a, b et c sont des entiers de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: «le triplet vérifie : $a = b = c$ »; B: «le triplet vérifie : $a \neq b$ et $a \neq c$ » ; C: «le triplet vérifie : $a \leq b$ et $b = c$ » ; D : «le triplet vérifie : $a < b$ » ; E : «le triplet vérifie : $a = 1$ et $b \leq c$ » ; F : «le triplet vérifie : $a \leq b \leq c$ ».

2. On considère l'équation du second degré $x^2 + bx + c = 0$

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «l'équation admet 2 solutions réelles distinctes » ; B : «l'équation admet 2 solutions réelles confondues ».

3. On considère le système suivant d'inconnues réelles x et y :
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «le système a une infinité de solutions » ; B : «le système n'admet pas de solution » ; C : «le système admet une unique solution ».

Exercice 05 :

Pour un examen, 10 examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de 20 sujets que l'on place dans des enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard 2 sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le second.

On note A_1 l'événement : « les 2 sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et A_2 : « les 2 sujets obtenus par le second candidat proviennent du même examinateur ».

1. Montrer que la probabilité de A_1 est $\frac{1}{19}$.

2. a) Calculer directement la probabilité conditionnelle $P(A_2/A_1)$.

b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets du même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$.

3.a) Calculer $P(A_2/\bar{A}_1)$.

b) En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1)$, calculer $P(A_2)$ puis en déduire que
$$P(A_2 \cup A_1) = \frac{33}{323}$$

Exercice 06:

Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de 0,97
- sachant qu'une pièce est mauvaise, on l'a refusé avec une probabilité de 0,99.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?

2.a) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.

b) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,02946.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

Exercice 07:

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est de $\frac{9}{10}$.

1. On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement ». Calculer la probabilité de \bar{F}
2. On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison. On constate que :
 - quand un appareil est en parfait état de fonctionnement il est toujours accepté à l'issue du test ;
 - quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$

On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

- a) Vérifier que $P(T \cap F) = \frac{9}{10}$. Calculer $P(T \cap \bar{F})$
- b) En déduire la probabilité de T. Calculer $P(F/T)$

Exercice 08 :

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants : chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs ; chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs. On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité : a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ? b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ? c) qu'il ait un test positif ? d) qu'il ait un test négatif ?
3. Calculer la probabilité : a) qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ? b) qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

Exercice 09 :

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

1. On note : D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ; R_1 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Que peut-on dire de l'évènement $R_1 \cap \bar{D}_1$? Calculer la probabilité de l'évènement R_1 .

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter. (On pourra utiliser un arbre de probabilités.)

On note : D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel » ; R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel » ; R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ». Montrer que la probabilité de l'évènement R_2 est 0,056. Calculer la probabilité de l'évènement R .

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (On donnera la réponse arrondie au millième.)

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ?

Exercice 10 :

Dans une classe de 30 élèves, sont formés un club photo et un club de théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a 2 élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'évènement : « l'élève fait partie du club photo » et T l'évènement : « l'élève fait partie du club théâtre ». Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a) On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $P(T_1)$.

b) On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ».

Calculer $P_{T_1}(T_2)$ puis $P_{\bar{T}_1}(T_2)$. En déduire $P(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \bar{T}_1)$. Calculer $p(T_2)$.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 11 :

Une boîte contient 8 cubes : 1 gros rouge et 3 petits rouges, 2 gros verts et 1 petit vert, 1 petit jaune. Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur.

1. On note A l'évènement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et B l'évènement : "Obtenir au plus un petit cube". a) Calculer la probabilité de A. b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $2/7$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve "tirer simultanément 3 cubes de la boîte", en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note p la probabilité que l'évènement B soit réalisé.

a) Déterminer la probabilité que B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.

b) Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

Exercice 12 :

Un sac contient 4 jetons rouges numérotés 1, 2, 3, 4 et 4 jetons noirs numérotés 1, 2, 3, 4.

1. Un joueur tire au hasard et simultanément 2 jetons du sac. On convient de la règle suivante : s'il tire les 2 jetons numérotés 1, il gagne 600F ; s'il tire 2 jetons de même couleur, il gagne 200F ; dans tous les autres cas il perd 200F.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il tire 2 jetons numérotés 1 ?

b) Quelle est la probabilité de tirer 2 jetons de même couleur ? c) Quelle est la probabilité de perdre 200F ?

2. Après le premier tirage, le joueur remet les 2 jetons tirés dans le sac et procède à un deuxième tirage de 2 jetons, en convenant de la même règle.

Soit X la variable aléatoire qui, à deux tirages successifs, associe le gain du joueur (positif ou négatif).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) En déduire la probabilité pour que le gain du joueur soit au moins égal à 400F.

Exercice 13 :

1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note p_i la probabilité d'apparition de la face i . Les p_i vérifient :

$$p_1 = p_2 ; p_3 = p_4 = 2p_1 ; p_5 = p_6 = 3p_1$$

a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$

b) Montrer que la probabilité de l'événement A : "Obtenir 3 ou 6" est égale à $\frac{5}{12}$

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5 m de la cible et lance la fléchette ; à 5 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$

Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7 m de la cible et lance la fléchette ; à 7 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{2}{5}$

On note C l'événement : "La cible est atteinte".

a) Déterminer $P(C/A)$ et $P(C/\bar{A})$. En déduire que $P(C) = \frac{29}{60}$

b) Déterminer $P(A/C)$

3. Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

Exercice 14 :

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz. Le premier jour de l'année, il y'a deux chances sur 5 qu'elle propose du riz. Si elle en propose un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain. Si elle n'en propose pas un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain. On appelle J_n l'événement "la cantine propose du riz le n-ième jour" et K_n l'événement "la cantine n'en propose pas le n-ième jour". Soit p_n la probabilité de l'événement J_n .

1. Déterminer $P(J_2/J_1)$ et $P(J_2/K_1)$ En déduire p_2 .
2. Montrer que $p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = p_n - \frac{1}{2}$

a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b) Calculer u_n puis p_n en fonction de n .

c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs. Montrer qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{8}{15}$.

Exercice 15 :

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de

chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit ».

c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\frac{1}{19}$.

2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3, 4.

- b) Montrer que la loi de probabilité de X est : $p(X = 2) = \frac{1}{6}$; $p(X = 3) = \frac{1}{3}$ et $p(X = 4) = \frac{1}{6}$
c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 16 :

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 .

U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges ; U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ;
 U_3 contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

Description de l'épreuve :

L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1 . Si elle est verte, on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2 . Si elle est rouge, on la met dans U_3 puis on tire une boule dans U_3 .

Questions :

- A)1. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte.
2. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est rouge.
3. En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage.
4. Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage.
5. Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au second tirage.
B) Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :
- une boule verte, on gagne 1000F ;
une boule jaune, on gagne 500F ;
- une boule rouge, on perd 500F.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus

- Déterminer la loi de probabilité de X.
 - Calculer l'espérance mathématique de X.
- C) Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. (Les résultats seront donnés au centième près par défaut.)
- Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au second tirage.
 - Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au second tirage.
 - Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève ait une boule verte au second tirage.

Exercice 17 :

Dans tout l'exercice, les probabilités seront données au centième près par défaut.

Une laiterie fabrique des fromages dont la masse théorique est 250g. On note X la variable aléatoire ayant pour valeurs les masses possibles du produit exprimées en grammes. On note p_i la probabilité qu'un fromage soit de masse x_i . On donne :

$X = x_i$	220	230	240	250	260	270	280
$p(X = x_i) = p_i$	0,08	0,10	0,15	0,32	0,16	0,15	0,04

1. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
2. On prélève un fromage au hasard. Quelle est la probabilité que sa masse soit au moins de 250g ?
3. On prélève au hasard dix fromages. (On admettra que les tirages sont avec remise et indépendants.)

Quelle est la probabilité d'avoir : a) au moins un fromage de 220g ?
b) au plus un fromage de 220g ?

4. La production est vérifiée par une machine chargée d'éliminer les produits de masse strictement inférieure à 250g. La probabilité qu'un fromage de 220g soit éliminé est 1 ; elle est égale à 0,8 s'il s'agit d'un fromage de 230g, et à 0,7 pour un fromage de 240g. La machine n'élimine pas les fromages de masse supérieure ou égale à 250g.

Quelle est la probabilité pour un fromage d'être éliminé ?

Exercice 18 :

Pour une expérience aléatoire donnée, A et B sont deux événements indépendants.

1. a) Démontrer que $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p(B)$. En déduire que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$
b) On pose $p(A) = a$ et $p(B) = b$. Calculer $p(\bar{A} \cap \bar{B})$ en fonction de a et b.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

a) Etudier les variations de f .

b) Démontrer que pour tout x réel, $1 - x \leq e^{-x}$

3. On suppose que $a + b = \frac{1}{2}$

Démontrer que $\frac{1}{2} \leq p(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

Ministère de l'Education Nationale Académie de Thiès Lycée de Fissel Mbadane	Série d'exercices N° 02 Discipline : Mathématiques Leçon : Ln-Exponentielle	Année Scolaire : 2023-2024 Classes : TS ₁ Cellule de Mathématique
--	---	--

Exercice 01 :

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α comprise entre 0,5 et 2. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
b) En déduire le signe de $g(x)$
- 3) Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x} \ln(x)$.
- 4) a) Déterminer la fonction dérivée de f puis en déduire le signe de $f'(x)$
b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ puis en déduire de l'inégalité $\frac{1}{2} < \alpha < 2$, un encadrement de $f(\alpha)$.
c) Achever l'étude de f puis tracer sa courbe.

Exercice 02 :

- 1) Montrer que $(\forall x \geq 0): x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
- 2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
- 3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln(P_n) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
b) En déduire la limite en $+\infty$ de P_n .

Exercice 03 : Soit $f: [0; 3[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x - E(x)) \ln x, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f 2) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe.

Exercice 04 : Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$ et $f(x) = \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$.

- 1) Pour quelles de x , f est-elle définie ?
- 2) Calculer $f'(x)$.
- 3) On pose $g(x) = a(bx+1) \ln(bx+1) - b(ax+1) \ln(ax+1)$.
- 4) a) Calculer $g'(x)$ b) En déduire les variations de f .
- 5) Démontrer que $\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right) \ln\left(\frac{b}{a} + 1\right) < (\ln 2)^2$

Exercice 05 : Soit m un réel et

$$g_m(x) = e^{m|\ln|x||}$$

- 1) Etudier la parité de g_m .

- 2) Etudier selon les valeurs de m , les variations de g_m .
- 3) g_m est-elle continue en 1 ? est-elle dérivable en 1 ?
- 4) Tracer $C_{g_{-2}}, C_{g_{-1}}, C_{g_0}, C_{g_{0,5}}, C_{g_2}$. Comparer $g_m\left(\frac{1}{m}\right)$ et $g_m(x)$.

Exercice 06 : On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 1 + x - nx \ln|x|, & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 1 \end{cases}$$

Où n est un paramètre réel non nul, et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- 1) Etudier la continuité de f_n en 0
- 2) Etudier la dérivabilité de f_n en 0.
- 3) Montrer que le point $A(0; 1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_n)
- 4) Etudier les branches infinies de la courbe (C_n) suivant les valeurs de n .
- 5) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes.
- 6) Etudier les variations de f_n suivant les valeurs de n .
- 7) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_1 .
b) Montrer que la courbe (C_1) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que : $3 < \alpha < 4$
c) Tracer la courbe (C_1) .

Exercice 07 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Etudier f . En déduire que pour tout réel x , on a : $0 < f(x) \leq 1$. Tracer (C) .
- 2) On considère la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \ln(\tan x)$.
a) Déterminer $g'(x)$ pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$.
b) Montrer que g admet une bijection réciproque h définie sur \mathbb{R} . Calculer $h(0)$
c) Montrer que h est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x $2h'(x) = h(x)$.
d) En déduire que pour tout réel x on a : $\int_0^x f(t) dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$

Exercice 08 :

- 1) Etudier les variations de la fonction numérique f définie par : $f(x) = n\sqrt[n]{x} - e \ln x$. ($n \in \mathbb{N}^*$).
- 2) a) Tracer les courbes de g et h avec $g(x) = n\sqrt[n]{x}$ et $h(x) = e \ln x$.
b) Prouver que (C_h) et (C_g) ont un point commun A et la même tangente en ce point.
- 3) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leq \frac{n\sqrt[n]{x}}{e}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x}$.

Exercice 09 : Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

- 1) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que : $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$

- 2) Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continument dérivable sur $[0; 1]$ et deux fois dérivables sur $]0; 1[$ telle que : $f(0) = f(1) = 0$; $f'(0) > 0, f'(1) < 0$ et $\forall x \in]0; 1[, f''(x) < 0$.
- 3) a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0$.
 b) Montrer que $f(\alpha) > 0$. On suppose qu'il existe $\beta \in]0; 1[$ tel que $f(\beta) = 0$. Montrer qu'il existe $c_1 \in]0; \beta[$ et $c_2 \in]\beta; 1[$ tel que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. En déduire une contradiction.
 c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0; 1[$.
- 4) On considère la fonction g définie par ; $g(x) = \ln(ax + (1 - x)b) - x \ln(a) - (1 - x) \ln(b)$. Montrer que g vérifie les hypothèses du 2). (En particulier on vérifiera que g est bien définie sur $[0; 1]$) puis que pour tout $x \in]0; 1[$ $\ln(ax + (1 - x)b) > x \ln(a) + (1 - x) \ln(b)$

PROBLEMES

Problème 01 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On appelle f_n la fonction définie par $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité graphique 2 cm)

- 1) Déterminer le domaine de définition D_n de f_n puis calculer les limites aux bornes de D_n .
 2) Prouver que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on précisera les coordonnées.
 3) Montrer que f_n est dérivable sur D_n que pour tout $x \in D_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, f'_n(x) = (n - x)f_{n-1}(x)$.
 4) a) Etudier les variations de f_n (on distinguera deux cas, n pair et n impair)
 b) Dresser le tableau de variation de f_n . c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) .
 d) Tracer dans le même repère les courbes $(C_0), (C_2)$ et (C_3)

Problème 02 : Soit f_n la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

(C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$. b) Déterminer les branches infinies de la courbe
 2) Calculer $f'_n(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variation de f_n .
 3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists! \alpha_n \in \mathbb{R}), f_n(\alpha_n) = 0$ b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq 2 \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$
 c) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x \geq x + 1$ d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), f_n(1) > 0, \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$
 4) Tracer la courbe (C_2) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 5) a) Montrer que : $(\forall n \geq 2)$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \left(-1 - \frac{1}{n} + e^{\alpha_n}\right) \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}$$

- b) En déduire que $(\forall n \geq 2) f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$. c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente puis donner sa limite.
 6) a) Montrer que $(\forall n \geq 2) \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$ b) En déduire que $(\forall n \geq 2) \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2 \ln n}{n}$
 c) Calculer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

Problème 03 :

Partie I : Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm) et on considère la fonction $h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$

- 1) Montrer que la fonction f est continue en 0.
- 2) a) Calculer $h_a(0)$ et $h_a(a)$. En déduire que : $\exists ! b \in [0; a] : \frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$
 b) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -2$.
- 3) a) Montrer que f est dérivable sur $J =]-\frac{1}{2}; +\infty[\setminus \{0\}$ puis montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ avec $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$ pour tout $x \in J$.
 b) En déduire que $g(x) < 0$ pour tout $x \in J$. c) En déduire la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I .
- 4) a) Calculer la limite de f en $(-\frac{1}{2})^+$ et en $+\infty$. b) Montrer que : $\exists ! \alpha \in [1; 2] ; f(\alpha) = 1$.
 c) Construire la courbe de f .

Partie II : On pose : $\forall x \in I ; \varphi(x) = \ln(1+2x)$ et $J = [1; \alpha]$

- 1) a) Montrer que la fonction φ est dérivable sur l'intervalle I et que : $\forall x \geq 1 : 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$
 b) Vérifier que ; $\varphi(\alpha) = \alpha$ et $\varphi(J) \subseteq J$.
- 2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = \ln(1+2u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$
- 3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in J$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$
 c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

Partie III : Soit F a fonction numérique définie sur l'intervalle I ainsi : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

- 1) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur I puis calculer $F'(x)$
 b) En déduire la monotonie de la fonction F sur l'intervalle I .
- 2) a) Montrer que $\forall x \geq 1 ; F(x) > \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t} \right) dt$. b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.
- 3) On pose : $\forall x \in]-\frac{1}{2}; +\infty[; \begin{cases} \bar{F}(x) = F(x) ; & \forall x \in I \\ \bar{F}(-\frac{1}{2}) = l = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} F(x) \end{cases}$
- 4) a) Montrer, (TIAF), que $\forall x \in I ; F(x) - l > (x + \frac{1}{2})f(x)$
 b) En déduire que la fonction \bar{F} n'est pas dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$.

Problème 04 : Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{x(1+x)^n}$ et (C_n) sa courbe dans un repère

Partie A :

- 1) Etudier les variations de f_n puis dresser son tableau de variations.
- 2) Montrer que f_n admet une bijection réciproque notée f_n^{-1} .
- 3) Etudier, pour tout entier naturel, la position de (C_{n+1}) par rapport à (C_n) .
- 4) Tracer les courbes (C_0) , (C_1) et (C_2)

Partie B : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^2 f_n(x) dx$.

- 1) a) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ b) Calculer I_0 et I_1 .
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$
- 3) Calculer A, l'aire du domaine plan délimité par les courbes (C_1) , (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_1 + S_n$ avec $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right]$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ c) En déduire la limite en $+\infty$ de I_n et S_n .

Partie C : On pose pour tout entier naturel n , $\Gamma_n = \sum_{k=0}^n I_k$.

- 1) Montrer que pour tout $x \neq 0$, $\sum_{k=0}^n f_k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{f_n(x)}{x}$.
- 2) En déduire que $\Gamma_n = \ln(2\sqrt{e}) - \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x} dx$ 4) Trouver alors la limite de Γ_n .
- 3) Justifier que : $0 \leq \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x} dx \leq I_n$

Problème 05 :

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 + (x - 1)e^x$$

- 1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}): g(x) \geq 0$.
- 2) Montrer que : $(\exists! x = 0), g(x) = 0$.

Partie II : Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

- 1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.
- 2) Montrer que la fonction f est continue en zéro.
- 3) a) Calculer la fonction dérivée de f sur \mathbb{R}^*
b) En déduire le sens de variation de la fonction f .

4) Soit l'intégrale suivante : $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt ; x \in \mathbb{R}$.

5) a) Par une intégration par partie, montrer l'identité suivante : $J(x) = (-1 - x + e^x)e^{-x}$

b) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \left(\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)} \right) \leq J(x) \leq \left(\frac{x^2}{2} e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \right)$$

c) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$$

d) En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

6) a) Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}): f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \left[\frac{e^x(x - 2) + 2 + x}{e^x - 1} \right]$$

b) Etudier le signe de la quantité $e^x(x - 2) + 2 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}): f''(x) > 0$.

d) Construire la courbe de f dans le repère.

Partie III : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n); \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1) Montrer que $\ln 2$ est la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

Partie IV : Soit F la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) dt; \quad \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}): \left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)$

b) Montrer que F est continue en 0 puis dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$.

2) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{1 + e^x} \right) f(x)$.

b) Etudier la monotonie de la fonction F .

Problème 06 :

Partie I : Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $J = [0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

- 1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \ln t$ sur l'intervalle $[x; x + 1]$,
montrer que : (P): $\forall x > 0: \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$
- 2) a) En utilisant la proposition (P), montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.
b) En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe admet une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 3) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $\forall x > 0; f'(x) = 3x^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(x+1)} \right)$
b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur I. (on pourra utiliser (P))
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$.
- 5) a) Vérifier que $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = 2x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)} \right)$
b) En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
c) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $]0; +\infty[$ une solution unique notée α comprise entre 1 et 2
d) En déduire que les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α .
- 6) a) Tracer la courbe de f . (on précisera la demi-tangente en 0^+ et la branche parabolique de (C_f))
b) Montrer que f est une bijection de I vers J . On note f^{-1} sa bijection réciproque.

Partie II : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f^{-1}(u_n); & \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 < u_0 < \alpha \end{cases}$$

- 1) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \alpha$.
- 2) a) Montrer que : $g(]0; \alpha[) =]0; 1[$.
b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante
c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. d) Déterminer la limite de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie III : On considère la fonction F définie sur I par : $(\forall x \in \mathbb{R}): F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

- 1) a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de la quantité $F(x)$.
b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa dérivée première.
c) En déduire que F est strictement décroissante sur l'intervalle I.
- 2) a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) \leq (1 - x) \ln 2$
b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
- 3) a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1} \right) dt$$

b) Calculer l'intégrale $\int_x^1 \left(\frac{t^3}{t+1}\right) dt$, $\forall x \in]0; +\infty[$ (On remarque que : $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$)

c) En déduire que :

$$\forall x \in]0; +\infty[: F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

d) Calculer la limite de F en 0^+ , en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}: v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

5) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : -\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) En déduire l'inégalité suivante : $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ Indication $\left(\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n}\right)$

c) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

Problème 07 :

Partie I : Soit f la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité graphique 2cm)

1) a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f . Puis en déduire les branches infinies de la courbe (C_f)

b) Etudier la monotonie de la fonction f puis dresser le tableau de variation.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions 0 et $\alpha > 1$ puis en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $] -1; +\infty[$.

d) Construire la courbe (C_f) dans le repère.

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}: \exists! u_n \in]0,1[: f(u_n) = \frac{1}{n}$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est strictement décroissante.

c) En déduire que la suite converge et donner sa limite.

Partie II : Soit φ la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{\ln(1+t^2)}{t}, & \text{si } t \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Vérifier que la fonction φ est impaire.

b) Montrer que : $\forall t \neq 0; \varphi'(t) = \frac{1}{t^2} f(t^2)$. c) En déduire le tableau de variation de la fonction φ .

d) Démontrer que : $\varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par l'intégrale : $g(t) = \int_0^x \varphi(t) dt$.

2) a) Montrer que la fonction g est paire.

b) Montrer que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} puis calculer $g'(x)$ pour tout réel x .

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g .

3) a) Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^x \left(\frac{2 \ln t}{t} \right) dt$.

b) En déduire que : $g(x) - g(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$; $\forall x \geq 1$

c) Montrer que : $\forall x \geq 0$: $\ln(1+x) \leq x$. d) En déduire que : $\forall x \geq 1$; $0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \leq \frac{1}{2}$.

e) Calculer $\lim_{+\infty} g$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$. En déduire la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$

Partie III : On considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie ainsi : $S_n = \sum_{k=1}^n f \left(\frac{1}{k} \right)$.

1) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $\ln(1+k) - \ln k < \frac{1}{k}$

2) En déduire que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $2 \ln(2+k) - 3 \ln(1+k) + \ln k < f \left(\frac{1}{k} \right)$ et que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $2 \ln \left(\frac{k+2}{k+1} \right) - \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) < f \left(\frac{1}{k} \right)$

3) En déduire que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $\ln \left(\frac{(2+n)^2}{4(n+1)} \right) < S_n$. En déduire encore la valeur de la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Partie IV : Soit x un élément de l'intervalle $]0,1[$.

1) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n ((-1)^k x^k) + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$.

2) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$.

3) En déduire l'identité suivante : $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right) (2k-1) + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt + \left(\frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} \right)$

4) a) Montrer que : $0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt \leq x^{n+2}$.

b) En déduire la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t} \right) dt = 0$

c) Montrer que : $\forall x \in]0,1[$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{2k-1}{k} \right) x^k \right)$

Problème 08 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 3 cm.

Partie I : Soit m un paramètre réel non nul. On considère la fonction f_m à variable réelle définie par :

$f_m(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m+x}{m-x} \right)$, C_m désigne la courbe de f_m dans le repère.

1) Déterminer le domaine de définition D_m de f_m . (on distinguera les cas $m < 0$ et $m > 0$)

2) Montrer que pour tout réel m et pour tout x de D_m , $f_{-m}(x) = -f_m(x)$.

3) On suppose dans la suite que m est un réel strictement positif.

a) Etudier les variations de f_m . c) Soit f_m^{-1} la bijection réciproque de f_m . Déterminer $f_m^{-1}(x)$.

b) Montrer que f_m réalise une bijection de D_m vers un intervalle J à préciser.

Partie II :

1) Calculer les limites aux bornes de D_1

2) Dresser le tableau de variations de f_1

3) Déterminer une équation de la droite (T) , tangente à (C_1) au point d'abscisse 0.

- 4) Soit g la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $g(x) = f_1(x) - x$.
- 5) a) Etudier le sens de variation de g c) Déterminer la position relative de (C_1) par rapport à (T) .
 b) Calculer $g(0)$ en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 6) a) Construire dans le même repère (C_1) et (T)
 b) Comment construire (C_{-1}) et $(C_{f_1^{-1}})$ à partir de (C_1) ? (On ne demande de les construire)

Partie III : Soit Φ une primitive de $f_1^{-1} = f^{-1}$ sur \mathbb{R} .

- 1) a) Démontrer que $\Phi \circ f$ est une primitive de la fonction $x \mapsto xf'(x)$ sur $] -1; 1[$.
 b) Démontrer que pour tout éléments a et b de $] -1; 1[$: $\int_{f(a)}^{f(b)} f_1^{-1}(t) dt = \Phi \circ f(b) - \Phi \circ f(a)$
 c) En déduire que pour tout x de $] -1; 1[$, $\int_{f(a)}^{f(b)} f_1^{-1}(t) dt = \int_0^x f'(t) dt$
 d) Démontrer que pour tout $x \in] -1; 1[$, $\int_0^{f(x)} f_1^{-1}(t) dt = \int_0^x f'(t) dt$
- 2) Soit x un élément de $] -1; 1[$.
 a) Démontrer que $\int_0^x f'(t) dt = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$.
 b) En déduire pour tout y de \mathbb{R} , $\int_{f(a)}^{f(b)} f_1^{-1}(t) dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$.
- 3) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan délimité par la courbe $(C_{f_1^{-1}})$ de f_1^{-1} et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe des abscisses. Calculer \mathcal{A} .
- 4) Soit x un élément de \mathbb{R} et A le point de $(C_{f_1^{-1}})$ d'abscisse $\ln \sqrt{2}$.
 a) Montrer que $f_1^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ b) Montrer que pour tout réel x , on a : $(f_1^{-1}(x))' = 1 - (f_1^{-1}(x))^2$
 c) En déduire le volume du solide engendré par la rotation de l'arc $[\widehat{OA}]$ de $(C_{f_1^{-1}})$ autour de l'axe des abscisses.

Partie IV : On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \int_0^x (f_1^{-1}(t))^n dt$ et $F_0(0) = 0$.

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $0 \leq F_n(x) \leq x(f_1^{-1}(x))^n$
 b) En déduire la limite de $F_n(x)$ en $+\infty$. (x réel positif fixé)
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $F_{n+2}(x) = F_n(x) - \frac{1}{n+1} (f_1^{-1}(x))^{n+1}$
 b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $F_{2n}(x) = x - \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2p-1}\right) (f_1^{-1}(x))^{2p-1}$
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x - \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} = f_1(x) - F_{2n}(f(x))$.
 b) En déduire la limite en $+\infty$ de $\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \times 3^{2n-1}}$

Bon Travail !

Exercice 01 : On considère les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$$(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ définies par : } \begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \text{ et } V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$$

- 1) Calculer V_0
- 2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
- 4) Calculer la limite de V_n puis de U_n en fonction de n .
- 5) Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ et $T_n = \prod_{k=0}^{n-1} U_k$
 - a) Démontrer que $S_n = (1 - 2^n) \ln 2$.
 - b) Justifier que $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ puis exprimer T_n en fonction de n .

Exercice 02 : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = e^{\left(1 - \frac{n}{2}\right)}$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.
b) Justifier que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ existe et est arithmétique.
- 2) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $P_n = \prod_{k=0}^n u_k = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

a) Exprimer S_n et P_n en fonction de n .

b) Déterminer la limite à l'infini de S_n et P_n .

Exercice 03 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - \sin x$.

- 1) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution α dans \mathbb{R} .
b) Vérifier que $2,3 < \alpha < 2,4$.
- 3) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin x$.
- 4) a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.
b) Montrer que pour tout réel x , on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
c) Dédus-en que pour tout réel x , on a :
 $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

Exercice 03 : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$

- 1) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et que $1 \leq \alpha \leq 2$
- 2) Soit f la fonction définie sur $K = [1; 2]$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln x$. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.
 - a) Étudier les variations de f et montrer que, pour tout $x \in K$, on a $f(x) \in K$.
 - b) Montrer que, pour tout $x \in K$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- 3) Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :
 $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- c) En déduire que la suite u converge.
- d) Trouver le plus petit entier naturel p tel que
 $|u_p - \alpha| \leq 10^{-2}$. Déduire un encadrement de α
d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 04 : On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Partie I : conjectures

- Sur un même graphique, tracer les deux droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$
- Déterminer graphiquement u_1, u_2 et u_3 .
- Déterminer par le calcul u_1, u_2 et u_3 . Les résultats sont-ils cohérents ?
- Conjecture le sens de variation de (u_n) .
- Conjecture la limite de la suite (u_n) .

Partie II : Démonstration des conjectures

- Montrer par récurrence que : $1 \leq U_n \leq 6$
- Montrer que (u_n) est une suite croissante puis en déduire qu'elle est convergente.
- Soit (v_n) la suite numérique définie par : $V_n = U_n - 6$.
- a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et calculer son premier terme.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
c) Calculer la limite de U_n en $+\infty$
- On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ et $S_n' = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.
- a) Déterminer S_n' en fonction de n .

b) En déduire que $S_n = 6n - 4 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n .

c) Calculer la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 05 : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

- a) Montrer que $\forall x \geq 1 ; f(x) \geq 1$
b) Montrer que $\forall x \geq 1 ; f(x) \leq x$.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} (n \in \mathbb{N}).$$
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$
b) Etudier la monotonie de (u_n) .
- Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$.

Exercice 06 : Soient $U_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ et $V_n = 2^{n+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

- Etudier le sens de variations de chacune des suites (U_n) et (V_n)
- Montrer que $V_n > U_n$
- Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes et calculer leur limite.

Exercice 07 :

A- x, y et z sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calculer ces trois nombres sachant $x + y + z = 9$ et $xyz = 59$.

B- x, y et z sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique croissante. Calculer ces trois nombres sachant que $x + y + z = 63$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{16}$

Exercice 08 :

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$. Que peut-on dire de $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$?

2) Déterminer la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}(n - 1, \text{radicaux})}$$

4) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) =$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}(n - 1, \text{radicaux})}$$

5) Moyennant les questions précédentes, calculer

$$\text{la limite de } 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}(n \text{ radicaux})}$$

Exercice 09 :

$$U_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!}\right), \quad V_n = U_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1) Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.

2) Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes.

Exercice 10 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases}, \quad \begin{cases} V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < V_n$

2) a) Montrer que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) Montrer que : $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; U_n V_n = 2$.

b) Calculer la limite l de (U_n) et (V_n) .

Exercice 11 :

1) Montrer que $\forall x \geq 0; x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) Soit la suite (U_n) définie par $U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \sin\left(\alpha \frac{k}{n^2}\right)$ où α est un paramètre réel positif ou nul.

Prouver en utilisant 1) que : $\forall n \geq 1$, on a :

$$\frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq U_n(\alpha) \leq \alpha \frac{n+1}{2n}$$

4) En déduire que la suite $(U_n(\alpha))$ converge vers $\frac{\alpha}{2}$.

5) Soit la suite $V_n = \sum_{k=1}^n \sin^3\left(\frac{k}{n^2}\right); (n \geq 1)$

a) Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin^3 x =$

$$-\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x.$$

b) Montrer que $\forall n \geq 1$, on a : $V_n =$

$$-\frac{1}{4} U_n(3) + \frac{3}{4} U_n(1)$$

c) Montrer alors que (V_n) est une suite convergente vers 0.

Exercice 12 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k!}.$$

1) Montrer que (u_n) est une suite croissante

2) a) Prouver que $\forall k \geq 1$, on a : $k! \geq k$.

b) En déduire que $\forall n \geq 1$, on a : $u_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers un réel $l \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie

$$\text{par : } u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

1) Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est constante ?

2) On suppose maintenant que la suite (u_n) est

$$\text{définie par : } \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$$

3) a) Montrer que la suite (u_n) n'est pas constante

b) Montrer que la suite $v_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

En déduire v_n en fonction de n .

c) On pose $w_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite T_n définie par $T_n = w_{n+1} - w_n$. Exprimer

T_n en fonction de v_n .

d) Exprimer w_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières la somme

$$\sum_{k=0}^n T_k)$$

e) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{u_n}{8^n}$.

Exercice 14 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que P_n possède une seule racine réelle dans $[0; 1]$. Soit a_n cette racine.

2) a) Montrer que $\forall x > 0$, $P_{n+1}(x) > P_n(x)$

b) En déduire que $P_{n+1}(a_n) > 0$ et que $a_{n+1} \in]0; a_n[$ et (a_n) est strictement décroissante

3) Montrer que : $\forall x \neq 1$, $\forall n \geq 1$, $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2$. En déduire que $\forall n \geq 1$, $2a_n - a_n^{n+1} - 1 = 0$.

4) a) Montrer que : $0 \leq a_n \leq a_2$ et $0 \leq a_n^n \leq a_2^n$.

b) Vérifier que $a_2 < 1$. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = 0.$$

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$

Exercice 15 :

Partie A : Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$U_n = \frac{n}{a^n} \text{ où } a \text{ est un réel strictement supérieur à } 2.$$

1) Vérifier que pour tout n de \mathbb{N}^* ; $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{a}$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n)

2) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers 0.

3) Soit pour tout n de \mathbb{N}^* : $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$. Montrer

$$\text{que pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* : S_n \leq \frac{1}{a-2}$$

4) Montrer que n de \mathbb{N}^* : $S_{n+1} = \frac{1}{a} S_n + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)a^{n+1}}$

5) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{(a-1)^2}$

Partie B : Soit la suite (W_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$W_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k U_k$$

1) Montrer que la suite (W_{2n}) est strictement décroissante et la suite (W_{2n+1}) est strictement croissante.

2) Etablir que pour tout n de \mathbb{N}^* : $W_{2n+1} < W_{2n}$.

3) Montrer que les suites (W_{2n}) et (W_{2n+1}) sont convergentes vers la limite L_a tel que :

$$\frac{-a^2+2a-3}{a^3} < L_a < \frac{-a+2}{a^2}.$$

Exercice 16 : Soit $a > 0$. On considère la suite

$(u_n)_{n \geq 0}$ définie par U_0 un réel vérifiant $U_0 > 0$ et la

relation : $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{a}{U_n} \right)$. On se propose de

démontrer que (U_n) tend vers \sqrt{a} .

1) Montrer que : $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$

2) Montrer que si $n \geq 1$, alors $U_n \geq \sqrt{a}$ puis que la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

3) En déduire que la suite (U_n) converge vers \sqrt{a} .

4) En utilisant la relation : $U_{n+1}^2 - a = (U_{n+1} - \sqrt{a})(U_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $U_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $U_n - \sqrt{a}$.

5) Si $U_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour tout $n \geq 1$, montrer que : $U_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}}$

6) **Application :** Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $U_0 = 3$.

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - 3 \ln x + 1); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x - 2 \ln(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + \frac{1}{x})}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x + \frac{1}{x}); \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x - \ln x),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 + \ln^2 x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\frac{x+1}{x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \ln x; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln(\frac{1}{x}) - \ln 7}{x-7}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{\sin x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - (\ln x)^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \ln(\frac{1-x^2}{\cos x}); \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - (x - \frac{1}{2})]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \ln(1-x) - 2x + 4}{(x-2)^2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln(x+1) - 2\sqrt{1+x}}{x^2}; \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln|x+1| - \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3+1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3\tan x)}{x^3}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\sin x))}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+\sin x)}{x^3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^2-\ln^2(1-x)}{x^4}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{x^2+1} - x)}{x^3}; \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(x+5) - \log(5-x)}{x-5}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log x - \log 5}{x-5}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{\log(1-2x)}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cotan x)}{1 - \cotan x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2}{x^5}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3+1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2+3} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2-3x+7)}{2x-3}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+x+\sqrt{x+4})}{3x}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\frac{2-3x}{2+5x}); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\frac{1+5\sin x}{1+3\sin x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x}); \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[2]{1+\ln(x^2)}}{x}; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \ln(x^3-8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) \cos(\frac{\pi}{4}x); \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^{\frac{2}{3}} - 1)^3 \ln(x^2 - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \tan x \cdot \sqrt[3]{\tan x} - 1)}{\tan x - 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan} x}{\ln(1+x)}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} \ln(\frac{x}{2})$$

Exercice 2 :

1. Soient a, b, c des réels strictement positif et différents de 1.

Simplifier les expressions suivantes :

$$\log_{\frac{1}{a}}(\frac{1}{b}) = \log_a(b); \log_{\frac{1}{b}}(b) = \log_a(\frac{1}{b})$$

$$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}; \log_c(a) = \log_c(b) \cdot \log_b(a)$$

2. Soient a, b, c des réels strictement positif et différents de 1 :

a- Montrer que : $\frac{a^4 + b^4}{a+b} \geq (ab)^{\frac{1}{2}}$

b- En déduire que :

$$\log_a(\frac{b^4 + c^4}{b+c}) + \log_b(\frac{c^4 + a^4}{c+a}) \log_c(\frac{a^4 + b^4}{a+b}) \geq 9$$

3. On rappelle que pour tout x réel, $E(x)$ est l'entier tel que : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

a- Démontrer que : $x - 1 < E(x) \leq x$.

b- Calculer alors, si elles existent les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x E(\ln x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\ln x)}{\sqrt{x}}$$

4. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

$$f(x) = \frac{3x-5}{2x+1}; I = [0; +\infty[; h(x) = \frac{5}{x\sqrt{1-\ln x}}, I =]0; e[$$

$$g(x) = \frac{2x^3+x^2+x-7}{x}, I =]-\infty; 0[$$

$$p(x) = \frac{1}{\sin(2x)}, I =]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$k(x) = \frac{1}{(1+x^2)\text{Arctan} x}, I =]0; +\infty[$$

$$q(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x \ln x}, I =]1; +\infty[$$

5. Calculer es intégrales suivantes :

$$\int_1^1 \ln^2 x dx; \int_1^e x \ln x dx; \int_e^{e^2} x^2 \ln x dx; \int_e^1 \frac{x-1}{x+1} dx$$

$$\int_1^2 5x(\ln x)^5 dx; \int_3^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \int_2^3 \ln(\frac{x+1}{x-1}) dx; \int_4^2 \frac{dx}{x \ln x}$$

6. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

a- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$

b- Calculer alors $\int_2^3 f(x) dx$. En déduire la

$$\text{valeur de } \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^3} dx$$

Problème 1 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arctan}(\ln(-x)) + \frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = (x \ln x - x)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Etudier la continuité de f en 0
2. Etudier les limites aux bornes de D_f et étudier les branches de C
3. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats
4. Etudier les variations de la fonction f
5. Montrer que :

$$\begin{cases} f''(x) = -\frac{(1+\ln(-x))^2}{x^2(1+\ln^2(-x))^2} & \text{si } x < 0 \\ f''(x) = 2(\ln^2 x + \ln x - 1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

6. Etudier la concavité de la courbe C

7. Tracer cette courbe
8. Soit g la restriction de f sur \mathbb{R}_-
 - a- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser
 - b- Calculer, lorsqu'il existe $(g^{-1})'(\frac{\pi}{2})$
 - c- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J
9. Tracer la courbe de $g^{-1}(x)$

Problème 2 :

- I.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur $]-\frac{1}{n}; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

1. Calculer les limites aux bornes et déterminer les branches infinies à (C_n)
2. Etudier la continuité de f_n en 0
3. En utilisant le théorème de Rolle, calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
4. Etudier la dérivabilité de f_n en 0 puis interpréter le résultat obtenu

- II.** Soit la fonction g_n définie sur $]-\frac{1}{n}; +\infty[$ par :

$$g_n(x) = nx - (1 + nx)\ln(1 + nx)$$

1. Montrer que $\forall x \in]-\frac{1}{n}; +\infty[$, $g_n(x) < 0$
2. Montrer que $\forall x \in]-\frac{1}{n}; +\infty[$, $g_n(x) < 0$, on a : $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2(1 + nx)}$
3. Dresser alors le tableau de variations de f_n
4. Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) sur l'intervalle $]0; +\infty[$
5. Montrer que l'équation $f_n(x) = n$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$
6. Etudier la monotonie de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et montrer que la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$
7. Montrer que $1,01 < \alpha_2 < 1,09$ puis donner une valeur approchée de α_2 à 0,02 près.
8. Tracer les courbes (C_2) et (C_3) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- III.** On considère la fonction F_n par :

$$\forall n \geq 0, F_n(x) = \int_x^{2x} f_n(t) dt$$

1. Montrer que F_n est définie sur $]0; +\infty[$
2. Montrer que F_n est dérivable sur $]0; +\infty[$
3. En utilisant le théorème des inégalités de l'accroissement fini, montrer que $\forall n > 0$,

$$(n - 1)xf_n(nx) \leq F_n(x) \leq (n - 1)xf_n(x)$$

4. Etudier la dérivabilité de F_n en 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F_n(x)}{x}$ puis donner les branches infinies à (C_{F_n})
6. Dresser le tableau de variation de F_n
7. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n e^{-k} f_k(\frac{1}{k})$
 - a- Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 - b- En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Problème 3 :

Partie A

1. Etudier sur l'intervalle $]0; +\infty[$ le sens de variation de la fonction h_1 définie par : $h_1(x) = x - \ln x$
2. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $h_1(x) > 0$.
On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction f_1 donnée par : $f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}$
3. Etudier le sens de variation de la fonction f_1 .
4. Déterminer les limites de cette fonction f_1 aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f_1
6. On considère la fonction φ_1 définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = f_1(x) \text{ pour } x \in]0; +\infty[\end{cases}$
 - a- Montrer que φ_1 prolonge f_1 par continuité.
 - b- Etudier la dérivabilité de φ_1 en 0.
7. Tracer la représentation graphique C_1 de φ_1 dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 4

Partie B

Dans cette partie n désigne un entier naturel de l'intervalle $[2; +\infty[$

1. Etudier sur $]0; +\infty[$ le sens de variation de la fonction h_n définie par : $h_n(x) = x^n - \ln x$
2. En déduire que pour tout n de $]0; +\infty[$, on a $h_n(x) > 0$
On définit alors sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction notée f_n et donnée par : $f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x}$
3. On définit sur $]0; +\infty[$ la fonction g_n définie par : $g_n(x) = 1 + (1 - n)x^n - \ln x$
Montrer que g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. En déduire l'existence d'un réel unique a_n solution de l'équation $g_n(x) = 0$.
5. Comparer les réels a_n et 1.
6. Quelle est la valeur de a_2 ?
7. Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$ on a : $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$
8. En déduire le sens de variations de f_n .
9. Préciser les limites de f_n aux bornes de $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n .
10. En vous aidant de la question 3 de la partie A, montrer que f_n admet un prolongement par continuité φ_n dérivable sur $[0; +\infty[$
11. Tracer la représentation graphique C_2 de φ_2 dans le même repère que dans la partie A.

Partie C :

1. En utilisant la question A.1, déterminer un encadrement de $x - \ln x$ pour tout x de $[1; 3]$
2. En déduire que pour tout x de $[1; 3]$, $|f'_1(x)| \leq 1$
3. On considère les réels α et β tels que : $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ et on pose : $A = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) dx$ et $J = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(\alpha) dx$
 - a- En utilisant la question 2, démontrer, que pour tout x de $[\alpha; \beta]$, on a : $\alpha - x \leq f_1(x) - f_1(\alpha) \leq x - \alpha$
 - b- En déduire que : $\int_{\alpha}^{\beta} (\alpha - x) dx \leq A - J \leq \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx$
 - c- Montrer alors que : $|A - J| \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2$
4. On partage l'intervalle $[1; 3]$ en n intervalle de même longueur en utilisant les réels x_0, x_1, \dots, x_n tels que : $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 3$. On a donc $x_{k+1} - x_k = \frac{2}{n}$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. On pose $A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x) dx$ et $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x_k) dx$
 - a- Démontrer que pour tout x de $[1; 3]$ on a : $\left| \int_1^3 f_1(x) dx - (J_0 + J_1 + \dots + J_{n-1}) \right| \leq \frac{2}{n}$
 - b- En déduire une valeur approchée de $\int_1^3 f_1(x) dx$ à 10^{-1} près.

On légitimera le choix de n .

Problème 4 :

On considère la suite (t_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$t_n = n - \left(n + \frac{1}{n}\right) \ln(n) + \ln(n!)$$

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) et démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$

I. Etude de la suite (t_n)

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $] -n; +\infty[$ par

$$\psi(x) = \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$$

On suppose que ψ est dérivable sur $] -n; +\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1. Justifier que :

$$\forall t \in] -n; +\infty[, \psi'(t) = \frac{-t}{n^2\left(1 + \frac{t}{n}\right)}$$

2. Calculer $\psi(0)$ puis dresser le tableau de variation de ψ (on calculera pas les limites)
3. Déduire de ce qui précède que : $\forall t \in] -n; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$
4. En utilisant ce qui précède et en effectuant un changement de variable, démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$
5. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) dx = 0$
6. Déduire des questions précédentes que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq 0$
7. Justifier alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$
8. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^n \ln(x) dx \leq \ln(n!)$
9. En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2})$
10. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$
11. On définit la fonction f sur l'intervalle : $]0; 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
On admet que : $\forall x \in]0; 1[, f(x) \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$
 - a- Déterminer le sens de variations de la suite (t_n)
 - b- Déduire des questions précédentes la convergence de la suite (t_n)

II. Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par :

$$\begin{cases} w_0 = \frac{\pi}{2} \\ w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- Calculer la valeur de w_1
- Démontrer que la suite (w_n) est décroissante et positive. On admettra la suite (w_n) est à termes strictement positifs.
- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$
- En utilisant les questions précédentes, justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$
- Déduire de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$
- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$
 - Démontrer que la suite (y_n) est constante.
 - Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{\pi}{2}$
 - Déterminer alors la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n w_n^2$
 - Déduire de ce qui précède que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$
- On admet dans la toute la suite du problème que, si une suite (α_n) converge vers 1, alors la suite (α_{2n}) converge aussi vers 1.
 - En utilisant ce qui précède, la limite de la suite $(2n w_{2n}^2)$ en $+\infty$
 - En utilisant des questions précédentes démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$
 - Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{t_n} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$
 - En admettant que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{t_{2n} - 2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{n w_{2n}^2}$, déterminer alors la limite suite (t_n)

Problème 5 :

- A.** On considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{1}{(\ln x)^n} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- Déterminer le domaine de définition D_n de f_n
- Etudier les limites aux bornes de D_n puis déterminer les branches infinies de (C_n)
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n à droite de 0 puis interpréter le résultat
- Calculer f'_n et dresser le tableau de variations suivant la parité de n
- Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1})

6. On considère la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_e^{e^2} f_n(t) dt$$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{e^2 - e}{2^n} \leq U_n \leq e^2 - e$
 - Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente
 - Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_n$, on a : $x f'_n(x) = -n f_{n+1}(x)$
 - En déduire la relation récurrence entre U_{n+1} et U_n . En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
7. Montrer qu'on a :

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, \frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

8. Montrer que $\forall x \in]0; 1[, \frac{x^2 - x}{\ln^2 x} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2 t} \leq 0$ et que $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{x^2 - x}{4 \ln^2 x} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2 t}$

- B.** On considère la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2(t)} & \text{si } x \leq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- Montrer que $D_F = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ et que F est continue en 0^+
- Etudier la dérivabilité de F en 0^+ puis interpréter graphiquement.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et donner la branche infinie à la courbe C_F
- Montrer que $\forall t \in]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[, \sqrt{2}(t-1) \leq \ln(t)$ et $\forall t \in]1; +\infty[, \ln t \leq t-1$
- En déduire que $\forall t \in]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[, F(x) \leq \frac{x}{2(x^2-1)}$ et $\forall x \in]1; +\infty[, \frac{x}{x^2-1} \leq F(x)$
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats.
- Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $[0; 1[$ puis sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- Calculer $F'(x)$ sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de F
- Tracer C_F dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra $F(2) = 1,8$

- C.** On considère la fonction φ définie par :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{t-1}{\ln(t)} & \text{si } t \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ \varphi(0) = 0; \varphi(1) = 1 \end{cases}$$

- Montrer que : $\forall t \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, t-1 \leq \ln(t) \leq 0$
- Montrer que φ est croissante sur $[0; +\infty[$

3. Dédurre $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$x - 1 \leq \int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{t} dt \leq \frac{x^2 - x}{2}$$

4. Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\ln(x+1) + \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0^+ . Interpréter graphiquement le résultat

b- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Donner la branche infinie à c_f

c- Montrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$\int_x^{x^2} \frac{\varphi(t)}{t} dt = f(x) + \frac{\ln(x+1)}{2}$$

d- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.

e- Montrer qu'il existe $\alpha \in]0; 1[$ tel que

$$f'(\alpha) = 0$$

f- Montrer que $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \varphi(x)$$

g- Dresser le tableau de variation de f puis tracer c_f dans le repère précédent.

Problème 6 :

Dans tout l'exercice, $n \in \mathbb{N}^*$

A. On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln x)^n & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle C_n sa courbe représentative.

1. a- Etudier la continuité de f_n à droite de 0

b- Etudier la dérivabilité de f_n à droite de 0. Interpréter le résultat

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ suivant les valeurs de n

3. Donner la nature de la branche infinie à C_n en $+\infty$

4. Dresser le tableau de variation de f_n suivant les valeurs de n

5. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

6. Tracer les courbes C_1 et C_2 dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 2 cm

On considère la fonction F définie sur

$$]-\infty; 0] \text{ par } : F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{t^2 + 1} dt$$

7. Montrer que F est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et que $\forall x \in]-\infty; 0[$, $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

8. Dédurre que : $\forall x \in$

$$]-\infty; 0[: \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq$$

$$\frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

9. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$

10. On admet que F admet une limite l en $-\infty$.

$$\text{Montrer que } \frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$$

B. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_1^e f_n(t) dt$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$ et $U_n \geq U_{n+1}$

En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} U_n$

3. En déduire l'aire du domaine (D) délimité par : les droites $(D_1): x = 1$, $(D_2): x = e$ et les courbes C_1 et C_2

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}$

En déduire les limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$

5. On considère les deux suites : $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et

$(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} V_n \\ V_1 \neq U_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = |V_n - U_n| \end{cases}$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (d_n) = +\infty$

b. Montrer alors que la suite (V_n) est divergente.

C. On considère la fonction F_n définie par

$$\begin{cases} F_n(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f_n(t)} dt & \text{si } x \neq 0 \\ F_n(0) = 0 \end{cases} \quad \forall n \geq 2$$

1. Montrer que $\forall x \in [0; \frac{e}{2}[\cup]e; +\infty[$, F_n est définie avec $(n \geq 2)$

2. a- Montrer que $\forall n \geq 2, \forall x \in [0; \frac{e}{4}[$, $\exists c_x \in$

$$]x; 2x[\text{ tel que } F_n(x) = \frac{x}{f_n(c_x)}$$

b- Montrer alors que F_n est continue en 0^+

c- Etudier la dérivabilité de F_n à droite de 0.

Donner une interprétation graphique

3. Montrer que F_n est dérivable sur D_{F_n} et

$$\text{que } \forall n \in D_{F_n}, F_n'(x) = \frac{2}{f_n(2x)} - \frac{1}{f_n(x)}$$

4. a- Calculer $F_2(x), \forall x \in D_{F_2} \setminus \{0\}$

b- Calculer les limites aux bornes de D_{F_2}

Donner la nature des branches infinies à C_{F_2}

5. Dresser le tableau de variations de F_2

6. Tracer C_{F_2} dans un second repère (O, \vec{u}, \vec{v})

d'unité 1 cm. On prendra : $F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -5,7$

TS1 calcul intégral

Exercice 1

I. Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

On précisera dans chaque le domaine de validité.

$$1^\circ) f(x) = \ln(x) \quad ; \quad 2^\circ) f(x) = xe^x \quad ; \quad 3^\circ) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \quad ; \quad 4^\circ) f(x) = \tan(x)$$

$$5^\circ) f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} \quad ; \quad 6^\circ) f(x) = \frac{x^2+x-x}{x+2} \quad ; \quad 7^\circ) f(x) = \frac{1}{x \ln^3(x)} .$$

II. Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 |3t-2| dt \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^2 x|x| dx \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \max(e^t; 2) dt$$

$$I_n = \int_0^n (|x-1| + |x-2| + \dots + |x-n|) dx$$

III. Calculer les intégrales suivantes

(On précisera éventuellement l'intervalle de validité) :

$$A = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx \quad ; \quad B = \int_0^2 te^{-t^2} dt \quad ; \quad C = \int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$D = \int_{-1}^x \frac{dt}{1-t} \quad ; \quad E = \int_0^{\pi/6} \sin(3u) du \quad ; \quad F = \int_{e^2}^e \frac{\ln t}{t} dt \quad ; \quad G = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx$$

$$H = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt \quad ; \quad I = \int_a^{a^n} \frac{dx}{x \ln x} \quad ; \quad J = \int_1^{e^2} (t^3+1) \ln t dt \quad ; \quad K = \int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x} dx$$

IV. a°) Montrer que les intégrales $I = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$ et $J = \int_0^\pi \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$

existent.

b°) Calculer $I+J$ et $I-J$. En déduire I et J .

V. Application du changement de variable. Montrer:

-- si f est impaire et continue sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ ($a > 0$);

-- si f est paire et continue sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ ($a > 0$);

-- si f est périodique de période T et continue sur \mathbb{R} ,

$$\text{Alors } \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt .$$

$$\text{Calculer : } \int_{-3}^3 t\sqrt{t^4+1} dt \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \sin^3(t) dt .$$

VI. Etudier rapidement $f : x \mapsto x+1+e^x$; préciser les branches infinies ;

tracer C_f . Pour $a > 0$, calculer l'aire du domaine plan

$$Da = \{M(x, y) ; 0 \leq x \leq a \text{ et } x+1 \leq y \leq f(x)\} .$$

Déterminer la limite de cette aire quand a tend vers $+\infty$.

VII. Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

- Montrer que f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^* .
- Montrer que f est impaire.
- Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. On écrira : $f(x) = F(2x) - F(x)$
Avec F primitive de $x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x^2)}$ sur \mathbb{R}_+^*

VII. Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

- 1°) a) Etudier la parité de f .
b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2°) a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
b) Etudier la variation de f . Préciser les points où f admet un extremum.
c) Construire C_f (on admettra que le maximum de f est égal à 0,3).

Suites définies par une intégrale.

I. Soit $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$.

- 1) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
 $(2n + 1)I_n = -2n I_{n-1}$.
- 2) En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

II. Pour n entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Quelle est la signification géométrique de I_0 ? En déduire la valeur de I_0 .
- 2) Calculer I_1 .
- 3) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $I_n = \left(\frac{n-1}{n+2} \right) I_{n-2}$.
- 4) En déduire la valeur de I_n en fonction de n
- 5) Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante et que cette suite converge vers 0
- 6) Montrer que $n(n+1)(n+2) I_n I_{n-1}$ est indépendant de n et calculer sa valeur.

Exercice 2

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

I/ Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$

- 1) Calculer la dérivée de la fonction : $x \rightarrow \sqrt{x^2 + 2}$
- 2) En déduire la dérivée f' de f .
- 3) Calculer la valeur de I .

II/ Calcul de J et de K

- 1) Sans calculer explicitement J et K , vérifier que : $J + 2I = K$.
- 2) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , montrer que :

$$K = \sqrt{3} - J$$

En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 3

Pour tout réel positif a , on définit $I(a) = \int_1^a \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) dx$.

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a) = 1 - \frac{\ln(a)+1}{a}$.
 En déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

- 2) On définit maintenant $J(a) = \int_1^a \left(\frac{\ln x}{x^2+1}\right) dx$.

En utilisant (avec justification) que pour tout x supérieur à 1 :

$$x^2 \leq x^2 + 1 \leq 2x^2, \quad \text{montrer que} \quad \frac{1}{2}I(a) \leq J(a) \leq I(a)$$

Exercice 4

- 1) Justifier que, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \llbracket 0, p \rrbracket$, l'existence de l'intégrale :

$$I_{(p,q)} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 x^p (\ln x)^q dx$$

- 2) Exprimer $I_{(p,q)}$ en fonction de $I_{(p,q-1)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

- 3) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{(n,n)} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

Exercice 5

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t) dt$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

- 1) a) Calculer u_0 et simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$

- 2) Etudier la monotonie de u .

Exercice 6

On pose quel que soit l'entier naturel n , $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$

- 1) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.

- 2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$: $I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$

- 3) Calculer I_0 et I_1 et prouver que :

$$I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \cdots \times 2p} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \cdots \times 2p}{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)} \times \frac{1}{2p+1} \quad (\forall p \geq 1)$$

4) a) Établir que : $\frac{n}{n+1}I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$

b) Montrer alors que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$

c) Établir la formule de Wallis (mathématicien anglais 1616-1703) :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \times 4 \times 6 \cdots \times 2p}{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2p-1)} \right]^2 \times \frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 7

1) Justifier qu'on peut poser :

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

2) Montrer que la fonction ainsi définie est paire.

3) a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, décomposer le polynôme $X^4 - 2X^2 \cos \theta + 1$

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, calculer $I(x^2)$ en fonction de $I(x)$, puis $I(x^{2^n})$ en fonction de $I(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) a) Calculer $I(x)$ pour tout $x \in]-1; 1[$

b) Après avoir calculé $I\left(\frac{1}{x}\right)$, calculer $I(x)$ pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Exercice 8

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$

1) a) Déterminer Dg : le domaine de définition de g .

b) Montrer que g est dérivable sur Dg et que pour tout $x \in Dg$ on a :

$$g'(x) = \frac{e^x}{(\sqrt{2e^x - 1})^3}.$$

c) Dresser le tableau de variation de g

2) Tracer la courbe de g dans un repère orthonormé.

3) Soit f la fonction définie sur $] -\pi/2; \pi/2 [$ par : $f(x) = -\ln(1 + \sin x)$.

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de $] -\pi/2; \pi/2 [$ sur $] -\ln 2; +\infty [$

c) Soit y un réel de $] -\pi/2; \pi/2 [$. On pose $x = f(y)$, montrer que $\sin y = e^{-x} - 1$

4) a) Soit $G(x) = f^{-1}(x)$. Montrer que G une primitive de g sur $] -\ln 2; +\infty [$

b) Calculer alors $\int_0^{\ln 2} g(t) dt$

Partie B

Pour tout entier naturel on nul n et pour tout $x \in]0, +\infty [$ on pose

$$G_n(x) = \int_0^x (g(t))^n dt.$$

1) a) Justifier que pour tout $x \in]0, +\infty [$: $G_1(x) = G(x)$

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_1(x) = -\frac{\pi}{2}$

2) a) Montrer que pour tout $t \in] -\ln 2; +\infty [$, on a : $g^2(x) = \frac{e^{-t}}{2 - e^{-t}}$

b) En déduire $g_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_2(x)$

3) a) Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty [$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|g(t)|^n \leq e^{-nt/2}$

b) Montrer alors que pour tout $t \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $G_n(x) \leq \frac{2}{n}$

Exercice 9

Soit $F(x) = \int_1^{1+\ln^2 x} e^{\sqrt{t-1}} dt, \forall x \in]0, +\infty[$

1) a) Justifier l'existence de F sur $]0, +\infty[$

b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = \frac{2\ln x}{x} e^{|\ln x|}$

2) a) Calculer $F(1)$ et vérifier que pour $x \geq 1, F(x) = 2 \int_1^x \ln t dt.$

En déduire $F(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$

b) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right).$

En déduire l'expression de $F(x)$ sur $]0 ; 1[.$

3) Calculer chacune des deux intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 e^{\sqrt{t-1}} dt \quad \text{puis} \quad B = \int_2^5 e^{\sqrt{t-1}} dt$$

Exercice 10

Partie A

1) Soit f la fonction définie sur $] - 1 ; 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

a) Etudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 5cm)

2) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan Δ compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. On pourra faire une intégration par parties.

3) Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; \frac{\pi}{2}[$, on pose $g(x) = f(\sin x)$. Montrer que la fonction g est une primitive sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction h telle que $h(x) = \frac{1}{\cos x}$

Partie B

Dans la suite du problème a désigne un réel de l'intervalle $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} dt.$

1) Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq \frac{a \sin^{2n} a}{\cos a}.$

2) En déduire la limite de $I_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$

3) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit sur $]0 ; a[$ la fonction F_n

$$\text{par : } F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \dots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

a) Montrer que pour tout t de l'intervalle $]0 ; a[$: $F_n'(t) = \frac{1 - \sin^{2n} t}{\cos t}.$

Calculer $F_n(0)$.

b) En intégrant la relation précédente entre 0 et a , montrer que :

$$F_n(a) = g(a) - I_n(a).$$

En déduire la limite de $F_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On considère la suite u définie pour entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{5 \times 2^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}}$$

- Montrer, en utilisant les questions précédentes, que cette suite converge vers une limite que l'on précisera.
- Montrer, en utilisant B1. que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_n est une valeur approchée de $\ln(\sqrt{3})$ à $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ près par défaut.
- En déduire, sous forme d'une fraction irréductible, une valeur approchée de $\ln(\sqrt{3})$ à 10^{-2} par défaut.

Exercice 11

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt$$

1) Convergence de la suite (J_k/I_k) .

- Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$
- Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier k tel que $k \geq 0$:

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1}).$$
- Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties I_{k+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).
- Déduire des résultats précédents que J_k/I_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2) Convergence et limite de la suite (S_n) .

- Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1} , en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k ($k \geq 1$).
- En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:
$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$
- Calculer J_0 et I_0 , puis déterminer la limite S de la suite (S_n) .
- Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de

$$S - S_n, \text{ et montrer que } 0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$



Série d'exercices sur :

Produit vectoriel, produit mixte, transformations élémentaires de l'espace

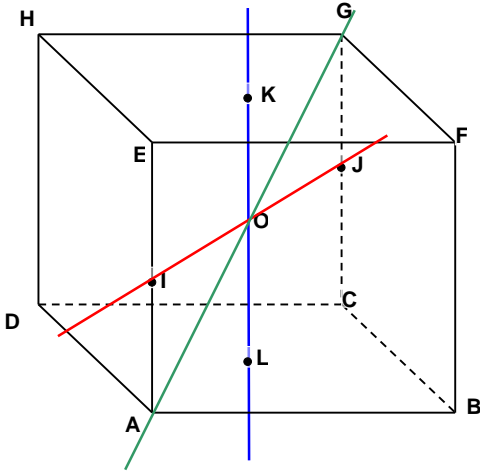
Exercice 00

Répondez par Vrai(V) ou Faux(F) en mettant une croix dans les cases V ou F. Rectifiez quand c'est faux en donnant dans la case(R) un contre-exemple sur le dessin en perspective cavalière d'un cube.

	V	F	R
1- Par deux points de l'espace il passe une infinité de plans.			
2- Par trois points non alignés de l'espace, il passe un plan et un seul.			
3- Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.			
4- Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul perpendiculaire à un plan donné.			
5- Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul perpendiculaire à une droite donnée.			
6- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites de ce plan.			
7- Si deux droites sont parallèles dans l'espace, alors toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.			
8- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite dans l'espace, alors elles sont parallèles.			
9- Si deux plans sont parallèles dans l'espace, alors toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.			
10- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.			
11- Si deux plans sont perpendiculaires à un même plan, alors ils sont parallèles.			
12- Si deux plans sont parallèles dans l'espace, alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre.			
13- Si deux plans sont perpendiculaires dans l'espace, alors toute droite de l'un est perpendiculaire à toute droite de l'autre.			
14- Si deux plans sont parallèles à un même troisième plan, alors ils sont parallèles.			
15- Si une droite est parallèle à un plan (P), alors il existe un seul plan (Q) parallèle à (P) et contenant cette droite.			
16- Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors il existe un seul plan (P) parallèle à (D) et contenant (D').			
17- Si trois plans sont deux à deux perpendiculaires, alors l'intersection de deux d'entre eux est perpendiculaire au troisième.			
18- Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.			
19- Si une droite (D) est perpendiculaire à une droite (D') et si (D') est parallèle à (D'') alors (D'') est perpendiculaire à (D)			
20- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.			

Exercice 01: [Recherche de rotations laissant invariant un cube]

- On considère un cube ABCDEFGH.
 (BDE) et (CFH) aux centres des triangles équilatéraux BDE et CFH.
 b. Trouver deux rotations du cube autour de l'axe (AG).
 c. En déduire 8 autres rotations laissant invariant le cube.



Exercice 02 : [Tétraèdre orthocentrique]

Soit ABCD un tétraèdre tel que les droites (AB) et (AC) sont respectivement orthogonales aux droites (CD) et (BD). On appelle H l'orthocentre du triangle BCD.

- Démontrer que les plans ABH et ACH sont perpendiculaire au plan (BCD).
- En déduire que la droite (AD) est orthogonale à la droite (BC).

Exercice 03: [Théorème des trois perpendiculaires]

Soit (D) une droite perpendiculaire en (O) à un plan (P) et (Δ) une droite incluse dans (P) et ne contenant pas O. Soit A un point quelconque de (D) distinct de O et B un point quelconque de (Δ).

- Démontrer que la droite (AB) est orthogonale à (Δ) si et seulement (OB) est orthogonale à (Δ).

Exercice 04 :

Sur un tétraèdre EFGH on considère les points I, J, et K respectivement sur les arêtes [EF], [EG], [EH]. Déterminer les intersections du plan (IJK) et du tétraèdre EFGH suivant chacune des conditions ci-dessous :

- (JK) est parallèle à (GH) et (IJ) non parallèle à (FG).
- (JK) est parallèle à (GH) et (IJ) est parallèle à (FG).
- Dans la condition (2-) donner la nature du contour de l'intersection.

EXERCICE 05

Un cône de révolution a pour hauteur 4m .Le rayon du cercle de base est 2,5m .

- Faire un dessin .
- Calculer l'aire latérale du cône .
- Calculer le volume du cône .

EXERCICE 06

Un cône de révolution a pour base un cercle de rayon 1,89m .La longueur d'une génératrice est de 6,5m .

- Faire un dessin.
- Calculer la hauteur du cône.
- Calculer le volume du cône.

EXERCICE 07

Un cône de révolution a pour hauteur 3,5cm .La longueur d'une génératrice est 5cm.

- Faire un dessin.
- Calculer le rayon du cercle de base.
- Calculer l'aire latérale du cône.
- Calculer le volume du cône.

EXERCICE 08 Un cône de révolution a un demi - angle au sommet de 60° . La longueur d'une génératrice est de 8,4cm.

- Faire un dessin.
- Calculer la hauteur du cône .
- Calculer le volume du cône .

EXERCICE 09

1°/ Un octogone régulier ABCDEFGH est inscrit dans un cercle de centre O de rayon 6cm .

- Faire un dessin en vraie grandeur .
- Calculer AB et OM , où M est le milieu de [AB]

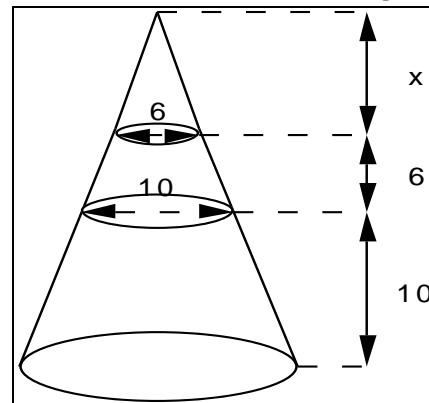
2°/ Une pyramide régulière de sommet S a pour base cet octogone .

On donne SM=12cm .

- Faire un dessin .
- Calculer la hauteur de la pyramide .
- Calculer la longueur d'une arête latérale .
- Calculer l'aire latérale de la pyramide .
- Calculer le volume de la pyramide.

EXERCICE 10

On découpe un cône de révolution parallèlement à sa base en trois morceaux comme indiqué sur le dessin ci-dessous.



Les sections ont pour diamètres 6cm et 10cm.

- Calculer x .
- Quelle est l'aire de la base du cône initial ?

EXERCICE 11:

L'espace orienté E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que f est une isométrie (c'est-à-dire que f conserve la distance).
- b) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées $(0,0,-1)$ et de vecteur directeur : $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
- 2) Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A .
 - a) Montrer que le point $I(-1,0,0)$ appartient à P .
 - b) Prouver que $I' = f(I)$ appartient à P .
- 3) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
- 4) Déterminer l'ensemble des points M de E d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient :
 - a) au plan Q d'équation cartésienne : $2x + y - z = 0$.
 - b) à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est : $x = y = z$.
 - c)

EXERCICE 12 : [Recherche de rotations (Terracher TCE)]

On désigne par (C) et (C') les cercles inscrits dans les faces $EFGH$ et $BCGF$ du cube, par Ω et Ω' leurs centres et par (P) le plan (ADG) .

- 1- Démontrer que $S_{(P)}(C) = (C')$.
- 2- Analyse

Soit R une rotation d'axe (Δ) transformant (C) en (C') .

- a. Démontrer que (Δ) est contenu dans le plan (P) .
 - b. Démontrer que R peut s'écrire $R = S_{(P)} \circ S_{(Q)}$ où Q est un plan de symétrie de (C) .
 - c. En déduire que $(\Delta) = (FG)$ ou que (Δ) est une droite de (P) passant par le centre du cube.
- 3- Synthèse
- a. Prouver que (FG) est l'axe d'une rotation transformant (C) en (C') . Préciser son angle.
 - b. Soit (Δ) une droite de (P) par le centre du cube et (Q) le plan défini par (Δ) et Ω .

Démontrer que $S_{(P)} \circ S_{(Q)}$ est une rotation d'axe (Δ) transformant (C) en (C') .

Exercice : 13

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace, I le point défini par $\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

1. De quels coefficients a, b, c faut-il affecter les points A, B, C , respectivement, pour que I soit leur barycentre ?
2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(-1; 0; 0)$, $(0; -\sqrt{3}; 1)$ et $(5; \sqrt{3}; 2)$.
 - a. Vérifier que les points A, B et C ne pas sont alignés. Déterminer les coordonnées de I
 - b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B .
 - c. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 =$

– 12. Donner les éléments caractéristiques de l'ensemble E .

Exercice : 14

L'espace est orienté par le repère ortho normal direct $(O; \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$. On considère le cube $OIRJNKLM$.

A est le milieu de $[IL]$ et B le point définit par :

$$\vec{KB} = \frac{2}{3}\vec{KN}. P \text{ désigne le plan } (OAB).$$

1. a) Précisez les coordonnées des points A et B .
 - b) Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}$.
 - c) Déduisez – en que l'aire du triangle OAB est $\frac{\sqrt{14}}{6}$.
 - d) Le point $C(1; \frac{1}{3}; 1)$ appartient – il à P ?
2. On considère le tétraèdre $OABK$. Montrer que son volume est $\frac{1}{9}$.

Déduisez – en la distance du point K au plan P .

Exercice 15

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. G son centre de gravité et H celui du triangle BCD .

On note $I, J, K,$ et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [AC]$ et $[BD]$.

1. a) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) se coupent en G .
 - b) Démontrer que la droite (CG) perce le plan (ABD) en H .
 - c) Placer sur une figure les données précédentes.
2. Soient S_1 la réflexion par rapport au plan (BIC) et S_2 la réflexion par rapport au plan (ALC) . On pose $r = S_2 \circ S_1$.
 - a. Montrer que (BIC) est le plan médiateur du segment $[AD]$; en déduire les images de A et de D par S_1 . Déterminer de même les images de B et de D par S_2 .
 - b. Déterminer les images des points A, B, C et G par r .
 - c. Démontrer que r est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

Exercice : 16

$ABCDEFGH$ est le cube ci-dessous.

O est son centre, I est le milieu de $[AB]$, J le centre de gravité de la face $DCGH$.

1. a) Montrer que (ABG) est le plan médiateur des segments $[ED]$ et $[FC]$.
- b) On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions dont les plans respectifs sont $(ABG), (BCH)$ et (IOJ) . Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube $ABCDEFGH$.
2. On considère l'application f telle que $f = S_1 \circ S_2$:
 - a. Prouver que f est une rotation d'axe (BH) .
 - b. En orientant le plan (ACF) par \vec{BH} , déterminer la restriction de f à ce plan. En déduire l'angle de f .
3. Soit r le demi – tour d'axe (OI) et g l'application $r \circ f$

a. En décrivant r comme la composée de deux réflexions judicieusement choisies déterminer la nature de g.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

Exercice 17

On considère le cube ABCDEFGH.

1. Soit L, le centre du carré ABFE et J le milieu de [AL]. Soit la similitude directe du plan (ABF) telle que $f(A)=L$ et $f(B)=J$.
 - a. Déterminer l'angle et le rapport de f.
 - b. Construire $E'=f(E)$. Montrer que f(F) est le milieu du segment [AB].
 - c. Soit Ω le centre de la similitude f. Montrer que les points Ω, A, L et E d'une part et Ω, A, B et J d'autre part sont cocycliques. En déduire une construction de Ω .
 - d. Montrer que les droites (ΩA) et (ΩE) sont orthogonales.
2. On désigne par I le milieu du segment [FG] et toujours L le centre du carré ABFE.
 - a. Vérifier que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{IH} \wedge \overrightarrow{IB}$. En déduire l'aire du triangle IHB.
 - b. Calculer le volume du tétraèdre BCIH et en déduire la distance du point C au plan (BIH).

EXERCICE 18

ABCDEFGH est un cube d'arête 1, I le centre de ABCD.

- 1) a) Déterminer $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{BA}$.
 - b) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = 0$.
 - c) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
- 2° a) Soit $P = \text{bary} \{(A; 2), (C; -1)\}$.
Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.
- b) Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.
Déterminer l'ensemble (Γ) . Montrer que $A \in (\Gamma)$.
- c. 3° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

EXERCICE 19

On considère le cube ABCDEFGH, et I le centre de gravité du triangle EBD. Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(E; 1), (B; 1-m), (G; 2m-1), (D; 1-m)\}.$$

Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m .
2. Préciser la position de G_1 .
3. Vérifier que $G_0=A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. a. Vérifier que les points A, G_m , E et O_1 sont coplanaires.
b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal

$$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}).$$

1. Démontrer que la droite (AG) est orthonormal au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
2. Déterminer les coordonnées du point G_m .
3. Pour quelles valeurs de m la distance de G_m au plan (EBD) est

égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

ABCDEFGH est un cube d'arête 1, I le centre de ABCD.

- 1) a) Déterminer $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{BA}$.
 - b) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = 0$.
 - c) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
- 2° a) Soit $P = \text{bary} \{(A; 2), (C; -1)\}$. Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.
- b) Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$. Déterminer l'ensemble (Γ) . Montrer que $A \in (\Gamma)$.
- 3° Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

Série d'exercices sur : Equations différentielles linéaires

**EXERCICE : 1**

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

a.) (E): $y' - 3y = 0$ et $y(0) = 2$

b.) (E): $3y' + y = 0$ et $y(1) = e$

c.) (E): $y' + y \ln 2 = 0$ et $y(1) = 1$

d.) (E): $y' = y$ et $y(1) = -1$

EXERCICE : 2

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

a.) (E): $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$

b.) (E): $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$

c.) (E): $y'' - (\ln 2)^2 = 0$, $y(0) = 1$ et $y(2) = 1$

d.) (E): $4y'' + y = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

e.) (E): $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$

f.) (E): $y'' + y' + y = 0$, $y(0) = -1$ et $y(0) = \sqrt{3}$

EXERCICE : 3

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = e^{-2x}.$$

- Vérifier que la fonction $g : x \rightarrow (x+1)e^{-2x}$ est solution sur \mathbb{R} de (E).
- Démontrer qu'une fonction $f + g$ est solution de l'équation de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$.
- En déduire les solutions sur \mathbb{R} de (E).

EXERCICE : 4 Soit la fonction $f : x \rightarrow (x+1)e^{-2x}$.

- Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle
(E) $y'' + ay' + by = 0$.
- Démontrer pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de f est solution de (E).
- Déterminer parmi les solutions de f , celle qui est solution de (E).

EXERCICE : 5

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

- Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation :
 $z^2 \cos^2 \theta - 2z \sin \theta \cos \theta + 1 = 0$.

Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

- Résoudre l'équation différentielle :
 $(1 + \cos 2\theta)y'' - 2 \sin 2\theta y' + 2y = 0$.

EXERCICE : 6

Soit α un nombre réel tel que : $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle :
 $(1 + \cos 2\alpha)y'' - 2y' \sin 2\alpha + 2y = 0$.

EXERCICE : 7

- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E)
 $y'' + 16y = 0$
- Déterminer la solution f qui vérifie : $f(\frac{\pi}{4}) = -2$ et $f'(\pi) = 8$.
- Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.

EXERCICE : 8

- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E)
 $y'' + 2y' + 5y = 0$.
- Déterminer la solution f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$
- On pose : $F(x) = -\frac{1}{5} [f'(x) + 2f(x)]$
 - Démontrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} ; expliciter $F(x)$.
 - En déduire le calcul de

$$\int_0^{\pi} f(x) dx$$

EXERCICE : 9

Soit l'équation différentielle (E) $y' + 3y = 10 \cos x$.

- Résoudre l'équation différentielle (F) :
 $y' + 3y = 0$
- Déterminer les nombres réels α et β tels que la fonction g définie par :
 $g(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ soit une solution de l'équation (E)

- c. Démontrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (F).
- d. En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).

EXERCICE : 10

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sin(2x) + e^{-x} \cos(x - \frac{\pi}{4})] dx$$

à l'aide d'une équation différentielle :

- Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$ (E₁)
- On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$ (E)

a. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ soit solution de l'équation (E).

f désignant une numérique, on désigne par g la fonction $f - f_1$.

b. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E₁).

En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E).

Vérifier que la fonction f de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $f'(0) = 2$ et

$$f(x) = \sin(2x) + e^{-x} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f .

- En déduire la valeur de l'intégrale I .

EXERCICE : 11

- Déterminer l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$ (1).
- Etant donné une fonction numérique de variable réelle x , g deux fois dérivable sur $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$.
Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''(\frac{1}{x})$ et de x .
- On considère l'équation différentielle.
 $y'' = -\frac{1}{x^4}y$ (2)
a) Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$ est solution de (1).
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation de (2) définies sur chacun des intervalles et $]0, +\infty[$.
- Soit g une solution de l'équation (2) définie sur $]0, +\infty[$.

- Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$.

PROBLEME : 1

A) Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (E)$$

- Quelles sont les solutions de (E) ?
 - Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$? On dit que (C) et (C') sont tangentes.
- Représenter, dans un même repère orthonormé les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives.
- λ étant un réel strictement positif, soit h_λ les fonctions telles que :

$$h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$$

- Montrer que h_λ est solution de (E).
- Soit C_λ la courbe représentative de h_λ . Après avoir calculé, en fonction de λ les coordonnées du point commun à des courbes C_λ et (C'), montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.
- Préciser les positions relatives de C_λ et (C').

B) Soit (E') l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$ (E')

- Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (E').
- On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.

Montrer que f est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E). En déduire les fonctions f solutions de (E').

- Déterminer la solution de (E') dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0, 2)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

PROBLEME : 2

Partie A

- (E₀) désigne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.
Déterminer les solutions générales de (E₀).
- (E) est l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
a. Vérifier que la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 e^{-x}$ est solution de (E).

- Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0) .
- Déterminer toutes les solutions de (E).
- Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f_0(0) = 4$ et $f_0'(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'unité graphique étant 1 cm)

- Etudier les variations de f et tracer (C) avec soin.
- En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E), déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R} .

(On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t) dt$)

- Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^n f(t) dt$.
 - Exprimer I_n en fonction de n et interpréter graphiquement.
 - Etudier la convergence de la suite (I_n) , puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul par

- Vérifier que pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\text{et } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e-9}{ne}$$

- Etablir que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n \leq \int_0^1 f(t) dt \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$.

- En déduire pour tout entier naturel n non nul on a : $I_1 - \frac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$.

- Déterminer la convergence de la suite u_n , puis préciser sa limite.

PROBLEME : 3 Partie I On donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'équation

$$\text{différentielle } (E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x} ;$$

- On fait l'hypothèse que deux fonctions f et g définies et dérivables sur \mathbb{R} , vérifient pour tout réel x : $g(x) = h(x)e^{-x}$.
 - Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout réel x $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.
 - En déduire la fonction h associée à une solution de g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?
- Soit φ une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
 - Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de $(F) : y' + y = 0$.
 - Résoudre (F) .
 - Déterminer la solution générale de l'équation (E_n) .
 - Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$

Partie II : On pose pour tout réel x ,

$$f_0(x) = e^{-x} \text{ et } f_1(x) = x e^{-x}.$$

- Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.
 - Pour tout entier n strictement positif on définit la fonction f_n comme solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la partie I, montrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$: $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.
- Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$;
 - Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$.
 - En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

c) Montrer pour tout entier naturel k non

$$\text{nul, l'égalité : } I_k - I_{k-1} = \frac{1}{k!} e^{-1} ;$$

d) Calculer I_0 et en déduire que :

$$I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

e) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$

PROBLEME : 4

1. Soit l'équation différentielle : $(E_m) : my'' + 2y' + 2y = 0$; où m est un réel.
 - a. Déterminer suivant les valeurs de m , l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} solutions de l'équation (E_m) .
 - b. Déterminer la solution (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(0,1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$.
2. Soit $f(t)$ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par $f(t) = e^{-t} \cos t$. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités (2cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).
3. Soit g le prolongement à \mathbb{R} de f .
 - a. Comparer $f(t)$ et $g(t + 2\pi)$. Donner alors le sens de variation de g .
 - b. On pose $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -e^{-t}$. On note (C_u) et (C_v) leurs courbes représentatives respectives et (G) celle de

g dans le même repère. Quels sont les points communs à (G) et (C_u) d'une part et à (G) et (C_v) d'autre part ?

- c. Montrer qu'en chacun de ses points les deux courbes ont même tangente.
 - d. Démontrer que g admet une limite en $+\infty$. On fait remarquer que $-1 \leq \cos t \leq 1$.
4. Pour tout réel k on pose : $a_k = \int_{\frac{\pi}{2} + k\pi}^{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} g(t) dt$.
 - a. Calculer a_k (on pourra faire deux fois une intégration par parties).
 - b. Pour tout entier n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$.
Monter que la suite (S_n) admet une limite. Interpréter géométriquement ce résultat.
 5. Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la courbe (Λ) définie par le système d'équations.

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \cos t \\ y(t) = e^{-t} \sin t \end{cases} ; \text{ pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$
 - a. Etudier les variations de x et y et dresser le tableau de variations conjointes.
 - b. Soit M_t le point de (Λ) de paramètre t et \vec{V}_t le vecteur dérivé lui correspondant. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{OM_t}; \vec{V}_t)$ est constant.
 - c. Représenter graphiquement (Λ) . On précisera les tangentes aux points de paramètre $-\frac{\pi}{2}$ et

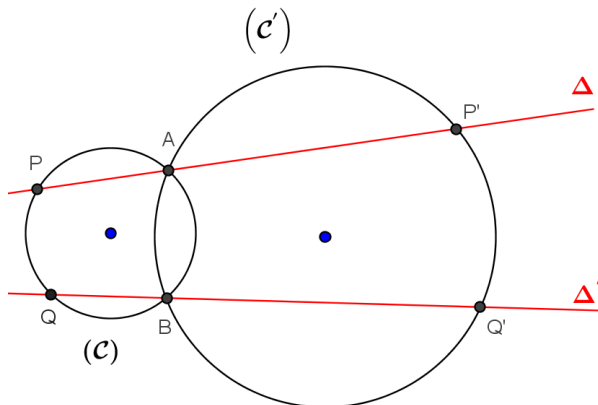
La GRANDE Série d'exercices sur : Cocyclicité, Isométrie et Similitude plane directe

M. DIACK

COCYCLICITES

Exercice 01

Soient (C) et (C') deux cercles sécants en A et B , Δ et Δ' deux droites passant respectivement par A et B distinctes de la droite (AB) . La droite Δ (respectivement Δ') recoupe (C) et (C') en P et P' (respectivement Q et Q').
On suppose les points A, B, P, Q, P' et Q' tous distincts.



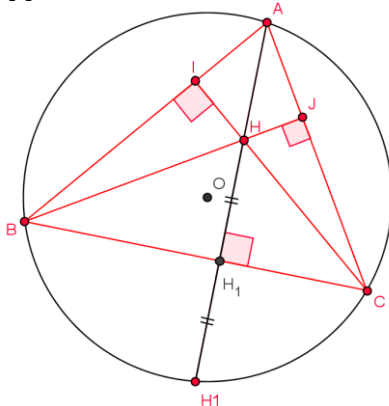
Montrer que les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles.

Exercice 02

Placer deux points A et B tels que $AB = 4$ cm.
Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et l'ensemble (E') des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{3\pi}{4} [\pi]$.

Exercice 03

Montrer à l'aide des angles orientés que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses cotés appartient au cercle circonscrit à ce triangle.



Exercice 04:

Soient A et B deux points dans le plan orienté.
Déterminer et construire le lieu \mathcal{P} des points M et le lieu \mathcal{P}' des points N tels que AMN soit un triangle isocèle, rectangle en A , et tels que M, N, B soient alignés.
On se limitera au cas où $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Exercice 05

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$

- 1) Faire une figure .
- 2) En utilisant la relation de Chasles , prouver que :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) .$$

- 3) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 06

On donne un triangle ABC et le point F diamétralement opposé à A sur le cercle passant par ABC . Pour un point M du plan, la droite passant par M et orthogonale à (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q .

- 1-) Démontrer que : M, F, C et Q d'une part et B, P, F et M d'autre part sont cocycliques.

En déduire que :

$$(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [\pi] .$$

- 2-) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels F, P et Q sont alignés.

- 3-) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [\pi]$.

Exercice 07

ABC est un triangle non rectangle, O est le centre de son cercle circonscrit (C) et H son orthocentre . Les droites (AH) et (BC) se coupent en Q ; les droites (BH) et (AC) se coupent en R ; les droites (CH) et (AB) se coupent en P .

- 1-) a-) Montrer que les points A, B, Q et R sont cocycliques .

En déduire que : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ}) [\pi]$

- b-) On note T un point quelconque de la droite tangente en C au cercle (C) .

Montrer que $(\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT}) [\pi]$ puis en déduire que les droites (RQ) et (CT) sont parallèles.

c-) Montrer que les droites (RQ) et (OC) sont perpendiculaires.

2-) a-) En utilisant la cocyclicité des points A, C, P et Q d'une part ; et Q, C, R et H

d'autre part, montrer que : $(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR})[\pi]$

b-) En déduire que (AH) est une bissectrice du triangle QRP.

Exercice 08

Soit (C) et (C') deux cercles sécants en A et en B. Soit I un point de (C) distinct de A et de B et soit J un point de (C') distinct de A et de B tels que I, J et A ne soient pas alignés. Une droite passant par B coupe (C) en M et (C') en N.

On suppose que les droites (IM) et (JN) sont sécants en K.

Démontrer que les points A, I, J et K sont cocycliques.

Exercice 09

Les parties I-), II-) et III-) sont indépendantes

I-) Soit ABC un triangle ; P, Q, R sont des points respectifs des droites (BC), (AC) et (AB) tels que les cercles circonscrits aux triangles AQR et CPQ soient sécants en deux points Q et I.

Montrer que le cercle circonscrit au triangle BRP passe par I.

II-) Soit ABC un triangle isocèle de sommet A, M un point du cercle circonscrit au triangle ABC distinct des sommets du triangle. La droite (AM) coupe la droite (BC) en P.

Montrer que le cercle circonscrit au triangle BMP est tangent à (AB) en B.

III-) On considère deux cercles sécants en A et B. On mène par A une sécante rencontrant respectivement les cercles en M et N, par B une sécante les rencontrant respectivement en M' et N'.

Montrer que les droites (MM') et (NN') sont parallèles.

Exercice 10

Soit ABCD un quadrilatère convexe de diagonales [AC] et [BD] se coupant en I. Soit P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AB), (BC), (CD) et (DA).

1-) Construire la configuration précédente.

2-) Montrer que les points A, P, I et S sont cocycliques. Citer trois autres cocyclicités similaires.

3-) a-) Montrer que : $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})[\pi]$

b-) Montrer que : $(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})[\pi]$.

4-) En déduire que : $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = 2(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA})[\pi]$

5-) Montrer que les points P, Q, R et S sont cocycliques si et seulement si les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires. Illustrer cette situation sur une figure.

Exercice 11

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC non aplati et non rectangle.

1-) Montrer que H est différent de A, B et C.

2-) Calculer $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB})$ en fonction de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

3-) Soit K_C l'image de H par la réflexion par rapport à la droite (AB).

Montrer que les points A, B, C et K_C sont cocycliques.

4-) Soit (C) le circonscrit au triangle ABC et soit C_A, C_B, C_C les images de (C) par les réflexions par rapport respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB).

Montrer que H est l'unique point commun aux trois cercles C_A, C_B, C_C .

ISOMETRIES ET SIMILITUDES PLANES DIRECTES

Exercice 01

1) Montrer qu'une isométrie conserve le produit scalaire.

2) Montrer qu'une isométrie est une application affine.

Exercice 02

Soient A, B, A' et B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A'B' = AB$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et on pose $t(B) = B_1$.

1) Justifier qu'il existe une rotation r de centre A' qui transforme B_1 en B'.

2) On pose $f = r \circ t$.

Démontrer que f est un déplacement qui vérifie $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

3) Soit g une isométrie vérifiant $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.

a) Démontrer que $f^{-1} \circ g$ laisse invariant les points A et B.

b) En déduire la nature de $f^{-1} \circ g$ et que f est unique.

4) Quelle conclusion peut-on tirer de cette étude?

Exercice 03

A) Dans le plan orienté, on trace un triangle non isocèle MNP tel que $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Soient les points A et B tels que :

✓ A est sur le segment [MN]

✓ B est sur le segment [MP]

✓ $AN = BP$, $A \neq N$.

Justifier l'existence d'une rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(N) = P$. Préciser son angle et son centre.

B) Déterminer la nature de l'application f associée à l'application complexe F définie par :

1) $F(z) = iz + 1 - i$.

2) $F(z) = i\bar{z} + 1 - i$

Exercice 04

Soit Ω un point du plan et f l'application du plan dans lui-même définie par :

▪ $f(\Omega) = \Omega$.

▪ Si $M \neq \Omega$,

$M' = f(M)$ est le milieu de $[\Omega, M_1]$, ou M_1 est tel que $\Omega M M_1$ est un triangle équilatéral de sens direct.

1. Soit M un point distinct de Ω .

Montrer que $M' = f(M)$ est tel que : $\Omega M' = \frac{1}{2} \Omega M$
 et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{3}$.

2. Soit h l'homothétie de centre Ω , de rapport $\frac{1}{2}$ et r la rotation de centre Ω , d'angle $\frac{\pi}{3}$.
 Prouver que $f = h \circ r = r \circ h$.
3. Montrer que f multiplie les distances par $\frac{1}{2}$ et conserve les angles orientés.

Exercice 05

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 On considère la transformation s , d'écriture complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 2$.

1. Déterminer la nature de s et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'affixe du point C image par S du point $A(2 - i\sqrt{3})$.
3. Calculer l'affixe du point B tel que $S(B) = O$.
4. Donner l'expression analytique de s .

Exercice 06

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la transformation S d'écriture complexe $z' = (1 + i)z + 4 - 2i$, les points A et B d'affixes respectives $2 + 4i$ et $1 - i$

- 1) Déterminer la nature de S et déterminer ses éléments caractéristiques.
- 2) Déterminer l'image de la droite (AB) par une similitude S .

Exercice 07

Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ de centre O .

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s de centre A qui transforme B en O .
2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s' qui transforme B en O et A en D .

Exercice 08

On dit qu'un triangle $A'B'C'$ est directement semblable à un triangle ABC s'il existe une similitude directe s telle que $A' = s(A)$, $B' = s(B)$, $C' = s(C)$.

1. Démontrer que si $A'B'C'$ est directement semblable au triangle ABC , alors ABC est directement semblable à $A'B'C'$.
2. Démontrer que si les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables, alors :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'}) [2\pi]$$

3. Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) [2\pi] \end{array} \right.$ sont directement semblables.

4. Démontrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}) [2\pi]$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}) [2\pi]$ sont directement semblables.

Exercice 09

On considère les points A, B, C, P, Q et R dont les affixes respectives sont :

$$a = 1 - i; b = 2 + 3i; c = -2 + i; p = -1 + 3i; q = 2 - 2i; \text{ et } r = 4 + 4i.$$

Démontrer que les triangles ABC et PQR sont directement semblables.

Exercice 10

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et G son centre de gravité.

Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s de centre A , qui transforme G en B .

Exercice 11

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et s la similitude directe de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, qui

transforme B en A . Déterminer le centre de cette similitude et construire l'image C' de C par s .

Le centre O de la similitude est tel

$$\text{que } \begin{cases} OA = 2OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points $A(2,0)$, $B(1,1)$, $C(-2,-1)$, $A'(3,10)$, $B'(4,10)$ et $C'(-3,-1)$.

Soit f l'application affine du plan telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

- 1-) Démontrer que f est bijective.
- 2-) Déterminer l'expression analytique de f .

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M

$$\text{associe le point } M' \text{ telle que : } \begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

- 1-) Démontrer que $f \circ f = \text{Id}$.
- 2-) Démontrer que l'ensemble des points invariant est une droite (D) que l'on déterminera.
- 3-) Soit M un point du plan et M' son image par f
 - a-) Démontrer que le milieu de $[MM']$ appartient à (D)
 - b-) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à celle de (D)
 - c-) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

Exercice 14

On considère trois points non alignés A, B et C . Pour tout réel α on définit l'application f_α du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

1-) Montrer que f_1 est une translation que l'on précisera.

2-) a-) On suppose que $\alpha \neq 1$. Montrer que f_α admet un unique point invariant G_α et que : $\overrightarrow{CG_\alpha} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ où k est un réel dépendant de α que l'on précisera.

b) Déterminer l'ensemble des points G_α lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 1$.

3-) On suppose que $\alpha \neq 1$. Exprimer $\overrightarrow{G_\alpha M'}$ en fonction de $\overrightarrow{G_\alpha M}$ puis en déduire la nature de f_α suivant les valeurs de α . On précisera ses éléments caractéristiques.

Exercice 15

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par Γ le cercle circonscrit à ABC et O son centre. La médiatrice de $[BC]$ coupe Γ en A et D . On note A' le point d'intersection de des droites (BD) et (AC) .

1-) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C .

2-) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$S_{(BD)} \circ S_{(DC)} ; S_{(CA)} \circ S_{(AB)} ; S_{(DC)} \circ S_{(CA)}$$

2-) On note $f = S_{(BD)} \circ S_C \circ S_{(AB)}$.

a-) Déterminer $f(A)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f .

b-) En déduire la nature de la transformation $S_{(BD)} \circ S_C$.

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , f l'application du plan qui associe à tout point $M(x; y)$ le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

1-) Montrer que f est une isométrie.

2-) Montrer que f admet un unique point invariant O .

3-) En déduire que la nature de f

4-) On pose $I = f(I)$ avec $I(1, 0)$.

a-) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'})$.

b-) En déduire les éléments caractéristiques de f .

5-) Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(D): y = x$.

Démontrer qu'il existe une symétrie orthogonale S' telle que $f = S' \circ S$ dont on déterminera l'axe.

Exercice 17

On note H l'orthocentre du triangle équilatéral ABC . On désigne par r_A , r_B et r_C les rotations de centres

respectifs A, B et C et de même angle $\frac{\pi}{3}$ et on pose :

$$f = r_A \circ r_B \text{ et } g = r_C \circ r_B \circ r_A.$$

1-) Calculer $f(A)$, $f(B)$ et $g(B)$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et de g .

2-) On désigne par $S_{(AB)}, S_{(BC)}$ et $S_{(CA)}$ les réflexions d'axes respectifs $(AB), (BC)$ et (CA) et on pose $h = S_{(CA)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$ et soit (d) la droite parallèle à (AC) passant par B .

$$\text{Montrer que } S_{(AB)} \circ S_{(BC)} = S_{(d)} \circ S_{(AB)}$$

3-) Soit B' le milieu de $[AC]$. Montrer que $h = t_{\frac{1}{2}BB'} \circ S_{(AB)}$.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $AB < AC$.

On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu de $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$.

La droite (OE) coupe Γ en I et J , tels que J et A soient sur le même arc de corde $[BC]$ du cercle Γ .

1) a) Faire une figure.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

2) a) Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que : $R(A) = P$ et $R(B) = C$.

Déterminer son angle.

b) Démontrer que son centre est un point de Γ que l'on précisera.

c) Quelle est la nature du triangle JAP ?

3) a) Déterminer l'image de C par $R \circ S_E$ où S_E est la symétrie de centre E

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $R \circ S_E$

Exercice 19 Bac C 1994

On considère un triangle ABC direct. On appelle I, J, K les milieux respectifs des cotés $[BC], [CA], [AB]$. Soit N l'image de C par la rotation de centre J et

d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et P l'image de A par la rotation

de centre K et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $KP = IJ$.

2) On appelle r la rotation qui transforme K en J et P en I .

Quelle est une mesure de l'angle de cette rotation ?

3) Démontrer que les triangles IJN et IKP sont isométriques.

En déduire l'image de I par r et que le triangle PIN est isocèle et rectangle en I .

4) On appelle r_1 la rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et

r_2 la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image de B par $r_1 \circ r_2$.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_1 \circ r_2$.

Exercice 20

ABC est un triangle de sens direct, $ABED$ et $ACGF$ sont des carrés construits extérieurement à ABC sur les cotés $[AB]$ et $[AC]$. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, K le milieu de $[DF]$, I centre du carré $ABED$ et J centre du carré $ACGF$.

1) Soient les quarts de tours directs R et R' de centres respectifs I et J .

Démontrer que $R \circ R' = R'^{-1} \circ R^{-1} = S_K$ (avec S_K symétrie de centre K).

2) Déterminer l'image de la droite (AH) par S_K . En déduire que les points K, A, H sont alignés.

3) Soit A' l'image de du point A par S_K .

a) Démontrer que $R(C) = A'$. En déduire que $(EC) \perp (A'B)$.

b) Démontrer que $(BG) \perp (A'C)$.

4) En déduire des questions précédentes que les droites $(EC), (BG)$ et (AH) sont concourantes.

Exercice 21

Dans le plan orienté, on considère le triangle MPQ tel que :

$$(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Soit Ω le symétrique de M par rapport au milieu de $[PQ]$ et soit H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MPQ . S la similitude de centre M qui transforme H en P .

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S .

2) a) Montrer que $S(Q) = \Omega$

b) En déduire l'image de la droite (PQ) par S .

Exercice 22

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B . Sur la figure, on prendra 8 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1-) Étudier et construire l'ensemble \mathcal{E} des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

2-) Étudier et construire l'ensemble \mathcal{F} des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

3-) Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$. On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D .

a-) Déterminer le rapport et l'angle de S .

b-) On note I le centre de la similitude S . Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. En déduire la position du point I et le placer sur la figure.

c-) Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD .

Exercice 23

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

1-) Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B .

a-) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1 .

b-) Montrer que $S_1(C) = I$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1 .

2-) Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C .

a-) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2 .

b-) Soit M un point de (BI) , M' son image par S_2 . On suppose que M et M' sont distincts de I . Montrer que les quatre points A, M, I, M' sont cocycliques.

Exercice 24

Dans le plan orienté on considère un carré direct $MNPQ$ de centre O . Soit I un point de $[NP]$ distinct de N . On note J le point d'intersection de (MI) et (PQ) . La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L .

1-) Faire une figure avec $NP = 5\text{cm}$ et $NI = 2\text{cm}$ (On placera (NP) « verticalement 3 » c'est-à-dire parallèlement au grand côté de la feuille).

2-) Soit R le quart de tour de direct de centre M .

a-) Préciser l'image de la droite (NP) par R

b-) Déterminer les images de K et I par R .

c-) Quelle est la nature des triangles KMJ et IML .

2-) On note E le milieu du segment $[IL]$; F celui de $[JK]$. Soit S la similitude directe de centre M , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a-) Préciser les images de K et de I par S .

b-) Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit le segment $[NP]$ privé de N

c-) Déduire de ce qui précède que les points O, N, E et Q sont alignés.

Exercice 25

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_B la rotation de centre

B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que :

$$r_B(A) = D \text{ et } r_C(D) = E.$$

1-) Montrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie de centre B. Préciser la position du point B.

2-) On admet qu'il existe une seule similitude plane directe S de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$. En déduire que $S(E) = D$.

3-) Soit Ω le centre de la similitude S.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DE.

Construire le point Ω .

4-) a-) Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).

b-) Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD]. En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu segment [DE].

Exercice 26
Soit S la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = (1+i)z + 2.$$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

2) Soit Ω le centre de S. Quelle est la nature du triangle $M\Omega M'$, où M' est l'image de M par S.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $OM = OM'$.

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$

Exercice 27

Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $f_\alpha : M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que

$$z' = (-1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha + 2.$$

1) Déterminer le module et un argument de $-1 + i \tan \alpha$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_α .

3) Soit h_α l'homothétie de centre Ω (d'affixe 1) et de rapport $\frac{1}{\cos \alpha}$. Donner une écriture complexe de la rotation r_α telle que $f_\alpha = r_\alpha \circ h_\alpha$.

Exercice 28

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On appelle T l'application du plan dans lui-même qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel

$$\text{que : } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

1-) On appelle z l'affixe du point M et z' celle de M' image de M par T. Ecrire z' en fonction de z

2-) Montrer que T est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques, on notera son centre Ω et ω l'affixe de Ω .

3-) Montrer que pour $M \neq \Omega$ on a : $\frac{z' - \omega}{\omega - z} = i$. En déduire

une construction géométrique de $M' = T(M)$

4-) Donner une équation cartésienne de la droite (D'), image de (D) : $2x - y + 1 = 0$ par T.

5-) Soit A le point d'affixe $-1 + i$ et soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.

Pour M un point du plan, on pose $M' = T(M)$, $M'' = R \circ T(M)$ et on appelle g l'application du plan dans lui-même qui au point M associe le point G barycentre des points pondérés $(M, 1)$, $(M', -2)$ et $(M'', -1)$. Ecrire une expression complexe de g. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 29

dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = u^2 z + u - 1; \text{ où } u \text{ désigne un nombre complexe.}$$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une translation ; caractériser f chacune des valeurs trouvées.

2) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser f.

3) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une homothétie de rapport -2 ; caractériser f.

4) Caractériser f lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 30

Pour tout nombre réel a non nul, on désigne par f_a l'application de C dans C qui associe à tout nombre complexe z le nombre complexe $Z - ia = \frac{1}{a}(z - ia)$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note F_a qui associe à tout point m d'affixe z, le point M d'affixe $f_a(z)$.

1-) Montrer que F_a admet un unique point invariant S_a dont on déterminera l'affixe.

2-) a-) Pour $m \neq S_a$, exprimer en fonction de a le rapport $\frac{S_a M}{S_a m}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{S_a m}, \overrightarrow{S_a M})$.

b-) En déduire la nature de l'application F_a et préciser ses éléments caractéristiques.

3-) Montrer que $F_{a^{-1}} \circ F_{-a}$ est une translation.

SERIE D'EXERCICES N°7

Courbes paramétrées

Classe: Terminale S1

Exercice 0

Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation est:

t	-2	-1	0	1	2							
$x'(t)$	-4	-	-2	-	0	+	2	+	4			
$x(t)$	4		\	1	\		0	/	1	/	4	
$y(t)$				2		\	0	\		-2	/	2
$y'(t)$	-2	/			\	0	-	-3	-	0	+	9
	9	+	0	-	-3	-	0	+	9			

Exercice 1



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe (\mathcal{C}) , ensemble des points $M(t)$

dont les coordonnées sont définies par:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t-1} \\ y(t) = \frac{t}{t-1} \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de cette courbe paramétrée.
2. Déterminer les asymptotes à (\mathcal{C})
3. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variations conjointes.
4. Déterminer les tangente (\mathcal{C}) aux points particuliers.
5. Déterminer l'intersection de (\mathcal{C}) et les axes de coordonnées.
6. Chercher les coordonnées des points multiples de (\mathcal{C}) .
7. Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

Exercice 2



Dans le plan \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé, on considère la **courbe de Lissajous** (\mathcal{L}) dont

une représentation paramétrique est:
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à (\mathcal{L}) .
 - (a) Montrer que F est périodique de période $T = 2\pi$.
 - (b) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
 - (c) Par quelle isométrie le point $M(\pi - t)$ se déduit-il de $M(t)$?
 - (d) Préciser le domaine d'étude de F .
2. Étudier les variations de de F puis dresser son tableau de variation .
3. Construire la courbe (\mathcal{L}) .

Exercice 3



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère la **Cycloïde** (Γ) définie par:

$$M(t) : \begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Étudier la périodicité de la fonction vectorielle F associée.
2. Examiner les symétries usuelles de (Γ) puis réduire le domaine d'étude final de F .
3. Calculer les fonctions dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variation de F .
4. Tracer l'allure de (Γ) .

Exercice 4



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère l'**astroïde** (\mathcal{A}) définie par:

$$M(t) : \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Calculer les coordonnées de $M(t + 2\pi)$, $M(-t)$, $M(\pi - t)$, $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
 (b) En déduire que le domaine d'étude est $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
2. Dresser le tableau de variation de (\mathcal{A}) .
3. Tracer l'allure de (\mathcal{A}) .

Exercice 5



Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe (\mathcal{C}) , ensemble des points $M(t)$

dont les coordonnées sont définies par:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \ln |t| \\ y(t) = t \ln |t| \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

1. (a) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
 (b) Par quelle isométrie le point $M\left(\frac{1}{t}\right)$ se déduit-il de $M(t)$?
 (c) En déduire que le domaine de définition \mathbb{R}^* de \mathcal{C} peut être réduit à $]0; 1]$.
2. Tracer la courbe (\mathcal{C}) .

Exercice 6



Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique $4cm$. On considère l'application F de \mathcal{P} dans lui même qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$. L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées:
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) - \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) - \sin t \end{cases},$$
 avec $t \in [-\pi; \pi]$. Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ) .
2. Comparer $x(t)$ et $x(-t)$ d'une part et $y(t)$ et $y(-t)$ d'autre part. En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie dont on précisera.
3. Etudier les variations de x et y sur $[0; \pi]$.
4. Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0; \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Série d'exercices : Complexes et similitudes planes

Exercice 1

dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :
 $z' = u^2z + u - 1$; où u désigne un nombre complexe.

- 1) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une translation ; caractériser f chacune des valeurs trouvées.
- 2) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser f .
- 3) Déterminer l'ensemble des valeurs de u pour lesquels f est une homothétie de rapport -2 ; caractériser f .
- 4) Caractériser f lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 2

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie

par $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. On note A le point d'affixe 2 .

- 1) a) Déterminer l'affixe de A' image de A .
b) Déterminer l'affixe du point P tel que $f(P)=0$.
- 2) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
- 3) Lorsque le point M est distinct de A .
a) Démontrer que le triangle AMM' est rectangle en M' .
b) Le point M et le milieu du segment $[AM]$ étant donnés.
Dédurre une construction au compas du point M'

Exercice 3

Soit $\alpha \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $f_\alpha : M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que $z' = (-1 + i \tan \alpha)z - i \tan \alpha + 2$.

- 1) Déterminer le module et un argument de $-1 + i \tan \alpha$.
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_α .
- 3) Soit h_α l'homothétie de centre Ω (d'affixe 1) et de rapport $\frac{1}{\cos \alpha}$. Donner une écriture complexe de la rotation r_α telle que $f_\alpha = r_\alpha \circ h_\alpha$.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives a , b , c et d telles que :

$$a = 1 ; b = e^{i\frac{\pi}{3}} ; c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

- 1) a) Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d .
b) Représenter les points A , B , C et D .
c) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.
- 2) Montrer que les points D , A et C sont alignés.
- 3) Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C .
- 4) On note E et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points E , C et G sont alignés.

Série d'exercices : Complexes et similitudes planes

Exercice 5

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On appelle T l'application du

plan dans lui-même qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

1-) On appelle z l'affixe du point M et z' celle de M' image de M par T . Ecrire z' en fonction de z

2-) Montrer que T est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques, on notera son centre Ω et ω l'affixe de Ω .

3-) Montrer que pour $M \neq \Omega$ on a : $\frac{z' - \omega}{\omega - z} = i$. En déduire une construction géométrique de

$M' = T(M)$

4-) Donner une équation cartésienne de la droite (D') , image de $(D) : 2x - y + 1 = 0$ par T .

5-) Soit A le point d'affixe $-1 + i$ et soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.

Pour M un point du plan, on pose $M' = T(M)$, $M'' = R \circ T(M)$ et on appelle g l'application du plan dans lui-même qui au point M associe le point G barycentre des points pondérés $(M, 1)$, $(M', -2)$ et $(M'', -1)$. Ecrire une expression complexe de g . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g .

Exercice 6

Dans le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct $ABCD$ de centre I tel que et

$AB = 3a$ et $BC = a\sqrt{3}$ où a est un réel strictement positif donné. 1)

Déterminer la nature du triangle BCI

2) Soit

E le point sur le segment $[BD]$ tel que $BE = \frac{3}{4}BD$ Donner le rapport k et l'angle θ de la

similitude directe s telle que $s(B) = I$ et $s(E) = C$.

3) On

suppose dans la suite que $a = 1$ et on pose : $\vec{u} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{AD} \overrightarrow{AD}$ et on munit ensuite le

plan du repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$

a) Déterminer les affixes de B, I .

b) En déduire l'écriture complexe de la similitude s

4) Déterminer l'affixe de Ω centre de la similitude s et celle du point $A' = s(A)$.

5) Soit la suite de points M_n d'affixes z_n définie par $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N} ; M_{n+1} = s(M_n)$

a) Démontrer que la suite (α_n) définie par : $\alpha_n = z_{n+1} - z_n$ est une suite géométrique dont on

Précisera le premier terme α_0 et la raison q_0 .

b) Exprimer en fonction de n la longueur de la ligne polygonale $L_n = M_0 M_1 M_2 M_3 \dots M_{3n}$ et déterminer la limite de cette longueur quand n tend vers $+\infty$

EXERCICE 7 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle et isocèle ABC tel que $AB = AC = p$

où p est un réel fixé strictement positif et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note D le symétrique de A par rapport à B , O le milieu $[CD]$ et (Γ) le cercle de diamètre $[CD]$. Placer sur une figure les points A, B, C, O et le cercle (Γ) .

On désigne par S la similitude plane directe tel que :
$$\begin{cases} S(D) = B \\ S(B) = C \end{cases}$$

Série d'exercices : Complexes et similitudes planes

On se propose de déterminer, les éléments caractéristiques de **S** par deux méthodes différentes.

On désigne par Ω le centre de **S**.

1) Méthode géométrique :

a) Déterminer le rapport k et l'angle α de la similitude **S**.

b) Montrer que : $(\overline{\Omega D}, \overline{\Omega C}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ (1)

$$\Omega C = 2 \Omega D \quad (2)$$

c) A l'aide de (1), prouver que Ω appartient au cercle (Γ) , puis, en utilisant (2) que $\Omega D = p$.

Etablir enfin que $B\Omega = BC$.

d) Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de $[\Omega C]$. Préciser la nature du quadrilatère $CAD\Omega$. Placer Ω sur la figure.

2) Utilisation de nombres complexes :

On pose : $\vec{u} = \frac{1}{p} \overline{AB}$, $\vec{v} = \frac{1}{p} \overline{AC}$ et on considère le repère orthonormal (A, \vec{u}, \vec{v}) du plan complexe.

a) Déterminer les affixes des points B, C et D.

b) Déterminer l'écriture complexe de **S**.

c) En déduire les coordonnées de Ω , puis retrouver les valeurs du rapport k et de l'angle α de **S** calculées en 1) a).

Exercice 8

Pour tout nombre réel a non nul, on désigne par f_a l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui associe à tout nombre complexe z le nombre complexe $Z - ia = \frac{i}{a}(z - ia)$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note F_a qui associe à tout point m d'affixe z , le point M d'affixe $f_a(z)$.

1-) Montrer que F_a admet un unique point invariant S_a dont on déterminera l'affixe.

2-) a-) Pour $m \neq S_a$, exprimer en fonction de a le rapport $\frac{S_a M}{S_a m}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overline{S_a m}, \overline{S_a M})$.

b-) En déduire la nature de l'application F_a et préciser ses éléments caractéristiques.

3-) Montrer que $F_{a^{-1}} \circ F_a$ est une translation

Exercice 9

Le plan affine (P) est muni d'un repère orthonormal direct ; on note (O, \vec{u}, \vec{v}) l'ensemble des nombres complexes non nuls ; (P^*) le plan (P) privé de o .

Soit l'application f de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$

On note F l'application de P^* dans P qui à tout point m de P^* d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe : $Z = f(z)$.

1-a) – Déterminer l'ensemble des points invariants par F .

b) – soit $M(Z)$ un point de P^* non invariant par F . Montrer que M est l'image par F de deux points de P^* . Vérifier que M est le milieu de $[m_1 m_2]$.

c) – On note $A(1+i)$, et $B\left(\frac{-1}{1+i}\right)$ placer A et B , en déduire la construction de l'image par F .

2) Dans cette question on cherche l'image de l'axe privé de o .

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$

a) Etudier les variations de g .

b) En déduire l'image par F de l'ensemble des points de l'axe réel de P^* .

Chap1 :Produit mixte produit vectoriel

EXERCICE 1 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne :

Les points $A(1 ; -2 ; 1)$, $B(2 ; -1 ; 3)$, $C(1; 1; 4)$ et $H(0; 0; 2)$ et la droite (Δ) définie par :
$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 2 \\ z = -t \end{cases}$$

1-a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Ecrire une équation du plan (ABC).

2-a) Démontrer que la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) en H.

b) Démontrer que H est équidistant des points A, B et C.

3) Soit M un point variable de (Δ) et $E(2; 2; 0)$ un point fixe de (Δ) .

Pour quelles valeurs de t le volume du tétraèdre MABC est-il égal au double de celui du tétraèdre EABC ?

4-a) Donner une équation du plan médiateur du segment [AE].

b) Donner une équation de la sphère S circonscrit au tétraèdre EABC.

EXERCICE 2 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (D) la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1) Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

2) On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} ; k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3) On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a) Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b) Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}(1; 1; -1)$.

a) Montrer que les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

b) Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 3 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les trois points $A(1; 2; -1), B(-3; -2; 3)$ et $C(0; -2; -3)$.

- 1-a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b-) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
- 2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$.
Démontrer que les plans (ABC) et P sont perpendiculaires.
- 3) On appelle G le barycentre des points pondérés $(A; 1), (B; -1)$ et $(C; 2)$.
 - a) Démontrer que G a pour coordonnées $(2; 0; -5)$.
 - b) Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan P.
 - c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
 - d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan P avec la droite (CG).
- 4) Démontrer que l'ensemble S des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12$$
 est la sphère dont on précisera les éléments caractéristiques.
- 5) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan P et de la sphère S.

EXERCICE 4 :

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

- 1) Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD) (On pourra calculer, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}$).
- 2) En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
- 3) On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].
 - a) Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.
 - b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$
- 4) Soit H le symétrique de A par rapport à G.
 - a) Démontrer que : $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
 - b) Démontrer que $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
 - c) En déduire que $HC = HD$.

EXERCICE 5 :

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC et OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1-a) Pourquoi (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ? Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b-) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontre de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c-) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2) L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 3)$.

a-) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b-) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant O et orthogonale au plan (ABC).

c-) Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $H\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$.

3-a) Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b-) Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c-) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

EXERCICE 6 : (BAC S1 2019)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(0; 0; 3\sqrt{2})$; $B(4; 0; -\sqrt{2})$ et $C(-2; -2\sqrt{3}; -\sqrt{2})$ et $D(-2; 2\sqrt{3}; -\sqrt{2})$.

1-a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

b-) Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires ; puis démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier.

c-) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

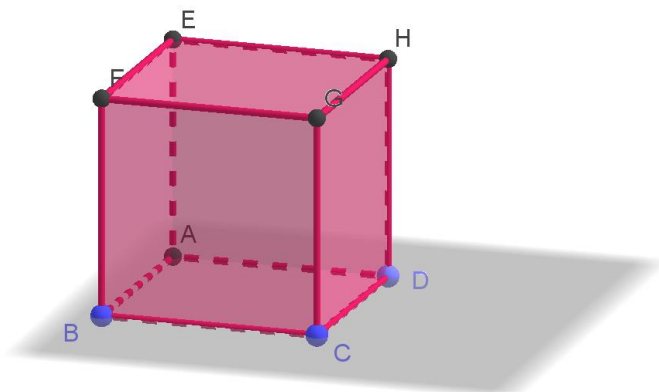
2) On note P, Q, R et S les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC].

a-) Déterminer la nature exacte du quadrilatère PQRS.

b-) Calculer l'aire du quadrilatère PQRS.

EXERCICE 7 :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 représenté ci-dessous. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.



- 1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
- 2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
 - a) Calculer les coordonnées de I.
 - b) Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AG}$. Que peut-on déduire pour les points A, I et G ?
- 3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur (BDE).
 Pour tout réel k, on définit deux points M_k et N_k , ainsi qu'un plan P_k de la façon suivante :
 - M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$;
 - P_k est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
 - N_k est le point d'intersection du plan P_k et la droite (BC).
 Identifier les $P_{\frac{1}{3}}, M_{\frac{1}{3}}, N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
- 4) a-) Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
 b-) déterminer une équation du plan P_k dans ce repère.
 c-) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1; 3k - 1; 0)$.
- 5) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC).
- 6) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

EXERCICE 8 :

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace. Trouver l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\begin{aligned}
 \text{a-)} \quad \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{AB} &= \vec{0} & \text{b-)} \quad (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \wedge (2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}) &= \vec{0} \\
 \text{c-)} \quad (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) &= \vec{0} & \text{d-)} \quad (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} &= 0 \\
 \text{d-)} \quad (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} &= 0 & &
 \end{aligned}$$

EXERCICE 9:

On considère un tétraèdre ABCD. On note par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD]. On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

- 1) Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G. Dans la suite, on suppose que $AB = CD, BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre est équifacial car ses arêtes sont isométriques).
- 2-a) Quelle est la nature du quadrilatère IKLJ ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et LMLN.

b-) En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même que les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites ((KL) et (KL) sont orthogonales.

3-a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b-) Quelle est la valeur du produit scalaire $\vec{IJ} \cdot \vec{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer, de même, que (IJ) est orthogonale à (CD)

c-) Montrer que G appartient aux plans médiateurs [AB] et [CD].

d-) Comment démontrer que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ?

EXERCICE 10 :

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$. On note K le barycentre des points pondérés $(D; 1)$ et $(F; 2)$.

1) Montrer que K a pour coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

2) Montrer que (EK) et (DF) sont orthogonales.

3) Calculer la distance EK.

4) Soit M un point du segment [HG]. On note $m = HM$ ($m \in [0; 1]$).

a) Montrer que pour tout $m \in [0; 1]$, le volume du tétraèdre EMFD en unités de volume est égal à $\frac{1}{6}$.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de (MFD) est $(-1 + m)x + y - mz = 0$.

5) On note d_m la distance du point E au plan (MFD).

a-) Montrer que $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$, $\forall m \in [0; 1]$.

b-) Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.

c-) En déduire que si la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

Série 2 : Compléments sur les fonctions

I) Etude de fonctions

EXERCICE 1 :

On considère la fonction f définie et deux fois dérivables sur $[a; b]$ tel que $f(a) = f(b)$. Soit c un réel de $[a; b]$. On définit la fonction g par $g(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$.

En appliquant le théorème de Rolle aux fonctions f_1 et f_2 définies par

$f_1(x) = f(x) - g(x)$ et $f_2(x) = f'(x) - g'(x)$, démontrer qu'il existe un réel $d \in [a; b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(d).$$

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $I = [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \sqrt{1 + \tan x}$. (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1-a) Montrer que f est dérivable sur $] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ et calculer $f'(x)$.

b-) En déduire la dérivabilité de f à droite de $-\frac{\pi}{4}$.

2) Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{x^4 - 2x + 2}$.

4) Soit (U_n) la suite définie par sur \mathbb{N} par $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{2n} f^{-1}(k)$.

a) Montrer $\forall x \in \mathbb{N}, f^{-1}(n) < U_n < f^{-1}(2n)$.

b) En déduire que (U_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

EXERCICE 3 :

1) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ admet des primitives sur \mathbb{R} . On notera F la primitive de f vérifiant $F(0) = 0$.

2) Etudier la parité de F et préciser le sens de variations de F sur \mathbb{R} .

3) a) Etudier les variations de la fonction $\square(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.

b-) En déduire qu'il existe une constante c telle que pour tout $x > 0$, on ait

$$F(x) = c - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

c-) montrer que la limite de F en $+\infty$ est égale à c .

4) On pose pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = \tan x$.

a) Montrer que la fonction $\varphi(x) = F \circ g(x) - x$ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $F \circ g(x) = x$.

EXERCICE 4 :

A) Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1-a) Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ vers $[0; 1]$. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

b) Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0; 1]$.

b) Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Montrer que $\forall x \in [0; 1], (f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, puis tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

3) Soit $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq V_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire que $(V)_n$ est convergente et calculer sa limite.

4) Montrer que l'équation $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet une unique solution $\alpha \in]0; 1[$. Vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

B) 1) Soit g définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b) montrer que $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x) = 1$.

2) Soit la fonction h définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par $h(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

a) Etudier les variations de h et dresser le tableau de variations de h . En déduire $h\left([0; \frac{1}{2}]\right)$.

3) Soit la fonction définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par $k(x) = f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

a) Montrer que k est dérivable sur $[0; \frac{1}{2}]$ et calculer $k'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2f^{-1}(x)$.

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ vérifiant
$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \\ \forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

f est la fonction logarithme népérien, (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

a-) Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$. Calculer $g'(x)$.

b-) En déduire que $\forall x > 0$, $g(x) = -f(x)$.

c) Prouver que $\forall x > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2) a) Dresser le tableau de variations de f .

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} .

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})'(x) = f^{-1}(x)$.

3) Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - (2\sqrt{x} - 2)$.

a) Calculer $\forall x \in [1; +\infty[$, $h'(x)$.

b) En déduire le sens de variations de h sur $[1; +\infty[$.

c) Prouver que $\forall x \in [1; +\infty[$, $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$.

d) Donner la nature de la branche parabolique de (C_h) en $+\infty$. Tracer (C_h) et (C_{h-1}) dans un même repère.

4) Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[$, $\frac{1}{x+1} \leq f(x+1) - f(x) \leq \frac{1}{x}$.

5) Soit la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{2n} \leq S_n \leq \frac{n+1}{n}$.

b) Montrer que (S_n) est monotone. En déduire que (S_n) est convergente.

c) Montrer en utilisant 4) que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ privé de 1,

$$f(2n+1) - f(n) \leq S_n \leq f(2n) - f(n-1).$$

d) En admettant que pour tout $a, b \in [0; +\infty[$, on a $f(a) - f(b) = f\left(\frac{a}{b}\right)$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = f(2)$.

EXERCICE 6 :

A) On considère la fonction $\tan: x \mapsto \tan x$ définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1) Montrer que la fonction \tan est une bijection de I vers \mathbb{R} .

2) La bijection réciproque de la fonction tangente est la fonction arc tangente notée \arctan .

a) Montrer que \arctan est dérivable sur \mathbb{R} .

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

B) On suppose l'existence d'une fonction définie sur $K =]-1; 1[$ et vérifiant $f'(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + 1$ et $f(0) = 0$. On note (C) sa courbe.

1) Donner les variations de f sur K .

2) Montrer que (T) d'équation $y = x$ est la tangente à (C) en $x_0 = 0$.

3) Montrer que (C) n'admet pas de tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

4) On note g la fonction définie sur K par $g(x) = f(x) - x$.

a) Justifier que la dérivabilité de g sur K et prouver que $g'(x) = \frac{1}{2}f^2(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de g sur K .

c) En déduire le signe de g sur K , puis les positions relatives de (C) et (T) .

d) Justifier l'existence de $f^2(x)$, calculer $f^2(0)$.

C) On se propose de déterminer l'expression de $f(x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de K vers $f(K)$.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et montrer que :

$$(f^{-1})'(x) = \text{Arctan}'\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right).$$

3) On considère la fonction $h(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

a) Dériver la fonction h .

b) En déduire que $f^{-1}(x) = \sqrt{2} \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$.

c) Déterminer $f^{-1}(0)$, puis la constante réelle k .

4) En déduire ce qui précède l'expression de $f(x)$.

EXERCICE 7 :

Pour tout entier naturel, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ par :

$$f_n(x) = \tan x - x - n.$$

1. Soit n un entier naturel fixé.
 - a-) Déterminer $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f_n(x)$.
 - b-) Etudier les variations de la fonction f_n .
 - c-) Démontrer que l'équation d'inconnue x , $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$. On note α_n cette solution.
 - d-) Donner suivant les valeurs de x le signe de $f_n(x)$.
2. La question 1-c) permet de définir la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - a-) Justifier que cette suite est bornée.
 - b-) Calculer $f_n(\alpha_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 - c-) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
 - d-) Déterminer la limite de $\tan(\alpha_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 - e-) Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

EXERCICE 8 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2} [$ par $f(x) = \sqrt[3]{\tan^2(x)}$.

1-a) Montrer que f est continue sur $]0; \frac{\pi}{2} [$ et dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2} [$.

b-) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; \frac{\pi}{2} [$ et montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.

2-a) Montrer que f réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2} [$ sur un intervalle à préciser.

b-) Tracer les courbes de f et f^{-1} dans un même repère. On calculera $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

c-) Sans calculer $f^{-1}(2)$, prouver que $f^{-1}(2) > \frac{\pi}{3}$. En déduire que $f^{-1}(2) > 1$.

3-a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty [$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

b-) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0.

Partie B :

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x-1}$ et $h(1) = a$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de h noté D_h .
- 2) Déterminer a pour que h soit continue sur D_h .

Partie C :

On pose φ la fonction définie par $\varphi(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

1-a) Montrer que φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$. En déduire que $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

b-) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{-1}(n) + f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ et } 1 \leq k \leq n, f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

a-) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

b-) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Partie D :

On pose $g(x) = f^{-1}(x + 1)$.

1) Etudier et représenter graphiquement g .

2) Montrer que : $\forall x \in [-1; +\infty[, 0 \leq g(x) \leq \frac{5}{3}$.

3) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-1; +\infty[$. (On admet $g'(x) < 1, \forall x > -1$, prouver que $1 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$).

4) On pose :
$$\begin{cases} V_0 = \frac{4}{3} \\ V_{n+1} = g(V_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a-) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq V_n \leq \frac{5}{3}$.

b-) Montrer que : $\forall x \in]1; \frac{5}{3}[$, on a $|g'(x)| \leq \frac{4}{5}$.

c-) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |V_n - \alpha|$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha$.

II) Primitives

EXERCICE 9 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f définie comme suit :

1-) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-2x}}; I =]-\infty; 2[$; 2) $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}, I =]1; 2[$;

3-) $f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, I =]0; +\infty[$

4-) $f(x) = \frac{1}{\cos^4(x)}, I =]0; \frac{\pi}{2}[$; 5-) $f(x) = (x+2)\sqrt{x-1}, I = [1; +\infty[$; 6-) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$,

$I =]1; +\infty[$; 7) $f(x) = x(1+x^2)^5, I = \mathbb{R}$; 8) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{3+x}{2x}}, I =]0; +\infty[$;

9-) $f(x) = x^2 \sin(1+x^3), I = \mathbb{R}$; 10-) $f(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^4}, I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

EXERCICE 10 :

Soient f et g les fonctions définies par :

$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$. Déterminer successivement les primitives sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ de chacune des fonctions $f + g, f - g, f$ et g .

EXERCICE 11 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \cos^3(x)$; 2) $g(x) = \sin^3(x)$; 3) $h(x) = \cos^4(x)$; 4) $i(x) = \sin^4(x)$;
- 5) $f(x) = \cos^2(x)\sin^2(x)$; 6) $k(x) = \cos^2(x)\sin^3(x)$; 7) $l(x) = \cos x \sin^4(x)$.

Série 3 :

EXERCICE 1 :

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$ b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i}$ d) $\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$ e) $\frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4}$ f) $(\frac{3-i}{1-2i})^2$.

2) Déterminer le module et un argument de z , en déduire la forme trigonométrique, exponentielle et algébrique de z dans chacun des cas suivants:

a) $z = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$; b) $z = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ c) $z = (1+i)^4$ d) $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
 e) $z = (\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i})^3$.

EXERCICE 2 :

Déterminer, en utilisant la méthode géométrique, l'ensemble des points M d'affixes z tels que :

a) $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 3|$ b) $|\frac{z+i}{1+i-z}| = 1$; c) $|(1+i)z + 2| = |\bar{z} - 2|$;

d) $|2iz + 1 - 4i| = 8$

EXERCICE 3:

Déterminer et représenter le lieu géométrique des points M d'affixe z du plan tels que ;

a) $\arg(z + 1) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ b) $\arg(3i - z) \equiv 0 [2\pi]$ c) $\arg((1+i)z + 1) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$

d) $\arg(\bar{z} + 5i) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ e) $\frac{z+i}{z-i}$ est un réel strictement positif f) $\frac{z+i}{z-i}$ est un imaginaire pur

EXERCICE 4:

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

2) Soit le polynôme $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - 2i)z - 2i$.

a-) Montrer que $P(z)$ possède une racine imaginaire pure.

b-) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 5 :

- 1) Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Montrer que :
 $j^{3n} = 1 ; j^{3n+1} = j ; j^{3n+2} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.
- 2) Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant : $Z = \frac{-1+3i\sqrt{3}}{10-2i\sqrt{3}}$.
- 3) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
 $Z_1 = \frac{\sqrt{6+i\sqrt{2}}}{2} ; Z_2 = 1 + i ; Z = \frac{Z_1}{Z_2}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
- 4) Déterminer le module et un argument de $Z = \frac{1}{1+i \tan x}$ lorsque $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$;
 $Z = \frac{1+\cos x x+i \sin x}{1-\cos x-i \sin x}$ si $x \neq 0[\pi]$.
- 5) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :
 $Z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} ; Z = \frac{3}{1-i} ; Z = \sin \theta + i \cos \theta ; Z = \frac{\cos \theta+i \sin \theta}{\cos \theta-i \sin \theta}$ où θ est un nombre réel fixé.

EXERCICE 6 :

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 1$.
- 2) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $[(\sqrt{3} - i)z + i]^4 = 1$

EXERCICE 7 :

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :
a) $(1 - i)z = 2 - 3i$ b) $\frac{i-z}{3} - \frac{1+iz}{2} = 2iz$ c) $2i(z + i)^2 + 4 = 0$
d) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$ e) $|z| - z = 1 + 2i$ f) $z = (1 + i)\bar{z} + 3 - 2i$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ les systèmes suivants:

$$a) \begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} i(z + i) + \frac{2-i}{z'} = 0 \\ 2z + i + \frac{1}{z'} = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 8 :

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): z^3 - (2 + 5i)z^2 + (8i - 5)z + 3(2 - i) = 0.$$

- 1.a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
b) Résoudre (E) dans \mathbb{C} .

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. (Unité graphique : 1,5cm), on considère les points A, B, C d'affixes respectives $1 + 2i; 1$ et $3i$. A tout point m d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe : $z' = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$. Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par f. Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

3. On pose $z = x + iy$ avec x et y des réels. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

4. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.
Quelle remarque peut-on faire ?
5. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f . Montrer que M' appartient à la droite (D) .
6. a) Montrer que pour tout nombre complexe z : $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$. En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est un réel.
b) En déduire que lorsque $M' \neq M$, la position relative des droites (OA) et (MM') .
7. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (On étudiera deux cas suivant que N appartient à (D) ou non). Effectuer la construction sur la figure.
8. Soit le point M d'affixe $z = 1 + e^{i\theta}$, $\theta \in [0; \pi[$.
a) Donner la forme exponentielle de z .
b) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble des points M lorsque θ décrit $[0; \pi[$.
c) Déterminer z pour que M soit invariant par f .

EXERCICE 9 :

- 1) Pour tout réel $x \neq 2k\pi$ avec k un entier relatif. Déterminer les sommes suivantes :

$$X_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

- 2) En déduire que pour tout réel $x \neq 2k\pi$ avec k un entier relatif, θ un réel :
3) $X_{n,\theta} = \sum_{k=0}^n \cos(kx + \theta)$

EXERCICE 10 :

On donne le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ et un réel dans $] -\pi; \pi[$. On pose $z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})^2$.

- 1.a) Calculer $(1 + e^{i\theta})e^{-i\frac{\theta}{2}}$, en déduire que $\arg(1 + e^{i\theta}) \equiv \frac{\theta}{2} [2\pi]$.
b) Déterminer $|z|$ et $\arg(z)$.
c) Représenter dans le plan P l'image du nombre complexe z pour $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- 2) On pose M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1, N le projeté orthogonal de A sur (OM) .
a) Déterminer et construire l'ensemble E des points N lorsque θ varie.
b) Calculer NM .

3) Donner une construction (point par point) de l'ensemble E' des points pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, puis pour $\theta \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi[$. Tracer E'

EXERCICE 11 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. (unité graphique : 4cm). On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour chaque point M du plan, d'affixe z , on désigne par M_1 d'affixe z_1 , l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis par M' d'affixe z' , l'image de M_1 par translation de vecteur $-\vec{u}$. On note T la transformation qui, à chaque point M, associe le point M' .

- 1) a) Démontrer que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.
- b) Déterminer l'image du point B.
- c) Déterminer la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

2) On pose $z = x + iy$, avec x, y des réels.

- a) pour $z \neq 0$; calculer la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ en fonction de x et y .
- b) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points du plan, tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer (Γ) .

3) Dans cette question, on pose $z = 1 + i$.

- a) Vérifier que $M \in (\Gamma)$ et placer M et M' sur la figure.
- b) Calculer $|z'|$ et calculer l'aire du triangle OMM' en cm^2 .

EXERCICE 12 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphique est 0,5 cm. On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a = 8; b = 6j$ et $c = 8j^2$. Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- 1) Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
- 2) On appelle $a', b',$ et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
 - a) Calculer a' . On vérifiera que a' est un nombre réel.
 - b) Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que O est sur la droite (BB') .
 - c) On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en O.
- 3) On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.
 - a) Calculer la distance $OA + OB + OC$.
 - b) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
 - c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

On rappelle que $a = 8$; $b = 6j$ et $c = 8j^2$. Dédurre des questions précédentes les égalités suivantes :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a + bj^2 + cj| = 22$$

- d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z , z' et z'' :
- $$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|.$$
- Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

EXERCICE 13 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. L'unité graphique est égal à 8cm. On appelle A le point d'affixe -1 et B d'affixe 1 . On appelle (\mathcal{E}) l'ensemble des points du plan distincts A, O et B. A tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble \mathcal{E} , on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3 .

- 1) Prouver que les points M, N, et P sont deux à deux distincts.
- 2) On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble C des points M appartenant à \mathcal{E} tel que le triangle MNP soit rectangle en P.
 - a) En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si $|z + 1|^2 + |z|^2 = 1$.
 - b) Démontrer que $|z + 1|^2 + |z|^2 = 1$ équivaut à $\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\overline{z + \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$.
 - c) En déduire l'ensemble C cherché.
- 3) Soit M un point de C et z son affixe. On désigne par r le module de z et α l'argument de z appartenant à $] - \pi; \pi]$.
 - a) Démontrer que l'ensemble Γ des points M de \mathcal{E} tels que l'affixe de P soit réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points)
 - b) Représenter les ensembles \mathcal{E} et Γ dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 - c) Déterminer les affixes des points M de \mathcal{E} de tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe du point P étant un réel strictement positif.

EXERCICE 14 :

Dans le plan complexe rapporté un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (l'unité graphique est 2cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A :

- 1-a) Donner la forme exponentielle de z_B , puis z_C .
- b) Placer les points A, B et C.
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère OBAC.
- 3) Déterminer et construire l'ensemble Λ des points M tels que : $|z| = |z - 2|$.

Partie B :

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{-4}{z - 2}$$

1-a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.

b-) En déduire les points associés aux points B et C.

c-) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2-a) Question de cours

Démontrer que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ($z \neq 0$).

b-) Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

c-) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de Λ ou Λ est l'ensemble défini à la question 3) de la partie A. Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 15 :

ABCD est un rectangle de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$. On note E le symétrique de A par rapport à D. Soit s la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$, et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1-a) Montrer que $s(A) = B$.

b-) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que $s(E) = O$.

2-) Soit I un point du segment [OE], distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A. Les droites (AD) et (AB) recourent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

b) Montrer que le point C appartient au cercle (Γ).

3-) Soit N le projeté orthogonal de C sur (MP).

a-) Montrer que $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{6}$.

b-) En déduire que $s(M) = N$.

4-) Montrer que les points B, D, et N sont alignés.

EXERCICE 16 :

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q le point d'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire (Δ) à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1) Faire une figure.

2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Préciser en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

b) Déterminer les images de R et P par r.

c) Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?

- 3) On note N le milieu du segment [PQ] et M celui du segment [QR]. Soit S la similitude de centre A, de rapport $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Déterminer les images respectives de R et P par S.
 - Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
 - Démontrer que les points M, B, N et D sont alignés.

EXERCICE 17 :

Soit r un nombre réel strictement positif, u le nombre complexe de module r et d'argument $-\frac{3\pi}{4}$.

- On considère la suite $(A)_n$ de points définis par : $A_0 = O$ et l'affixe de A_1 est i . Et pour tout entier naturel n non nul et différent de 1, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude plane directe de centre A_{n-1} de rapport r d'angle $-\frac{3\pi}{4}$. On désigne par z_n l'affixe de A_n .
 - Ecrire pour tout entier naturel n non nul et différent de 1, une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2} .
 - Démontrer que pour tout entier n non nul et différent de 1, $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}i$.
 - Exprimer z_n en fonction de u et de n .
- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S , qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2 .
 - Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = S(A_n)$.

EXERCICE 18 :

Le plan (P) étant orienté ; on considère un triangle rectangle et isocèle tel que $(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\pi}{2}$. On note O le point d'intersection des bissectrices intérieures de ABC.

Soit s_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme B en O et s_2 la similitude plane directe de centre C qui transforme O en B. A tout point M du plan distinct de A et B ; on associe le point $N = s_1(M)$ et le point $P = s_2^{-1}(M)$.

- Déterminer une mesure de l'angle (\vec{AM}, \vec{AN}) .
 - On désigne par s' la similitude plane directe de centre A qui transforme B en M. Montrer que $s' \circ s_1 = s_1 \circ s'$; en déduire l'image de O par s' . Déterminer une mesure de l'angle (\vec{MA}, \vec{MN}) .
 - Proposer une construction géométrique de N lorsque le point M est donné.
- Quelle est la nature de $r = s_1 \circ s_2$? Préciser ses éléments géométriques caractéristiques.
 - Déterminer $r(P)$ et en déduire une construction géométrique de P à partir de N.
 - Lorsque $M = O$, montrer que le point N appartient à la demi-droite [AC] et le point P à la demi-droite [CA].

Série 4 :

EXERCICE 1:

A) Calculer les limites suivantes de la fonction f en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$;
- $f(x) = \frac{\ln x - 2}{2 \ln x + 1}$;
- $f(x) = \ln(3x) - \ln(x+1)$;

4) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$; 5) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 6) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$;
 7) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; 8) $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$; 9) $f(x) = 3x - 5 \ln x$;
 10) $f(x) = x \ln(\frac{x-2}{x+3})$

B) Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0 (éventuellement à gauche et à droite).

1) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$; 2) $f(x) = \ln x + \ln^2(x)$; 3) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$;
 4) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; 5) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$; 6) $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$;
 7) $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{2x}$; 8) $f(x) = x^2 \ln^3(x)$;

EXERCICE 2 :

A) Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$;
 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin(x)$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{1-e^x}$;
 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^2} - e^{3x} + x^2$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}})$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) e^x$; 8)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} + 1}{e^x + e^{-x}}$; 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{\frac{3}{x}} - 1)$

B) Calculer les limites de la fonction f en 0 dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$; 2) $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$; 3) $f(x) = x (e^{\frac{1}{x}} - 1)$;
 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x (e^{\frac{1}{x}} - 1)$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \ln x$

EXERCICE 3:

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f (Préciser l'intervalle de définition I de la primitive).

1) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$; 2) $f(x) = \tan x$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; 4) $h(x) = \frac{1}{1-e^x}$;
 5) $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ sur]2 ; 3[; 6) $f(x) = \frac{3e^x}{e^x - e^{-x}}$; 7) $f(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 2}{x-3}$; 8)
 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; 9) $f(x) = e^{2x+3}$; 10) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; 11) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

EXERCICE 4 :

1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $2 \ln x + 4 = 0$; b) $2 \ln x - 1 = 0$; c) $\ln x = 0$; d) $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$;
 e) $e^x - 2 = 0$; f) $e^x + 1 = 0$; g) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$; h) $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$;

2) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a) $-2 \ln x + 4 \geq 0$; b) $2 \ln x + 1 \geq 0$; c) $-2(\ln x)^2 - \ln x + 1 = 0$;
 d) $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 > 0$; e) $e^x - 2 > 0$; f) $e^x + 4 \geq 0$; g) $e^x \leq e^{x^2+3x-2}$;
 h) $e^{2x} + 2e^x - 8 \geq 0$

3) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ (e^x + e^y)(e^x - e^y) = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} e^x + e^y = 3 \\ 2e^{-x} + 2e^{-y} = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 + \ln 3 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} \ln x + \ln y = -1 \\ \ln^2(x) + \ln^2(y) = 5 \end{cases}$

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2\sqrt{1-x|x|} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0;1\}$ et exprimer $f'(x)$.
- Montrer que f est dérivable en 0. Etudier la dérivabilité en 1.
- Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote en $-\infty$ à (C_f) , la courbe représentative

PROBLEME 1 :

Partie A

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 + 2x + \ln|x+1|$

- Etudier les variations de h . Calculer $h(0)$ et $h(-2)$
- En déduire le signe de $h(x)$ pour $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln|x+1|}{x+1} - x$.

- Montrer pour tout réel x de D_f , $f'(x) = -\frac{h(x)}{(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe C_f de f .
Etudier la position relative de C_f et D .
- Montrer que le point $I(-1; 1)$ est un centre de symétrie de C_f .
- Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé **unité 1 cm**.
- Soit α un réel positif, on note $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimitée par la courbe, la droite D et les droites d'équations $x = 0$, $x = \alpha$. Calculer en fonction de α $A(\alpha)$, puis la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

PROBLEME 2 :

Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est définie sur $] -\infty; 0]$ par :

$$f_n = -xe^{\frac{1}{n}x} \text{ si } x < 0 \text{ et } f_n(0) = 0.$$

Partie A :

- Etudier les variations de f_n pour tout entier naturel n non nul.
 - Prouver que f_n est continue sur $] -\infty; 0]$.
 - Etudier la dérivabilité de f_n en 0.
 - Calculer $(f_n)'(x)$ pour $x < 0$ et justifier que f_n est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$.
- Etude de f_n au voisinage de $-\infty$.
 - déterminer la limite de f_n en $-\infty$.
 - Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 0]$ par $g(x) = e^x - x - 1$. Donner le tableau de variations de g sur $] -\infty; 0]$. En déduire que : $\forall x < 0, 0 \leq 1 - e^x \leq -x$.

c) Soit $t \leq 0$, en intégrant l'inégalité précédente sur $[t; 0]$, montrer que :

$$0 \leq e^x - (1 + t) < \frac{t^2}{2}$$

d) En déduire que pour tout $x < 0$, on a : $0 \leq f_n + \left(x + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{-1}{2n^2 x}$. Justifier alors l'existence pour la courbe (C_n) de f_n , d'une asymptote (D_n) en $-\infty$. Préciser la position relative de (C_n) et de (D_n) .

e) Dresser le tableau de variations de f_n .

3) Tracé de courbes

a) Déterminer la tangente à (C_1) en 0.

b) Tracer (C_1) et son asymptote (D_1) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

c) Démontrer que pour $n > 0$, (C_n) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O, de rapport $\frac{1}{n}$. Construire alors (C_2) sur le même graphique que (C_1) .

Partie B : Etude de l'équation $f_n(x) = 1$.

1) Démontrer que pour tout $n > 0$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -\infty; -1]$.

2) Démontrer que α_n est solution $-x \ln(-x) = \frac{1}{n}$.

3) Soit h la fonction définie sur $] -\infty; -1]$ par $h(x) = -x \ln(-x)$.

a) Etudier le sens de variations de h .

b) Prouver que : $-1,77 \leq \alpha_1 \leq -1,76$.

c) Démontrer que la suite (α_n) est croissante. (On remarque que $h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et on comparera $h(\alpha_n)$ et $h(\alpha_{n+1})$).

Partie C : Limite d'une fonction définie par une intégrale.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_{-1}^0 f_n(\square) dt$.

1-a) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

b) Montrer que tout élément x de $[-1; 0]$, on a $f_n(x) \leq -x$. En déduire que pour tout

$$n \geq 1, \text{ on a : } I_n \leq \frac{1}{2}.$$

c) Que peut-on dire de la suite (I_n) ?

2-a) En utilisant la question 2-d) de la partie A, établir que : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

b) Déterminer la limite de (I_n) .

PROBLEME 3: (BAC S1 2021)

PARTIE A:

On considère la fonction g définie sur $] -\infty; 0[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln|x|$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in] - 4; -3[$.
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B :

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$. On considère également

la fonction numérique f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln|x|} & \text{si } x < 0 \\ h(x) + e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- 1) Construire la courbe de h (C_h).
- 2) Déterminer le domaine de définition de f .
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- 4) Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variations.
- 5) Etudier les branches infinies de f (C_f).
- 6) Vérifier que : $f(\alpha) = 1 + \alpha$.
- 7) Construire la courbe (C_f). On prendra $\alpha = -3,6$.

PARTIE C :

Soit la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
- 2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a : $U_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq U_n$ et que $I + \frac{e-1}{e} \leq U_n \leq I + \frac{e-1}{e} + \frac{4-e}{ne}$ ou I est l'aire de la portion du plan délimité par (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
- 3) Montrer que $(U_n), n \in \mathbb{N}^*$ est convergente et donner sa limite.

PROBLEME 4 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$. (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
- 2) a-) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.
 b-) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.
 c-) Dresser le tableau de variations de f .
 d-) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$ si et seulement si $x \leq \ln 2$.
- 3) Montrer que le point $B(\ln 2; 1)$ est un point d'inflexion de (C_f).
- 4) a-) Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (Γ) de la fonction $x \rightarrow e^x - 1$.
 b-) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Γ).

- c-) Tracer la courbe (C_f) .
- 5) Soit g la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = \tan(x)$.
- Montrer que g réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}[$ sur $[0; +\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.
 - Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$.
 - Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x}$.
- 6) On pose pour tout $x \in [0; +\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = 2(f(x) - (g^{-1} \circ f)(x))$
- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = G'(x)$.
 - En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $F(x) = G(x)$.
 - Soit A l'aire de la partie délimitée par (C_f) , la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.
- 7) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On désigne par f_n la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$. On note par (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Soit G_n la fonction définie sur $[\ln(n), +\infty[$ par $G_n(x) = 2(f_n(x) - \sqrt{n} g^{-1}(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}))$.

Montrer que pour tout $x \in [\ln(n), +\infty[$, $G_n = \int_{\ln n}^x f_n(t)dt$.

b-) Vérifier que $x \geq \ln n, \sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$. En déduire que :

$$\forall x \geq \ln n, f_n(x) \leq e^x - 1.$$

c-) Soit A_n l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_n) , la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = \ln n$ et $x = \ln(n+1)$. Montrer que :

$$A_n = 2\sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1.$$

d-) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

PROBLEME 5:

Soit la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n .

Partie A :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$.
- Etudier les variations de f_1 .
- Démontrer que (D_1) d'équation $y = x - 1$ est asymptote en $+\infty$. (On pose $u = \frac{1}{x}$).
- Tracer (C_1) et son asymptote.

Partie B :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

2. Etudier les variations de f_n .
3. a-) Démontrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $0 \leq e^{-t} - (1 - t)$.
 b-) Démontrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, on a $e^{-t} - (1 - t) \leq \frac{t^2}{2}$
 c-) Dédire de 3.a et 3.b que $\forall x > 0$, on a : $0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$.
 d-) En déduire que la droite (D_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à (C_n) en $+\infty$.
 Etudier la position relative de (C_n) et (D_n) .
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (C_n) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et rayon $\frac{1}{n}$.

PROBLEME 6:

Soit n un entier naturel non nul, α un réel strictement positif et $g_{(\alpha,n)}$ la fonction définie par :

$$g_{(\alpha,n)} = \frac{\sqrt{\ln \alpha x}}{x^n}.$$

1. a) Déterminer le domaine de définition de $g_{(\alpha,n)}$.
 b-) Etudier la dérivabilité de $g_{(\alpha,n)}$ en $\frac{1}{\alpha}$, puis interprétez géométriquement le résultat.
 c-) Etudier le sens de variations de $g_{(\alpha,n)}$.
 d-) Montrer que $g_{(\alpha,n)}$ admet un maximum α_n , puis exprimer α_n en fonction de n et de α .
2. On considère la suite (U_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{2n}}$.
 a-) Etudier le sens de variations de la suite (U_n) .
 b-) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

Partie B :

Pour tout entier naturel non nul n , on pose g_n la fonction sur $[1; +\infty[$ par $g_n(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^n}$. Soit (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité=2cm).

1. a-) Etudier la dérivabilité de g_n en 1, puis interpréter géométriquement le résultat.
 b-) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe I.
 c-) Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

2. Construire les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère.

Partie C :

Soit un réel $\lambda \geq 1$, on pose $I_n(\lambda) = \int_1^\lambda g_n(t) dt$.

1. Calculer $I_1(\lambda)$.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_1) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

3. Pour tout entier naturel non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{\sqrt{\ln(1+\frac{k}{2n})}}{k+2n} \right]$
- a-) Montrer que pour tout entier naturel k tel que : $0 \leq k \leq n-1$, on a :
- $$\frac{1}{2n} g_1 \left(1 + \frac{k+1}{2n} \right) \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} g_1(x) dx \leq \frac{1}{2n} g_1 \left(1 + \frac{k}{2n} \right)$$
- b-) En déduire que $S_n - \frac{1}{2n} g_1(1) \leq I_1\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n$.
- c-) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

PROBLEME 7 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

On note (\square) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A :

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
- 2) a-) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
b-) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et vérifier que $\alpha = e\sqrt{e}$.

Partie B :

- 1) Donner une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
- 2) On considère la fonction $g: x \rightarrow f(x) - (2x - \frac{1}{2})$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
a-) Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
b-) Donner alors la position de (C) par rapport à la tangente (D) .
- 3) Construire la courbe (C) et la tangente (D) .

Partie C :

- 1) Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$.
- 2) En déduire en fonction de l'entier n , l'aire A_n du domaine plan délimité par la courbe (C) , la tangente (D) et les droites d'équations $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ et interpréter le résultat obtenu.

PROBLEME 8 :

Partie A :

- 1) Soit la fonction g définie par $g(x) = x + 1 - \ln x$.
a) Etudier les variations de g .
b) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x .

- 2) Soit la fonction h définie par $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x$. Etudier les variations de h , puis tracer sa courbe représentative.

Partie B :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- 3) a-) Démontrer que $\forall x > 0$ et $x \neq 1$, on a $\frac{f(x)-x}{\ln x} = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}-1}}{\frac{1}{x} \ln x}$.
 b-) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$. La fonction $x \mapsto f(x)-x$ admet une limite en $+\infty$?
 c-) Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur lui-même.
- 4) a-) Montrer que $f''(1) = 0$.
 b-) Calculer $f(1); f(2)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Déterminer la tangente à la courbe au point O.
 c-) Tracer la courbe représentative de f et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 1 (Considéré comme point d'inflexion).

PROBLEME 9 :

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$.

- 1) a-) Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur $[0; 1[$.
 b-) Montrer que pour tout $x \in [0; 1[; g(x) = -\ln(1 - x^2)$.
 c-) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0,7; 0,8]$.
 d-) Tracer la courbe de f , la première bissectrice (Δ) , le point $A(\alpha, \alpha)$ ainsi que la courbe de g dans le même repère.
- 2) Soit la fonction φ définie sur $[0; 1[$ par $\varphi(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$.
 a-) Montrer que φ est dérivable sur $[0; 1[$ et que $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$.
 b-) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x appartenant à $[0; 1[$,

$$\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x}$$
.
 c-) En déduire que $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in [0; 1[$.
 d-) On désigne par A l'aire de la région du plan située entre les courbes de f et g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$. Montrer que $A = 2\left(\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\right)$.

Partie B :

On considère la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 3^k}$. Soit $n \geq 1$, on pose $\forall n \in [0; 1[$, $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1}$.

- Montrer que $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t) dt = U_n$.
 - Montrer que pour tout $t \in [0; 1[$, $S_n(t) = (1 - t^{2n})g'(t)$ où g' est la dérivée de g sur $[0; 1[$.
 - Montrer que pour tout $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(1 - \frac{1}{3^n})g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$.
 - En déduire que $(1 - \frac{1}{3^n})g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \leq U_n \leq g(\frac{\sqrt{3}}{3})$.
- 3) Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Série 5 :

EXERCICE 1:

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$.

- Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
- Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
- Quelle est la parité de p et q .

EXERCICE 2:

Déterminer l'ensemble des couples $(m; n)$ d'entiers naturels vérifiant le système :

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 5440 \\ \text{pgcd}(m; n) = 8 \end{cases}$$

EXERCICE 3:

- Pour tout entier relatif n différent de 1, on considère le nombre : $A_n = \frac{2n^2 - n - 11}{n - 1}$.
 - Déterminer la valeur des entiers relatifs a, b , et c vérifiant la relation suivante pour tout entier naturel n distinct de 1 : $A_n = a \cdot n + b + \frac{c}{n - 1}$.
 - On considère pour tout entier relatif, le nombre B_n défini par : $B_n = \frac{2n^2 - 3n - 15}{2n + 3}$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles B_n est un entier relatif.

EXERCICE 4 :

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base 7.

- 1-a) Déterminer x pour que A soit divisible par 6 ;
 - Déterminer x pour que A soit divisible par cinq. En déduire que qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.
- 2) On donne x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A . Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec 3.

EXERCICE 5 :

Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité : $a^2 - b^2 = 11$.

EXERCICE 6 :

Dans le système d'équation ci-dessous, les entiers naturels x et y sont tels que $x < y$:

$$\begin{cases} x \cdot y = 135 \\ \text{pgcd}(x; y) = 3 \end{cases} \cdot \text{Résoudre ce système.}$$

EXERCICE 7:

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1; 46]$.

On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

- 1) Donner une solution particulière de $(x_0; y_0)$ de (E).
- 2) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ solution de (E).
- 3) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que : $23x \equiv 1 \pmod{47}$.

EXERCICE 8:

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009 par 11.
- 2) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
- 3) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

EXERCICE 9 :

On désigne par p un entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n l'entier : $A_n = 2^n + p$. On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1} .

- 1) Montrer que d_n divise 2^n .
- 2) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p . Justifier.

EXERCICE 10:

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} U_0 = 14 \\ U_{n+1} = 5U_n - 6 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

- 1) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 . Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de U_n .
- 2) a-) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+2} \equiv U_n \pmod{4}$. En déduire que pour tout entier naturel k , $U_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ et $U_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.
b-) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
$$2U_n = 5^{n+2} + 3.$$
c-) En déduire que pour tout entier naturel n , $2U_n \equiv 28 \pmod{100}$.
- 3) Déterminer l'écriture décimale des deux derniers chiffres de U_n suivant les valeurs de n .
- 4) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (U_n) est constant. Préciser sa valeur.

EXERCICE 11:

- 1) On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) d'élément de \mathbb{Z}^2 : $11n - 24 = 1$.

- a) Justifier à l'aide de l'énoncé d'un théorème que cette équation admet au moins une solution.
 - b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
 - c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
- 2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
- a) Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
 - b) $(n; m)$ désigne un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$
 - c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$. On rappelle l'égalité : $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$.
- Déduire des questions précédentes l'existence de deux entiers N et M tels que :
- $$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$
- d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
 - e) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

EXERCICE 12 :

On admet que 2017 est un nombre premier et que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

- 1) Soit (x, y) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$.
 - a) Vérifier que $P < 2017$.
 - b) Montrer que P ne divise pas y .
 - c) Montrer que $y^{p-1} \equiv 1 [P]$, puis en déduire que p divise 2016.
 - d) Montrer que $p = 7$.
- 2) Déterminer selon la valeur les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $px + y^{p-1} = 2017$.

EXERCICE 13 :

PARTIE A :

- 1) Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
- 2) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant la théorème de Bézout.

PARTIE B :

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{Z} le système :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13 [19] \\ n \equiv 6 [12] \end{cases}$$

1) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$. On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple. Vérifier que pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2-a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à :

$$\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$$

b-) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 [12 \times 19]$.

3-a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b-) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2-b)

3) Un entier naturel est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$.

Consigne : Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 14 :

Partie 1 :

Soient $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : 173 divise $a^3 + b^3$.

- 1) Vérifier que 173 est un nombre premier.
- 2) Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$ (on remarque $171 = 3 \times 57$).
- 3) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b .
- 4) On suppose que 173 divise a . Montrer que 173 divise $a + b$.
- 5) On suppose que 173 ne divise a .
 - a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer $a^{172} \equiv b^{172} [173]$.
 - b) Montrer que $a^{171}(a + b) \equiv 0 [173]$.
 - c) En déduire que 173 divise $a + b$.

Partie 2 :

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante (E) : $x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E).

- 1) Vérifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x + y = 173k$.
- 2) Vérifier que : $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$.
- 3) Montrer que $k = 1$, puis résoudre l'équation (E).

EXERCICE 15 :

1) On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1 \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

- a) Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E)?
- b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k; 68 + 109k)$ où k appartient à \mathbb{Z} .

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que : $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs de d et e).

- 2) Démontrer que 227 est un nombre premier.
- 3) On note A l'ensemble des 227 entiers a tels que : $a \leq 226$. On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : pour tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227; à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.
 - a) Vérifier que $g[f(0)] = 0$. On rappelle le résultat suivant petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
 - b) Montrer que quel que soit l'entier non a de A, $a^{226} \equiv 1[227]$.
 - c) En utilisant 1-b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$. Que peut-on dire de $f[g(a)]$.

EXERCICE 16 :

- 1) Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
- 2) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a) Vérifier, en utilisant par exemple 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$, puis une solution $(x_0; y_0)$ de (E).
 - b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans \mathbb{Z}^2 .
- 3) Application
Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
Indication : On remarquera que le point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite (D) si et seulement si le couple $(x; -y)$ vérifie l'équation (E).

EXERCICE 17 :

- 1) On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - a) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tels que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).
 - b) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- 2) Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan (P) d'équation $6x + 7y + 8z = 57$. On considère les points du plan (P) qui appartiennent au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.
- 3) On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
 - a) Montrer que y est impair.
 - b) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel. Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

- c) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel . Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
- d) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE 18:

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle $x: 78x^3 + ux^2 + vx - 14$ où u et v sont deux entiers relatifs.

- 1) On suppose que dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
- a) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation :

$$14u + 39v = 1129.$$
- b) En utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifier que le couple $(-25; 9)$ est solution de cette équation.
- c) En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution particulière de $14u + 39v = 1129$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
- d) Déterminer parmi les couples $(u; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
- 2) a-) Décomposer 78 et 14 en produit de facteurs premiers. En déduire dans \mathbb{N} , l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
- b-) Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :
 $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs. Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux alors P divise 14 et Q divise 78.
- c-) En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solution de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels l'ensemble de ceux qui sont positifs.

EXERCICE 19 :

Contexte : on se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant : « les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que les seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? ».

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1 \dots 1$ ou 1 apparait p fois. On rappelle que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$.

- 1) Les nombres $N_2 = 11; N_3 = 111; N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
- 2) Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
- 3) On se propose de démontrer que si p n'est pas premier alors N_p n'est pas premier. On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul :

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

a-) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$ où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b-) On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$ où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c-) On suppose que p est non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grand que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k .

4) Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

EXERCICE 20:

1) Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a + b; ab) = p$ où p est un nombre premier.

- a) Démontrer que p divise a^2 .
- b) En déduire que p divise a .
- c) Prouver par la même technique que p divise b .
- d) Démontrer que $PGCD(a; b) = p$.

2) On désigne par a et b les entiers naturels tels que $a \leq b$.

a-) Résoudre le système (1) $\begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$

b-) En déduire les solutions du système (2) $\begin{cases} PGCD(a + b; ab) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$

EXERCICE 21: (BAC 2021 S1)

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 4[12] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$$

- 1) On considère l'équation suivante (E) : $12u + 11v = 1$.
 - a) Sans exhiber une solution, justifier l'existence d'un couple de solution $(u; v)$ solution (E).
 - b) Déterminer un couple $(u_0; v_0)$ solution de (E).
- 2) Montrer que pour tout $(u; v)$ vérifiant (E), l'entier $3 \times 12u + 4 \times 11v$ appartient à S .
- 3) Soit n un entier relatif appartenant à S . On pose $n_0 = 3 \times 12u_0 + 4 \times 11v_0$.
 - a) Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 [132]$.
 - b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement s'il peut se mettre sous la forme $n = 132k - 8$ où k est un entier relatif.
- 4) Application

A l'occasion d'un colloque international de mathématiques, Mamour a remis à Farba de l'argent avec lequel Farba achète des cartes de crédit téléphonique qu'il distribue aux participants. Très fin mathématicien, Farba dit à ses étudiants :

« Avec l'argent que Mamour m'a remis, j'ai entre 800 et 1000 cartes de crédit de 1000F. Si je fais des lots de 12 cartes, il m'en resterait 4 et si je fais des lots de 11 cartes, il m'en resterait 3. Quelle somme d'argent ai-je dépensée ? ». Mettez-vous à la place des étudiants de Farba et répondez à la question.

EXERCICE 22:

- 1) On admet que tout entier n , strictement supérieur à 1, est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 524 et de 629.
- 2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère l'ensemble Γ des points de coordonnées (x, y, z) tels que $z = xy$ et l'ensemble C des points de coordonnées (x, y, z) tels que $x^2 + z^2 = 1$.
 - a) Démontrer que les coordonnées (x, y, z) des points d'intersection de Γ et C vérifient la relation $x^2(1 + y^2) = 1$.
 - b) En déduire que Γ et C ont deux points communs dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
- 3) Pour tout entier naturel non nul, on désigne par (P_n) le plan d'équation $z = n^4 + 4$.
 - a) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et P_1 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $n > 1$.

- b) Vérifier que $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$.
- c) Montrer alors que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
- d) En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et P_n dont les coordonnées sont des entiers relatifs supérieur ou égal à 8.
- e) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et P_5 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Série 6 :

EXERCICE 1:

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$.

- 4) Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
- 5) Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
- 6) Quelle est la parité de p et q .

EXERCICE 2:

Déterminer l'ensemble des couples $(m; n)$ d'entiers naturels vérifiant le système :

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 5440 \\ \text{pgcd}(m; n) = 8 \end{cases}$$

EXERCICE 3:

- 3) Pour tout entier relatif n différent de 1, on considère le nombre : $A_n = \frac{2n^2 - n - 11}{n - 1}$.
 - c) Déterminer la valeur des entiers relatifs a, b , et c vérifiant la relation suivante pour tout entier naturel n distinct de 1 : $A_n = a \cdot n + b + \frac{c}{n - 1}$.
 - d) On considère pour tout entier relatif, le nombre B_n défini par : $B_n = \frac{2n^2 - 3n - 15}{2n + 3}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles B_n est un entier relatif.

EXERCICE 4 :

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base 7.

1-a) Déterminer x pour que A soit divisible par 6 ;

b-) Déterminer x pour que A soit divisible par cinq. En déduire que qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

4) On donne x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A . Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec 3.

EXERCICE 5 :

Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité : $a^2 - b^2 = 11$.

EXERCICE 6 :

Dans le système d'équation ci-dessous, les entiers naturels x et y sont tels que $x < y$:

$$\begin{cases} x \cdot y = 135 \\ \text{pgcd}(x; y) = 3 \end{cases} \text{ . Résoudre ce système.}$$

EXERCICE 7:

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1; 46]$.

On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

- 4) Donner une solution particulière de $(x_0; y_0)$ de (E).
- 5) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ solution de (E).
- 6) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que : $23x \equiv 1 \pmod{47}$.

EXERCICE 8:

- 4) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009 par 11.
- 5) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
- 6) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

EXERCICE 9 :

On désigne par p un entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n l'entier : $A_n = 2^n + p$. On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1} .

- 3) Montrer que d_n divise 2^n .
- 4) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p . Justifier.

EXERCICE 10:

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} U_0 = 14 \\ U_{n+1} = 5U_n - 6 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

- 5) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 . Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de U_n .

- 6) a-) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+2} \equiv U_n[4]$. En déduire que pour tout entier naturel, $U_{2k} \equiv 2[4]$ et $U_{2k+1} \equiv 0[4]$.
 b-) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$2U_n = 5^{n+2} + 3.$$

 c-) En déduire que pour tout entier naturel n , $2U_n \equiv 28[100]$.
- 7) Déterminer l'écriture décimale des deux derniers chiffres de U_n suivant les valeurs de n .
- 8) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (U_n) est constant. Préciser sa valeur.

EXERCICE 11:

- 3) On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) d'élément de \mathbb{Z}^2 : $11n - 24 = 1$.
 d) Justifier à l'aide de l'énoncé d'un théorème que cette équation admet au moins une solution.
 e) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
 f) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
- 4) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
 f) Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
 g) $(n; m)$ désigne un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$
 h) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$. On rappelle l'égalité :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

 Déduire des questions précédentes l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

 i) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
 j) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

EXERCICE 12 :

On admet que 2017 est un nombre premier et que $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

- 3) Soit (x, y) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$.
 e) Vérifier que $P < 2017$.
 f) Montrer que P ne divise pas y .
 g) Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[P]$, puis en déduire que p divise 2016.
 h) Montrer que $p = 7$.
- 4) Déterminer selon la valeur les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $px + y^{p-1} = 2017$.

EXERCICE 13 :

PARTIE A :

- 4) Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
 5) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

PARTIE B :

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{Z} le système :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$$

1) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$. On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple. Vérifier que pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2-a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à :

$$\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$$

b-) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$.

3-a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b-) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2-b)

6) Un entier naturel est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$.

Consigne : Quel est le reste r de cette division ?

EXERCICE 14 :

Partie 1 :

Soient $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que : 173 divise $a^3 + b^3$.

- 6) Vérifier que 173 est un nombre premier.
- 7) Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$ (on remarque $171 = 3 \times 57$).
- 8) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b .
- 9) On suppose que 173 divise a . Montrer que 173 divise $a + b$.
- 10) On suppose que 173 ne divise a .
 - d) En utilisant le théorème de Fermat, montrer $a^{172} \equiv b^{172}[173]$.
 - e) Montrer que que : $a^{171}(a + b) \equiv 0[173]$.
 - f) En déduire que 173 divise $a + b$.

Partie 2 :

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante (E) : $x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E).

- 4) Vérifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x + y = 173k$.
- 5) Vérifier que : $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$.
- 6) Montrer que $k = 1$, puis résoudre l'équation (E) .

EXERCICE 15 :

- 4) On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$
 où x et y sont des entiers relatifs.
 - c) Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E)?
 - d) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k; 68 + 109k)$ où k appartient à \mathbb{Z} .
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que : $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs de d et e).
- 5) Démontrer que 227 est un nombre premier.
- 6) On note A l'ensemble des 227 entiers a tels que : $a \leq 226$. On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : pour tout entier a de A , f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227; à tout entier a de A , g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.
 - d) Vérifier que $g[f(0)] = 0$. On rappelle le résultat suivant petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
 - e) Montrer que quel que soit l'entier non nul a de A , $a^{226} \equiv 1[227]$.
 - f) En utilisant 1-b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A , $g[f(a)] = a$. Que peut-on dire de $f[g(a)]$.

EXERCICE 16 :

- 4) Montrer que, pour tout entier relatif n , les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
- 5) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
 - c) Vérifier, en utilisant par exemple 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$, puis une solution $(x_0; y_0)$ de (E).
 - d) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans \mathbb{Z}^2 .
- 6) Application
Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
Indication : On remarquera que le point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la droite (D) si et seulement si le couple $(x; -y)$ vérifie l'équation (E).

EXERCICE 17 :

- 4) On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

- c) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tels que $6u + 7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).
- d) Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
- 5) Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère le plan (P) d'équation $6x + 7y + 8z = 57$. On considère les points du plan (P) qui appartiennent au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.
- 6) On considère un point M du plan (P) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
- e) Montrer que y est impair.
- f) On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel. Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.
- g) On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel . Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
- h) En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

EXERCICE 18:

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle $x: 78x^3 + ux^2 + vx - 14$ où u et v sont deux entiers relatifs.

- 3) On suppose que dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).
- e) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation :
- $$14u + 39v = 1129.$$
- f) En utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$. Vérifier que le couple $(-25; 9)$ est solution de cette équation.
- g) En déduire un couple $(u_0; v_0)$ solution particulière de $14u + 39v = 1129$. Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
- h) Déterminer parmi les couples $(u; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
- 4) a-) Décomposer 78 et 14 en produit de facteurs premiers. En déduire dans \mathbb{N} , l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
- b-) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :
- $$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$$
- où u et v sont des entiers relatifs. Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux alors P divise 14 et Q divise 78.
- c-) En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solution de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels l'ensemble de ceux qui sont positifs.

EXERCICE 19 :

Contexte : on se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant : « les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que les seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? ».

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1 \dots 1$ ou 1 apparaît p fois. On rappelle que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$.

- 5) Les nombres $N_2 = 11; N_3 = 111; N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
- 6) Prouver que $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?
- 7) On se propose de démontrer que si p n'est pas premier alors N_p n'est pas premier. On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul :

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

a-) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$ où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b-) On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$ où q est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c-) On suppose que p est non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grand que 1. En déduire que N_p est divisible par N_k .

- 8) Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?

EXERCICE 20:

- 3) Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a + b; ab) = p$ où p est un nombre premier.
 - e) Démontrer que p divise a^2 .
 - f) En déduire que p divise a .
 - g) Prouver par la même technique que p divise b .
 - h) Démontrer que $PGCD(a; b) = p$.
- 4) On désigne par a et b les entiers naturels tels que $a \leq b$.
 - a-) Résoudre le système (1) $\begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$
 - b-) En déduire les solutions du système (2) $\begin{cases} PGCD(a + b; ab) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$

EXERCICE 21: (BAC 2021 S1)

On se propose de déterminer l'ensemble \mathbf{S} des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 4[12] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$$

- 5) On considère l'équation suivante (E) : $12u + 11v = 1$.
 - c) Sans exhiber une solution, justifier l'existence d'un couple de solution $(u; v)$ solution (E).
 - d) Déterminer un couple $(u_0; v_0)$ solution de (E).
- 6) Montrer que pour tout $(u; v)$ vérifiant (E), l'entier $3 \times 12u + 4 \times 11v$ appartient à \mathbf{S} .
- 7) Soit n un entier relatif appartenant à \mathbf{S} . On pose $n_0 = 3 \times 12u_0 + 4 \times 11v_0$.
 - c) Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 [132]$.
 - d) En déduire qu'un entier relatif n appartient à \mathbf{S} si et seulement s'il peut se mettre sous la forme $n = 132k - 8$ où k est un entier relatif.

8) Application

A l'occasion d'un colloque international de mathématiques, Mamour a remis à Farba de l'argent avec lequel Farba achète des cartes de crédit téléphonique qu'il distribue aux participants. Très fin mathématicien, Farba dit à ses étudiants :

« Avec l'argent que Mamour m'a remis, j'ai entre 800 et 1000 cartes de crédit de 1000F. Si je fais des lots de 12 cartes, il m'en resterait 4 et si je fais des lots de 11 cartes, il m'en resterait 3. Quelle somme d'argent ai-je dépensée ? ». Mettez-vous à la place des étudiants de Farba et répondez à la question.

EXERCICE 22:

- 4) On admet que tout entier n , strictement supérieur à 1, est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 524 et de 629.
- 5) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère l'ensemble Γ des points de coordonnées (x, y, z) tels que $z = xy$ et l'ensemble C des points de coordonnées (x, y, z) tels que $x^2 + z^2 = 1$.
 - c) Démontrer que les coordonnées (x, y, z) des points d'intersection de Γ et C vérifient la relation $x^2(1 + y^2) = 1$.
 - d) En déduire que Γ et C ont deux points communs dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
- 6) Pour tout entier naturel non nul, on désigne par (P_n) le plan d'équation $z = n^4 + 4$.
 - f) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et P_1 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $n > 1$.

- g) Vérifier que $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$.
- h) Montrer alors que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
- i) En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et P_n dont les coordonnées sont des entiers relatifs supérieur ou égal à 8.
- j) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et P_5 dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Série 6 :

EXERCICE 1 :

1) Calculer les intégrales suivantes :

- a) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$; b) $\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$; c) $\int_3^0 xe^{-x^2} dx$; d) $\int_0^2 \frac{e^x}{e^{x+3}} dx$; e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx$;
- f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^2(x)) dx$; g) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4(x) \cos x dx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin(2x) dx$.

2) Calculer les intégrales suivantes: a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$; b) $\int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$; c) $\int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx$; d)

e) $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx$ e) $\int_{-2}^2 |1 - x^2| dx$; f) $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$

EXERCICE 2:

- 1) A l'aide d'une intégrale par parties, calculer les intégrales suivantes:
 - a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos x \, dx$; b) $\int_0^{\pi} (x - 1) \sin(3x) \, dx$; c) $\int_0^2 (2x + 1) e^{2x} \, dx$; d) $\int_2^3 (2x + 1) \ln x \, dx$.
- 2) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :
 - a) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(2x) \, dx$; c) $\int_0^1 (3x^2 - x + 1) e^x \, dx$; d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) e^{3x} \, dx$.

EXERCICE 3:

- 1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}.$$
 - a-) Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait pour tout $x > 1$,

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$
 - b-) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- 3) En déduire les résultats obtenus précédemment, calculer : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \, dx$. On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q des rationnels.

EXERCICE 4 :

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} \, dx.$$

- 1) Calcul de I . Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.
 - a-) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$.
 - b-) En déduire la dérivée f' de f .
 - c-) Calculer la valeur de I .
- 2) Calcul de J et K
 - a-) Sans calculer explicitement J et K , vérifier que $J + 2I = K$.
 - b-) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , montrer que :

$$K = \sqrt{3} - J.$$
 - c-) En déduire les valeurs de J et K .

EXERCICE 5 :

$$\text{Soit } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx.$$

- 1) En majorant la fonction à intégrer, montrer que (I_n) converge vers 0.
- 2) Calculer $I_n + I_{n+1}$.
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

EXERCICE 6 :

Soit un entier naturel n non nul.

- 1) Montrer que $\forall x \neq -1$, on a : $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1} - \frac{(-x)^{n+1}}{x+1}$.
- 2) En déduire que $\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{x+1} dx = \ln 2 - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{(-)^n}{n+1}\right]$.
- 3) a-) $\forall x \quad 0 \leq x \leq 1, -x^n \leq \frac{(-x)^{n+1}}{x+1} \leq x^n$.
b-) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

EXERCICE 7 :

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx$.

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
- 2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
- 3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
- 4) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- 5) a-) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
b-) Déduire que : $\forall t \in [0; n], (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}$.
- 6) Pour tout $n \geq 1$, on pose : $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$. Déduire que $n \geq 1$,
 $\sqrt{n} I_{2n+1} \leq J_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$. (utiliser les changements de variable $t = \sqrt{n} \cos u$ et $t = \sqrt{n} \tan u$).
- 7) Déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$.

EXERCICE 8 :

Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt.$$

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, calcule I_1 .
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :
$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$$
- 3) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} + I_n.$$

- 4) Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A$. On pourra déterminer A en majorant sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction : $t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$. En déduire la limite quand n tend vers l'infini de : $U_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \dots + \frac{1}{2^n n!}$.

EXERCICE 9 :

Soit l'application F définie par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

- 1) Montrer que F est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} .
- 2) A l'aide du changement de variable $u = -t$, étudier la parité de F .
- 3) Montrer que pour tout $x > 0$, $0 < F(x) < \frac{1}{2x}$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
- 4) Calculer la dérivée de F et résoudre $F'(x) = 0, x > 0$.

EXERCICE 10 :

Soit f la fonction définie sur $] - 1; 1[$ par : $\square(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Soit F la fonction définie sur $] - 1; 1[$ par : $F(x) = \int_{-x}^x f(t)dt$.

- 1) Montrer que f est continue sur $] - 1; 1[$.
- 2) Déduire que F est dérivable et sa dérivée est continue sur $] - 1; 1[$. On dit que F est de classe C^1 .
- 3) Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 0$ et calculer $F'(0)$.
- 4) Montrer que F est impaire.
- 5) Déterminer les variations de F sur $]0 ; 1[$, puis sur $] - 1 ; 0[$.

EXERCICE 11 :

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0 ; 1]$ telle que $\forall x \in [0 ; 1]$,

$f'(x) > 0, f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

- 1) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que $f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 1 - \frac{a}{\sqrt{n}}$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$ une constante dont on ne cherche pas à déterminer.
- 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f(x))^n dx = 0$. On pourra poser $I_n = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} (f(x))^n dx$ et $J_n = \int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 (f(x))^n dx$ et montrer que ces deux intégrales tendent vers 0.

PROBLEME 1 :

Soit φ la fonction réelle définie sur \mathbb{R} par :

$\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout x non nul et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, soit (U_n)

la fonction réelle définie par : $U_n(x) = \frac{1}{x^n} \varphi(x) = \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout x non nul.

Partie A :

- 1) Prouver que : $\lim_{n \rightarrow 0} U_n(x) = 0$ pour tout entier naturel.
- 2) Montrer que φ est continue et dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que la dérivée φ' est continue et vérifie : $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi'(x) = 2U_3(x)$ pour tout x non nul. En déduire la relation $2\varphi(x) = x^3\varphi'(x)$ pour tout x réel (1).
- 3) Etudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative en précisant les points d'inflexion éventuels.

Partie B :

Soit f la fonction réelle définie sur \mathbb{R} par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \int_0^x \varphi(t) dt \text{ si } x \neq 0.$$

- 1) Montrer que f est impaire.
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq \int_0^x \varphi(t) dt \leq xe^{-\frac{1}{x^2}}$. (02)
- 3) En déduire que f est continue sur \mathbb{R} .
- 4) En utilisant (1), montrer que pour tout $x \geq 0$, on a la relation : $\int_0^x \varphi(t) dt = \frac{x^3}{2} \varphi(x) - \frac{3}{2} \int_0^x t^2 \varphi(t) dt$. (03) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
- 5) Pour tout x non nul, calculer la limite de $\frac{f(x)}{x^3}$ lorsque x tend vers 0. (On pourra appliquer la règle de l'Hospital au quotient $\frac{F(x)}{G(x)}$ ou $F(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ et $G(x) = x^3\varphi(x)$).

PROBLEME 2 :

- 1) F est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.
 - a-) Etudier les limites aux bornes et interpréter graphiquement les résultats.
 - b-) Etudier les variations de f , puis tracer sa courbe représentative dans RON.
- 2) Soit k un réel strictement positif, calculer : $\int_1^x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$, puis $\int_1^k f(x) dx$.
- 3) Dans cette question m désigne un réel strictement positif.
 - a-) Montrer successivement que : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{m}$; $\int_m^{m+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{m} - f(m)$ et $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$.
- 4) a-) Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que pour tout réel x non nul et différent de 1, on a : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
 - b-) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$. En utilisant 4-a) simplifier S_n , puis en déduire que (S_n) est convergente et préciser sa limite.
- 5) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = \sum_{i=n}^{2n} f(i)$.
 - a-) Montrer que : $0 \leq U_n \leq S_n$. En déduire la limite de la suite (U_n) .
 - b-) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ $V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i}$. Vérifier que $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = V_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$. En déduire que la suite (V_n) est convergente et préciser sa limite.

PROBLEME 3 :

On note (U_p) la suite définie pour tout entier $p \geq 1$ par $U_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$. La valeur γ de la somme infinie, appelée série de terme général U_p s'appelle la constante d'EULER et pour tout $n \geq 1$, on pose : $\gamma_n = \sum_{p=1}^n U_p$, $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} U_p$. On désigne par S et R les fonctions définies, dérivables et de dérivées continues respectivement sur \mathbb{R} , \mathbb{R}_+^* par les relations : $S(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}$ et $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ dt.

PARTIE A : Convergence de la série définissant γ

- 1) Prouver que pour tout $p \geq 1$, $0 \leq U_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.
- 2) Montrer que (γ_n) est une suite croissante, que cette suite converge et que $0 \leq \gamma \leq 1$.
- 3) Etablir que, pour tout $p \geq 1$, $U_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du$ (02) (indication : on pourra effectuer le changement de variable $y = u + p$ dans le membre de droite de l'égalité (02)).
- 4) Dédire de la question précédente que, pour tout $p \geq 2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p(p+1)} \right) \leq U_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p-1)p} \right)$.
- 5) Trouver les réels a, b, c et d tels que : $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1}$ et $\frac{1}{(p-1)p} = \frac{c}{p} + \frac{d}{p-1}$.
- 6) Montrer que, pour tout $p \geq 2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq U_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$ et en déduire que :
 - a-) Pour tout $m \geq n + 1$, on a : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \leq \sum_{p=n+1}^m U_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m-1} \right)$
 - b-) Pour m tendant vers $+\infty$ et $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} \right) \leq r_n \leq \frac{1}{2n}$.
- 7) On approche γ par γ_n . Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} même, même question pour la précision 10^{-8} (On ne demande pas d'effectuer le calcul de γ_n).
- 8) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\gamma_{n,1} = \gamma_n + \frac{1}{2(n+1)}$. Prouver que : $0 \leq \gamma - \gamma_{n,1} \leq \frac{1}{2n^2}$.
- 9) Déterminer un entier n permettant d'obtenir la précision 10^{-2} lorsqu'on approche γ par $\gamma_{n,1}$. Et déterminer une valeur décimale approchée de γ à la précision 10^{-2} .

PARTIE B : Expression intégrale de γ à l'aide de S et R .

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} dv$. (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou bien utiliser la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (1-v)^k$, $v \in [0; 1]$).
- 2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t} dt - \int_0^1 \frac{e_n(t)}{t} dt$.
Où $e_n(t)$ est définie sur $e_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ (indication : on pourra faire le changement de variable $v = \frac{t}{n}$).
- 3) Etablir que : $\forall v \in \mathbb{R}$, $1 + v \leq e^v$ (03)
- 4) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0; n]$, $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq e_n(t) \leq e^{-t}$ (indication : on pourra appliquer l'inégalité (03) en prenant alternativement $v = \frac{t}{n}$ et $v = -\frac{t}{n}$).

5) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; n], 0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$ (indication : on étudier l'application h définie sur $[0; 1]$ par $h(v) = (1 - v)^n + nv - 1$)

6) En posant que : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$, montrer que $\gamma = S(1) - R(1)$. Indication :

montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\int_1^n \frac{1 - e_n(t)}{t} dt - S(1)) = 0$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\int_1^n \frac{e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt) = 0$$

Série 7 :

Exercice 1 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 3y$; 2) $y' + 8y = 0$ 3) $9y' + 5y = 0$ 4) $y' - 2 = y$ 5) $8y' - 5y + 2 = 0$.

EXERCICE 2 :

Pour chacune des équations différentielles suivantes , donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données :

1-) $y'' - 2y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$; 2-) $y'' - 4y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 6$ et $y'(0) = 10$; 3-) $y'' + y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$; 4-) $25y'' - 20y' + 4y = 0$ ou $y(0) = y'(0) = 1$.

EXERCICE 3 :

Soit l'équation différentielle (E) $y' - 3y = \frac{3}{1 + e^{-3x}}$.

1) Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} et f la fonction définie par $f(x) = e^{3x} g(x)$.

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-3e^{-3x}}{1 + e^{-3x}}$.

2) En déduire toutes les solutions de (E).

EXERCICE 4 :

1) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E) $9y'' + y' = 0$.

2) Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant : $\begin{cases} f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3} \\ f''(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{9} \end{cases}$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\cos(\frac{2}{3}x - \frac{5\pi}{6}).$$

EXERCICE 5 :

1) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E_0) $y' - 2y = 0$.

2) Soit l'équation (E): $y' - 2y = 5 \cos x$.

a-) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = \sin x - 2 \cos x$ est une solution de (E).

b-) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E_0).

c-) Déterminer alors la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

- 3) En utilisant ce qui précède, déterminer une solution de l'équation différentielle (F): $y'' - 2y' = 5 \cos x$.

Problème 1:

PARTIE A:

On considère l'équation différentielle : (E) $y' - 3y = \frac{-3e^x}{(1+e^{-3x})^2}$.

On donne une fonction φ dérivable sur \mathbb{R} et $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$.

- 1) Montrer f est dérivable et pour tout réel x , exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
- 2) Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur \mathbb{R} et vérifie $\varphi(0) = \frac{e}{2}$.

PARTIE B :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Tracer la courbe de f .
- 3) Soit α un réel non nul, on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx$.
 - a-) Donner le signe et une interprétation graphiquement de I_α en fonction de α .
 - b-) Exprimer I_α en fonction de α et déterminer sa limite lorsque α tend vers $+\infty$.

PARTIE C :

On définit sur \mathbb{N}^* la suite U par $U_n = \int_0^1 f(x) e^{\frac{x}{n}} dx$.

- 1-a) Donner pour tout n de \mathbb{N}^* , le signe de U_n .
- b-) Donner le sens de variations de la suite U .
- c-) La suite U est-elle convergente ?
- 2-a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$.
- b-) En déduire la limite de la suite U . Donner sa valeur exacte.

Problème 2 :

PARTIE A :

On désigne par f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et par f' sa fonction dérivée, ces dérivées vérifient les propriétés suivantes :

- 1) Pour tout réel x , $f^2(x) = (f'(x))^2 - 4$, $f'(0) = 2$ et f' est dérivable sur \mathbb{R} .
 - a-) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) \neq 0$.
 - b-) Calculer $f(0)$.
- 2) Démontrer que pour tout réel x , $f''(x) = f(x)$ ou f'' désigne la dérivée seconde de f .
- 3) a-) Vérifier que $(f' + f)' = f' + f$ et $(f' - f)' = -f' + f$.

- b-) Résoudre les équations différentielles (E) : $y' = y$ et (E') : $y' = -y$.
- c-) En déduire que pour tout réel $f(x) = e^x - e^{-x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
- 4) a-) Dresser le tableau de variations.
b-) Construire (C).
- 5) Pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on pose $h(x) = \ln(\tan x)$.
a-) Montrer que h est une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .
b-) Montrer que h^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et que $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

PARTIE B :

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $U_0 = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{1}{f'(x)} dx$ et $U_n = \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{f^{2n}(x)}{f'(x)} dx$.

- 1) Calculer U_0 .
- 2) a-) Montrer que pour tout $x \in [0; \ln \sqrt{3}]$, on a : $0 \leq \frac{f^{2n}(x)}{f'(x)} \leq (\frac{2}{\sqrt{3}})^{2n}$.
b-) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{4^n}$.
- 3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1} + 4U_n = \frac{1}{2n+1} (\frac{2}{\sqrt{3}})^{2n+1}$.

PARTIE C :

Le but de cette partie est de calculer la limite de la suite $S_n = \sum_{k=0}^n (-\frac{1}{3})^k \frac{1}{2k+1}$. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = (-\frac{1}{4})^n U_n$.

- 1) Montrer que $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2n+1} (\frac{2}{\sqrt{3}})^{2n+1} (-\frac{1}{4})^{n+1}$.
- 2) En déduire que $2\sqrt{3}(V_n - V_{n+1}) = \frac{1}{2n+1} (-\frac{1}{3})^n$.
- 3) Montrer que $S_n = 2\sqrt{3}(V_0 - V_{n+1})$ et déduire que (S_n) converge vers le réel $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Problème 3 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $I =]-\ln 2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$, (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

- 1-a) Dresser le tableau de variations de f.
b-) Préciser l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0, puis tracer (C_f) .
- 2-) Soit g la fonction de $]0; \pi[$ par $g(x) = -\ln(1 + \cos x)$.
a-) Montrer que g réalise une bijection de $]0; \pi[$ sur I.
b-) Soit $h = g^{-1}$, montrer que h est dérivable sur I et $\forall x \in I, h'(x) = f(x)$.

c-) Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations $x = 0$ et

$x = \ln 2$.

3-) Soit (E) l'ensemble des fonctions dérivables, strictement positives sur les intervalles de la forme $D =]a; \ln 2[$, $a \in \mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y + y^3 = -2y'$.

a-) Vérifier que f appartient à (E) .

b-) On pose $z = \frac{1}{y^2}$ avec $y \in (E)$. Montrer que z est dérivable sur D et que $z' = z + 1$.

c-) Montrer alors qu'il existe un réel $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x) = \frac{1}{\sqrt{ke^{x-1}}}$, $x \in]-\ln k; +\infty[$.

Partie B :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^{2n}(t) dt$ ou f est la fonction définie dans la partie A.

1-a) Exprimer $F_1(x)$ en fonction de $h(x)$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$.

b-) Calculer $F_2(x)$ en fonction de x , en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = \ln 2$.

2-a) Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f(t) \leq e^{\frac{t}{2}}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq F_n(x) \leq \frac{2}{n}$.

b-) Montrer que F_n admet une limite finie notée L_n lorsque x tend vers $+\infty$.

c-) En utilisant $f \in (E)$, montrer que $F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{2}{n}(1 - [f(x)]^{2n})$.

d-) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n + L_{n+2} = \frac{2}{n}$, puis calculer L_3 et L_4 .

3-) Soit $U_n = (-1)^n L_{2n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a-) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = U_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b-) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = U_{n+1} - U_1$. Calculer la limite de la suite (S_n) .

Problème 4 :

Partie A :

On se propose de déterminer toutes les fonctions h positive, dérivables sur \mathbb{R} et solutions de l'équation différentielle $(E) : 1 + y' = 3e^{-y}$.

1) Déterminer la solution constante h_0 de (E) .

2) On pose $g(x) = e^{h(x)} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou h est positive et solution de (E) .

a-) vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.

b-) Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -y + 2$.

c-) Déterminer alors g puis donner la forme générale de h .

Partie B :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(3 + e^{-x})$. (C) désigne la courbe représentative de f dans un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1-a) Vérifions que f est une solution de l'équation différentielle (E).

b-) Dresser le tableau de variations de f .

c-) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathbb{R} une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$, puis tracer (C) .

2-) Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

a-) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b-) En déduire que pour n de \mathbb{N} , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.

c-) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$, puis déterminer la limite de U_n .

3-) On pose $S_n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n U_k$ pour tout n de \mathbb{N} .

a-) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $|S_n - 2\alpha| \leq \frac{8}{3(n+1)} (1 - (\frac{1}{4})^{n+1})$.

b-) Montrer que pour tout n de (S_n) est convergente et donner sa limite.

Série 8 :

Exercice 1

On considère un triangle ABC et on désigne par G son centre de gravité. Soit φ l'application définie du plan (P) dans IR qui à tout point M associe :

$\varphi(M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA}$. On désigne par f fonction scalaire de Leibnitz associée au système $\{(A,1); (B,1); (C,1)\}$.

1-) Démontrer que pour tout point M : $\varphi(M) = 3MG^2 + \varphi(G)$ et $\varphi(G) = -\frac{1}{2}f(G)$.

2-) Calculer $f(G)$ en fonction de AB, AC et BC. En déduire l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG, AB et AC.

3-) On suppose que le triangle ABC est équilatéral de côté a.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{a^2}{4} \leq \varphi(M) \leq \frac{a^2}{2}$.

Exercice 2

1-) Soit ABC un triangle tels que $AC = b$, $BC = a$ et $AB = c$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = b^2 + c^2$$

2-) Soit G les barycentre des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) .

Soit (E) l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 1$$

a-) Montrer que si A, B et C sont des éléments de (E) alors $\alpha = \frac{\cos \hat{A}}{bc}$, $\beta = \frac{\cos \hat{B}}{ac}$ et $\gamma = \frac{\cos \hat{C}}{ab}$

b-) Montrer que, pour les valeurs de α, β et γ trouvés en a-), (E) est un cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 3

Soit ABC un triangle, on pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$; A' est le milieu de $[BC]$, B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C .

1-) Montrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

2-) En calculant de deux façons différents $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, établissez que :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC'} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

3-) On considère les points communs aux cercles (C) et (C') de diamètres respectifs $[AA']$ et $[BC]$.

Montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c .

Exercice 4

On donne un triangle ABC et le point F diamétralement opposé à A sur le cercle passant par ABC . Pour un point M du plan, la droite passant par M et orthogonale à (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q .

1-) Démontrer que : M, F, C et Q d'une part et B, P, F et M d'autre part sont cocycliques.

En déduire que :

$$(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi].$$

2-) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels F, P et Q sont alignés.

3-) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$.

Exercice 5

ABC est un triangle non rectangle, O est le centre de son cercle circonscrit (C) et H son orthocentre. Les droites (AH) et (BC) se coupent en Q ; les droites (BH) et (AC) se coupent en R ; les droites (CH) et (AB) se coupent en P .

1-) a-) Montrer que les points A, B, Q et R sont cocycliques.

En déduire que : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ})[\pi]$

b-) On note T un point quelconque de la droite tangente en C au cercle (C) .

Montrer que $(\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT})[\pi]$ puis en déduire que les droites (RQ) et (CT) sont parallèles.

c-) Montrer que les droites (RQ) et (OC) sont perpendiculaires.

2-) a-) En utilisant la cocyclicité des points A, C, P et Q d'une part ; et Q, C, R et H

d'autre part, montrer que : $(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR})[\pi]$

b-) En déduire que (AH) est une bissectrice du triangle QRP .

Exercice 6

A et B sont deux points d'un cercle (C) de centre O non diamétralement opposés. Un point P décrit la droite (AB). Les deux cercles variables (C₁) et (C₂) passant par P et tangentes à (C) respectivement en A et B se recoupent en M. On suppose que la tangente à (C₁) en A et la tangente à (C₂) en B se coupent en un point T.

1-) Faire une figure

2-) Montrer que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})[\pi]$

3-) En déduire le lieu géométrique des points M du plan lorsque P décrit la droite (AB) (P est distinct de A et de B).

Exercice 7

Soit ABCD un quadrilatère convexe de diagonales [AC] et [BD] se coupant en I. Soit P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AB), (BC), (CD) et (DA).

1-) Construire la configuration précédente.

2-) Montrer que les points A, P, I et S sont cocycliques. Citer trois autres cocyclicités similaires.

3-) a-) Montrer que : $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})[\pi]$.

b-) Montrer que : $(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})[\pi]$.

4-) En déduire que : $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = 2(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA})[\pi]$.

5-) Montrer que les points P, Q, R et S sont cocycliques si et seulement si les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires. Illustrer cette situation sur une figure.

Série 9 :

EXERCICE 1 :

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher dont 2 portent le numéro zéro, 4 portent le numéro 2, une porte le numéro 1 et une porte aussi le numéro 4. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

- 1) Soit A l'évènement : « Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le numéro 0 » et B l'évènement : « le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8 ». Montrer que $P(A) = \frac{5}{14}$ et que $P(B) = \frac{1}{7}$.
- 2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.
 - a) Montrer que $P(X = 16) = \frac{3}{28}$.
 - b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
 - c) Calcule l'espérance mathématique et variance de X.
 - d) Déterminer la fonction de répartition de x, puis tracer la.

EXERCICE 2 :

- 1) Un sac contient 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 et 3 boules blanches numérotées de 1 à 3. On extrait simultanément 2 boules portant les numéros a et b.
 - a) Quelle est la probabilité que l'on ait $a = b$?
 - b) Quelle est la probabilité pour que deux boules tirées soient de couleurs différentes
 - c) A chaque tirage, on associe la variable aléatoire Y définie de la façon suivante :

- Si les 2 boules sont blanches, Y prend la valeur $a + b$;
 - Si les 2 boules sont rouges, Y prend la valeur $|a - b|$;
 - Si les deux boules sont de couleurs différentes, Y prend la valeur 0.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de Y.
 - 3) Calculer la variance de Y.

EXERCICE 3 : (BAC S1 2016)

Soit n un entier naturel non nul. On place dans une urne n boules rouges, $8 + n$ boules noires et 20 boules blanches. Un joueur tire une de l'urne ; on suppose tous les tirages équiprobables. S'il tire une boule rouge, il perd. S'il tire une boule noire, il gagne. S'il tire une boule blanche, il remet cette boule dans l'urne et effectue un nouveau tirage avec toujours équiprobabilité. S'il tire alors une noire, il gagne sinon il perd.

1.a) Démontrer que la probabilité que ce joueur a de gagner est $f(n)$ ou f est l'application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} telle que $f(x) = \frac{(x+8)(x+24)}{2(x+14)^2}$.

b) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit maximale.

c) Déterminer l'entier n pour que cette probabilité soit minimale. Calculer alors cette probabilité.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 16$. Pour jouer, le joueur a misé 8 unités monétaires. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p > q > 8$, s'il gagne à l'issue du premier tirage, on lui remet p unités monétaires et s'il gagne à l'issue du deuxième tirage, on lui remet q unités monétaires. S'il perd, il ne reçoit rien. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a-) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction p et q ainsi que son espérance mathématique.

b-) On suppose que p et q sont tels que le jeu est équitable, c'est-à-dire l'espérance mathématique du gain est nulle. Montrer que : $3p + q = 60$. Déterminer les couples $(p; q)$ possibles pour que le jeu soit équitable.

EXERCICE 4 : (BAC S1 94)

On considère deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient 6 boules blanches et 4 boules noires et U_2 contient 8 boules blanches et 2 boules noires. D'une de ces urnes, choisie au hasard, on extrait une boule que l'on remet dans l'urne d'origine : si la boule est blanche, on recommence le tirage dans la même urne et si la boule est noire, on recommence le tirage dans l'autre urne. On applique cette règle à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne, les tirages sont équiprobables. n étant un entier naturel non nul, on note P_n la probabilité pour que le $n^{\text{ème}}$ tirage se fasse dans l'urne U_1 .

- 1) Calculer P_1 . Dans quel cas, le tirage se fait-il dans U_1 ?
- 2) Calculer P_2 .
- 3) Démontrer que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{1}{5}$.

- 4) Déterminer le nombre réel a tel que la suite (U_n) définie par $U_n = P_n - a$ soit géométrique. Calculer alors P_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (P_n) . Dans quelle urne vont se faire la majorité des tirages ?

EXERCICE 5 : (BAC S1 2002)

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B. Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 4. Lorsqu'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (On suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé A, les quatre numéros ont tous la même probabilité d'être cachée. Pour le dé B, la probabilité du numéro i est proportion à i .

- 1) Calculer les probabilités P_1, P_2, P_3, P_4 pour les quatres faces du dé B.
- 2) On lance les deux dés. On note i le numéro caché du dé A et j le numéro caché du dé B. On suppose les lancers indépendants ; on note $P(i; j)$ la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.
- 3) Montrer que $P(1,2) = P(2,1) = P(3,1) = \frac{1}{40}$
- 4) Déterminer les probabilités $P(i; j)$ pour tous les nombres i et j compris entre 1 et 4.
- 5) On appelle Z la variable aléatoire définie par $Z(i, j)$ est le plus grand des nombres i et j . Exemple : $Z(2,1)=Z(1,2)=2$ et $Z(1,1)=1$;
- 6) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
- 7) Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique $E(Z)$.

EXERCICE 6 : (BAC S1 2009)

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz. Le premier jour de l'année, il y a deux chances sur 5 qu'elle propose du riz. Si elle en propose un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain. Si elle n'en propose pas un jour, il y a une sur 3 qu'elle n'en pas le lendemain. On appelle J_n l'évènement « la cantine propose du riz le n ème jour » et K_n l'évènement « la cantine n'en propose pas le n ème jour ». Soit P_n la probabilité de l'évènement J_n .

- 1) Déterminer $P(J_2/J_1)$ et $P(J_2/K_1)$. En déduire P_2
- 2) Montrer que $P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{2}{3}$
- 3) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $U_n = P_n - \frac{1}{2}$
 - a) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
 - b) Calculer U_n , puis P_n en fonction de n .
 - c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs. Montrer que qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{8}{15}$.

EXERCICE 7 : (BAC S1 2018)

Le téléphone portable de Mouhamed Camara contient en mémoire un répertoire de 1500 chansons dont 700 dans la catégorie mbalax, 100 dans catégorie zouk, 200 dans la catégorie techno et 500 dans la catégorie touxourane. Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable. 40% des chansons du répertoire sont interprétées en sérères

et 28% des chansons de la catégorie mbalax sont interprétées en sérère. Au cours de son footing journalier, Mouhamed Camara écoute une chanson grâce à ce mode de lecture. On note :

M l'évènement : « la chanson écoutée est de la catégorie mbalax » et S l'évènement : « la chanson écoutée est interprétée en sérère »

- 1) Calculer $P(S)$ et $P(S/M)$.
- 2) Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie mbalax interprétée en sérère.
- 3) Calculer $P(M/S)$.
- 4) En fait, Mouhamed Camara écoute de cette même façon aléatoire une chanson de son répertoire lors de son footing le matin, à la prise du petit déjeuner, sur le chemin de l'école, au déjeuner et le soir avant d'aller au lit. Son ami Olivier Tendeng, fin mathématicien, lui dit qu'il a $[496 \times (0,4)^3]\%$ de chances d'écouter au moins trois chansons sérère à la fin de la journée. Dire en le justifiant si Olivier Tendeng a raison ou pas.

EXERCICE 8 : Les faces d'un dé cubiques sont numérotés 6; 6; 6; 5; 4 et 3. On suppose que lors d'un lancer, la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro de la face, c'est-à-dire elle est à kx où x est le numéro de chaque la face et k un réel.

- 1) Montrer que $k = \frac{1}{30}$.
- 2) On lance quatre fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois le numéro 6.

EXERCICE 9: Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1 ; 2 ; 3 et m ($m \in \mathbb{R}^*$). On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note $P_1, P_2; P_3$ et P_m les probabilités respectives de tirer le jeton marqué 1; 2; 3 et m . $P_1, P_2; P_3$ et P_m constitue dans cet ordre une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{8}$.

- 1-a) Montrer que $P_1 = \frac{1}{16}$.
- b-) Calculer $P_2; P_3$ et P_m
- 2-) On considère X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué sur le jeton tiré.
 - a-) Définir la loi de probabilité de X .
 - b-) Calculer m sachant que l'espérance mathématique de X vaut 2.

EXERCICE 10 : On considère deux urnes U_1 et U_2 . U_1 contient 3 boules blanches et 2 noires. U_2 contient 5 blanches et 1 noire.

1- L'expérience E consiste à tirer une boule dans chaque urne, le tirage est équiprobable.

Quelle est la probabilité, donnée sous forme de fraction irréductible, de tirer exactement :

- a) 2 boules blanches.
 - b) 2 noires.
 - c) Une blanche et une noire.
- 2- On appelle A l'évènement « les 2 boules tirées sont de la même couleur ».

a) Démontrer que $p(A) = \frac{17}{30}$.

b) On fait l'expérience E cinq fois de suite en ayant soin de remettre les boules tirées après chaque tirage dans leur urne d'origine.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois l'événement A ?

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on fait l'expérience E n fois de suite en ayant soin de remettre les boules tirées après chaque tirage dans leur urne d'origine.

Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement A ?

Trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$.

EXERCICE 11 : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est truqué de façon qu'à chaque jet la probabilité d'obtenir un numéro pair soit égale au double de celle d'obtenir un nombre impair et que toutes les faces portant des numéros pairs sont équiprobables ainsi que les faces portant des numéros impairs.

- 1) On lance le dé une fois et on désigne par p la probabilité d'obtenir un nombre impair.
 - a) Calculer p .
 - b) En déduire la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 2.
- 2) On lance le dé trois fois. Calculer la probabilité de chacun des suivants :
 - a) On obtient deux fois et deux fois seulement le nombre 2.
 - b) On obtient au moins deux fois le nombre 2.

EXERCICE 12 : On dispose d'une urne U_1 , d'une urne U_2 et d'une pièce de monnaie. L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules rouges. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. La pièce de monnaie est truquée de façon que lorsqu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir « face » soit le double de la probabilité d'obtenir « pile ».

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir « face » et la probabilité d'obtenir « pile ».
- 2) On considère l'épreuve suivante : on lance la pièce de monnaie :
 - Si le côté visible est « face » alors on tire simultanément 2 boules de U_1 ;
 - Si le côté visible est « pile » alors on tire simultanément 3 boules de U_2 .
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche ?
 - b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?
 - c) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?
- 3) On répète l'épreuve précédente quatre fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans leurs urnes respectives. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'épreuves qui donnent trois boules blanches.
 - a) Calculer la probabilité de l'événement ($X = 1$).
 - b) Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 13 : Une urne contient trois boules rouges numérotées 1 ; 2 ; 2 et trois boules blanches numérotées 1 ; 1 ; 2. Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1-a) calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « avoir trois boules de même couleur »

B : « la somme des nombres inscrits sur les boules tirées est égale à cinq »

b-) Soit C l'évènement : « avoir au moins une boule rouge qui porte le numéro 2 ». Montrer que $P(C) = \frac{4}{5}$.

2-) Soit X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges portant le numéro 2 obtenues.

a-) Déterminer la loi de probabilité de X.

b-) Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

3-) On répète l'épreuve précédente n fois (≥ 1) de suite, en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne.

a-) calculer la probabilité p_n pour que l'évènement C soit réalisé au moins une fois.

b-) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,99$.

EXERCICE 14 : Une urne contient 12 boules dont n sont noires et les autres blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On suppose que $n = 5$ et on tire sans remise et successivement deux boules de l'urne.

a-) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « la première boule tirée est noire et la seconde est blanche »

B : « les deux boules tirées sont blanches »

b-) On répète l'épreuve six fois en remettant, à l'issue de chaque épreuve, les deux boules tirées dans l'urne. On considère la variable réelle X prenant pour valeur le nombre de réalisation de l'évènement A. Déterminer la loi de probabilité de x ainsi que son espérance mathématique $E(X)$.

2) Dans cette question, on suppose $n \geq 2$.

a-) Exprimer en fonction de n , la probabilité p_n de l'évènement A.

b-) déterminer n pour que p_n soit maximale.

EXERCICE 15: On dispose de deux dés en apparence identique dont l'un est parfait et l'autre truqué. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6. Avec le truqué, la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

1-a) On lance le dé parfait 3 fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparait. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b-) On lance le dé truqué trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ?

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on le lance trois de suite. On considère les évènements suivants :

A : « obtenir exactement deux fois la face portant le numéro 4 »

B : « Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

C : « Choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

a-) Calculer la probabilité de l'évènement B.

b-) Calculer la probabilité de l'évènement C.

c-) En déduire la probabilité de l'évènement A.

Série 10 :

EXERCICE 1 :

Soient O et A deux points fixes distincts. On note r et r' les rotations de centre O et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$. Soient B, C et D tels que $B = r(A)$, $C = r'(A)$ et $D = r(C)$.

- 1) Faire une construction géométrique de B, C et D.
- 2) Montrer que [AD] et [BC] ont même médiatrice. En déduire qu'il existe une isométrie transformant respectivement A, B, et O en D, C et O. Caractériser f .
- 3) Quelle est l'image par r de la droite (AC) ? Montrer que $(AC) \perp (BD)$.

EXERCICE 2 :

ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. Soient I, J, K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la transformation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

- 1) Déterminer les images $f(K)$ et $g(J)$, caractériser f et g .
- 2) Quelle est l'image $g \circ f^{-1}(A)$? Soit M quelconque, $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$. Quelle est la nature du quadrilatère $\square CM_2M_1$?

EXERCICE 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit (C) le cercle de centre O et de diamètre [BC], M est le point de [BC] tel que : $CM = \frac{1}{3} BC$ et (C') est le cercle de diamètre [CM]. Soient I et I' les milieux respectifs des segments [BM] et [CM]. A et A' sont les points de (C) tels que $AMA'B$ est un losange et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ [2π]. La droite (AC) recoupe le cercle (C') en H.

1-a) Montrer que (AB) et (HM) sont parallèles.

b-) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.

c-) Montrer que $HM = \frac{1}{3} AB$ et que $HA^2 = AB^2 - HM^2$.

2-) On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.

a-) Précisons son angle et montrer que son rapport est égal à : $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b-) Déterminer les images des droites (AI) et (MH). En déduire que $S(A')$.

3-) Montrer que $S(I) = I'$ et en déduire que (HI) est tangent en H à (C').

4-) On pose $S' = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}$.

- Vérifier que S' est une similitude directe en précisant le centre et son rapport.
- La droite $(A'M)$ recoupe le cercle (C) en N . Montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C .
- Déterminer $S'(A)$. En déduire alors l'angle S' .

EXERCICE 4 :

Le plan est orienté dans le sens direct . $ABCD$ est un carré de centre O tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On désigne par E le milieu $[CD]$ et par F le milieu de $[BC]$.

1-a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(C) = B$ et $f(E) = F$.

b-) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.

2-) Soit g l'antidéplacement tel que : $g(C) = B$ et $g(D) = C$. Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3-) Montrer que $g = f \circ S_{(CD)}$.

4-) Soit I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct.

a-) Montrer que $r(A; \frac{\pi}{2}) = S_{(AI)} \circ S_{(AD)}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = r(I, \frac{\pi}{2}) \circ r(A, \frac{\pi}{6})$.

b-) On pose $T = f \circ h$. Déterminer $T(A)$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de T .

4-) Déduire que $g^{-1} \circ f \circ \square$ est une symétrie glissée qui transforme D en C .

5-) On munit le plan d'un repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Soit Φ l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = -i\bar{z} + 2 + i$.

a-) Montrer que Φ est un antidéplacement.

b-) Montrer que $\Phi = g$.

EXERCICE 5 :

On considère un triangle ABC rectangle en c tel que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et les triangles ACD et ABE soient isocèles et rectangles en A . On désigne par I, j et K les milieux respectifs des segments $[CD], [AC]$ et $[AD]$.

1-a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement qui transforme A en D et c en A .

b-) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

c-) Soit $F = f(B)$. Montrer que les points A, C et f sont alignés et placer le point F .

2-) Soit R la rotation de centre de a et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = f \circ R$.

- a-) Déterminer $g(E)$.
- b-) Montrer que g est une translation dont on précisera le vecteur.
- c-) En déduire que AEFD est un parallélogramme.

3-) Soit h l'antidépacement qui envoie A sur D et C sur A.

a-) Montrer que h est une symétrie glissante.

b-) Déterminer la forme réduite de h .

4-a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en D et C en A.

b-) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

c-) Soit $F = f(B)$. Montrer que les points A, C et F sont alignés et placer le point F.

EXERCICE 6 :

Le plan est orienté dans le sens direct. OBC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (Γ) . Le point A est le symétrique de C par rapport O. J et K sont les points de (Γ) diamétralement opposés à B et C.

1-) Quelle est la nature de chacun des triangles OKC et BJO.

2-a) Soit $R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$. Montrer que l'angle $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et en déduire que $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

b-) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R.

3-) Soit T la translation de vecteur de \overrightarrow{OB} .

a-) Déterminer la droite (Δ) telle que $T = S_{(\Delta)} \circ S_{(OK)}$. Montrer que $T \circ R$ est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

4-) Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BD}$. Montrer que ABE est un triangle équilatéral de centre O.

5-) Soit f une isométrie du plan qui transforme A en C et O en B. On pose $g = t_{\overrightarrow{BO}} \circ f$.

a-) Déterminer $g(O)$ et $g(A)$.

b-) Montrer que g est soit la symétrie orthogonale d'axe (BC), soit la rotation de centre de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

c-) dans le cas où $g = S_{(OB)}$, caractériser f .

EXERCICE 7 :

Le plan est orienté. ABC est un triangle direct, rectangle en A tel que $AB < AC$. La médiatrice du segment [BC] coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que $f(B) = F$.

- a) Déterminer l'angle de f .
- b) Montrer que l'image de la droite (BC) est la droite (GF), puis déterminer $f(C)$.

2-a) Le cercle (C_1) de diamètre [BC] et le cercle (C_2) de diamètre [EF] se coupent en A et H. Montrer que $f(C_1) = (C_2)$.

b-) Soit $I = f(H)$. Construire I.

c-) Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.

d-) La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que $f(F)=J$

3-) Soit g la similitude indirecte de centre A telle que $g(B)=F$.

a-) Montrer que $g = S_{(AC)} \circ f$.

b-) Soit $E' = f(E)$. Montrer que E' est un point de la droite (AC).

c-) Soit $F' = g(F)$ et $H' = g(H)$. Construire l'image par g du rectangle FHEI.

EXERCICE 8 :

Le plan est orienté. ABC est un triangle direct tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$. Les points I, J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C. Le point E est le milieu du segment [AC]

- 1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.
- 2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Soit (Δ) la médiatrice du segment [IE] et on pose $f = s \circ S_{(\Delta)}$.
 - a) Montrer que $S(I)=B$. En déduire que $f(E)=B$.
 - b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
 - c) Caractériser $f \circ f$. En déduire que $f(B)=C$.
 - d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que $f(J)=K$.
- 3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C)=A$ et $g(K)=I$.
 - a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre g .
 - b) On pose $D = g(A)$. Montrer que le point D appartient à la droite (BI).
 - c) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$. Construire alors le point D.
- 4) a-) On pose $\varphi = g \circ f$. Montrer que φ est une similitude directe, puis déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$. Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.
- 5) a-) Soit Ω le centre de φ . Vérifier que $D = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$. En déduire que $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - b-) On pose $F = \varphi \circ \varphi(I)$. En remarquant $IB=IE$, montrer que (FD) et (JE).
 - c-) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω .

Série 11 :

EXERCICE 1 :

Dans le plan affine euclidien, on donne une droite et deux points distincts F et A , symétriques par rapport à (D) . On désigne par (H) l'hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et (D) pour directrice associée à F .

- 1) Montrer que A est un sommet de (H) . Déterminer l'autre sommet A' en exprimant $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de \overrightarrow{AF} . Construire géométriquement les directrices de (H) , ses foyers, ses sommets et son centre et donner l'allure de (H) .
- 2) Soit (C) un cercle passant par F et centré en un point O de (D) non situé sur l'axe focal. Construire (C) sur la figure. On se propose de montrer que $(H) \cap (C) = \{A, M_1, M_2, M_3\}$ où M_1, M_2 et M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral. On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, choisi de façon que (O, \vec{i}) soit un repère de (D) . A chaque point M du plan correspond ainsi son affine $z = x + iy$; on désigne par a l'affixe de F .
 - a-) Montrer que $M(z)$ appartient à (C) si et seulement si : $z\bar{z} - a\bar{a} = 0$ (On pourra interpréter géométriquement $z\bar{z} - a\bar{a}$). Montrer de même que $M(z)$ appartient à (H) si et seulement si : $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) + (z - \bar{z})^2 = 0$.
 - b-) En déduire que $(C) \cap (H)$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient une équation de la forme $(z - \bar{a})(z^3 - k) = 0$ où k est un nombre complexe qu'on exprimera en fonction de a .
 - c-) On pose $k = r^3 e^{i\theta}$ où r est le module de a et θ un argument de a .
Résoudre alors l'équation $(z - \bar{a})(z^3 - k)$.

EXERCICE 2 : (BAC S1 2016)

Le plan orienté P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note ε l'ensemble des points de P dont l'affixe z vérifie : $jz^2 + \overline{jz^2} - \frac{10}{3}z\bar{z} + 192 = 0$ et f l'application de P dans lui-même associant à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}j^2z$ avec

$$j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}. \text{ On rappelle que : } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}, |j| = 1 = j^3 = j\bar{j}.$$

- 1) Montrer que f est une similitude plane directe dont on donnera les éléments géométriques caractéristiques.
- 2-a) Vérifier qu'un point M' d'affixe z' appartient à $f(\varepsilon)$ si et seulement si $3z'^2 + 3\overline{z'^2} - 10z'\bar{z}' + 64 = 0$. Montrer alors que l'équation $x^2 + 4y^2 = 16$ est une équation cartésienne de $f(\varepsilon)$.
 - b-) Montrer que ε est une conique dont on précisera les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité.
- 3-) Représenter graphiquement $f(\varepsilon)$, ε , leurs foyers, leurs directrices et leurs axes.

EXERCICE 3 : (BAC S1 2001)

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $C\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right); D\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et $E(0; 1; 0)$.

- 1) Déterminer l'ensemble (T) des points $M(x, y, z)$ tels que : $\|\overrightarrow{ME}\| = \|\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\|$.
- 2) Déterminer l'intersection de (Δ) de (T) avec le plan $(O, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
- 3) Montrer que les points de (T) sont à égale distance de E et de la droite (CD) .
- 4) Montrer que l'intersection de (T) et du plan d'équation $z = 0$ est la parabole de foyer E et de directrice (CD) .

EXERCICE 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la courbe (H) d'équation : $x^2 - 4y - 2x - 3 = 0$.

- 1) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les sommets, les foyers, les asymptotes et l'excentricité .
- 2) Soit M_0 le point d'intersection de la droite $(D) : y = 1$ avec (H) d'abscisse positive.
 - a) Déterminer les coordonnées de M_0 , ainsi qu'une équation de la tangente (T) à (H) en M_0 .
 - b) Tracer (H) .
- 3) Soit M le point d'affixe $z = 1 + 3 \cos \theta + 2i \sin \theta, \theta \in \mathbb{R}$.
 - a) Montrer que M décrit une ellipse (E) d'équation : $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 - b) Déterminer les coordonnées des sommets, des foyers et les équations des directrices.

4-a) Vérifier que le point $N\left(1 + \frac{6}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ est un point commun à (H) et (E) .

b-) Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) l'ellipse (E) .

c-) Montrer que les tangentes en N à (H) et (E) sont perpendiculaires.

EXERCICE 5 : (BAC S1 2002)

1) Le plan (P) est rapporté orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.

Justifier que (H) est une conique dont on donnera un foyer , la directrice associée et l'excentricité. Construire (H) .

2) On étudie en fonction du temps t le mouvement du point $M(x; y)$ du plan tel que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \tan(2t) \quad t \in [0; \frac{\pi}{4}[\end{cases} . \text{ Montrer que la trajectoire } (\Gamma) \text{ de } M \text{ est une partie de } (H) \text{ que l'on précisera.}$$

3) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse \vec{V} et en déduire la tangente à (Γ) au point d'abscisse 2.

4) Déterminer les coordonnées du vecteur accélérateur et vérifier que le mouvement est accéléré.

EXERCICE 6 : (BAC S1 2003)

Soit (Δ) une droite de l'espace, F un point n'appartenant pas à (Δ) , K le projeté orthogonal de F sur (Δ) et A un point de (Δ) tel que $AK = 1$.

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MA}\|$.

- 1) Montrer qu'un point de l'espace appartient à (Γ) si et seulement si :
 $\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MA}\|$.
- 2) En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si $\frac{MF}{d(M, (\Delta))} = \frac{1}{2}$ où $d(M, (\Delta))$ désigne la distance du point M à la droite (Δ) .
- 3) Déterminer l'ensemble des points du plan (P_1) de repère $(K, \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KF})$ tels que
 $\|\overrightarrow{MF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{MA}\|$.
- 4) Soit (P_2) le plan passant par K et perpendiculaire à (Δ) . Montrer qu'un point M de (Γ) est un point de (P_2) si et seulement si :
$$\begin{cases} \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{KA} = 0 \\ MF = \frac{1}{2} MK \cdot |\sin(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KA})| \end{cases}$$
- 5) En déduire que l'intersection de (Γ) et (P_2) est l'ensemble des points M de (P_2) tels que $MK = 2MF$. Déterminer alors la nature de cette intersection.

EXERCICE 7 :

Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Soit la courbe (B) : $x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 4y = 0$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (B).
- 2) Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :
 - a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = \frac{1}{50} (3x + 4y + 2)^2$.
 - b) $13x^2 + 13y^2 - 10xy - 36 = 0$
 - c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = \frac{1}{25} (3x + 4y + 2)^2$

EXERCICE 8 :

- 1) Construire la directrice (D) d'une parabole (P) connaissant le foyer F de (P) et deux tangentes (T_1) et (T_2) à la parabole (P). Construire M_1 et M_2 points de contact respectifs de T_1 et T_2 avec (P).
- 2) Soit (D) une droite fixe du plan (P), A et B deux distincts de (D), F un point fixe du plan qui varie de telle sorte que $Aire(MAB) = 4AB \times MF$. Déterminer le lieu géométrique de M.

EXERCICE 9 :

- 1) On donne dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'ellipse (E) :
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ de foyers F et F'. Soit $M \in (E)$ et (D) la tangente en M à l'ellipse (E), soit $N = S(F)$. Montrer que N appartient au cercle directeur (Γ') de centre F' et de rayon $2a$.

- 2) On donne deux cercles concentriques fixes $C(O, a)$ et $C'(O, b)$, $a > b$. (D) et (D') sont deux diamètres fixes et perpendiculaires des cercles $C(O, a)$ et $C'(O, b)$. Une demi-droite $[Ot)$ mobile, pivotant autour de O coupe le cercle $C(O, a)$ en I et le cercle $C'(O, b)$ en J. Déterminer les lieux géométriques de M et N tels que $IMJN$ soit un rectangle tel que (MI) soit parallèle à (D') et (NI) soit parallèle à (D) .
- 3) On donne un cercle fixe $C(F, 2a)$, $a > 0$ et un point fixe F' à l'intérieur du cercle $C(F, 2a)$. Déterminer le lieu géométrique des centres M des cercles (C') passant par F' et tangents intérieurement au cercle $C(F, 2a)$.

EXERCICE 10 :

- 1) Une ellipse (E) variable passe par un point fixe A et admet en A une tangente (T) coupant la directrice mobile (D) associée au foyer F de (E), en un point fixe B. Déterminer le lieu géométrique du foyer F.
- 2) Soit une parabole (P), (D) une directrice, F foyer variable de (P) et décrit un cercle fixe de centre $C(O; 3)$. Déterminer le lieu géométrique du sommet S de la parabole (P).

EXERCICE 11 :

Dans le plan euclidien (P) muni d'un repère d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère une ellipse fixe (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Deux points mobiles M et M' sur l'ellipse sont tels que $(OM) \perp (OM')$.

- 1) Montrer que $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2}$ est une constante.
- 2) Soit N le projeté orthogonal de O sur $[MM']$. Déterminer le lieu géométrique de N lorsque M et M' décrivent (E) de telle sorte que $(OM) \perp (OM')$.

EXERCICE 12 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit la courbe

$$(P_m) : (m^2 - m + 2)y^2 = 2(m^2 - 2m + 2) \text{ ou } x \text{ ou } m \text{ est un paramètre réel.}$$

- 1) Montrer que (P_m) est une parabole pour tout réel m.
- 2) Déterminer les coordonnées du foyer F_m de (P_m) et l'équation de la directrice (D_m) de (P_m) en fonction de m.
- 3) Déterminer les points fixes de la famille de paraboles (P_m) lorsque m varie dans \mathbb{R} .

EXERCICE 13 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Déterminer l'équation cartésienne de la parabole de foyer $F(\frac{1}{2}; 2)$ et de directrice $(D): x = 3$.
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la conique d'excentricité 5, de foyer $F(3; 2)$ et de directrice associée $(D): y = 1$.
- 3) Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse tangente à (O, \vec{i}) de sommets principaux $A(5; 1)$ et $A'(1; 1)$.

- 4) Déterminer une équation cartésienne de la parabole de foyer $F(1; 2)$ et directrice (D) dans chacun des cas suivants :
 - a-) $(D) = (AB)$ avec $A(0; 1)$ et $B(3; 0)$.
 - b-) $(D): 2x - 3y + 5 = 0$.
 - c-) (D) passe par O et orthogonale $(D'): 2x - y + 3 = 0$.
- 5) Construire la courbe (P) d'équation : $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$ en précisant les foyer(s), directrice(s) et l'excentricité. Donner une équation cartésienne de la tangente à (P) au point d'abscisse -1 .
- 6) Reconnaître la courbe d'équation (P): $y^2 + 3y - 5x + 3 = 0$.
- 7) Reconnaître la courbe d'équation (P): $x^2 - 8x + 3y = 0$.
- 8) Reconnaître la courbe d'équation (C): $x^2 - y^2 + 3x + 2y + \lambda = 0$.

Série 12 : Courbes paramétrées

EXERCICE 1 : (BAC S1 2002)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.
Justifier que (H) est une conique dont on donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Construire (H).
- 2) On étudie en fonction du temps t le mouvement du point $M(x; y)$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2t} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t \end{cases} \text{ ou } t \in [0; \frac{\pi}{4}[.$$
 Montrer que la trajectoire (Γ) de M est une partie de (H) que l'on précisera.
- 3) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse \vec{V} et en déduire la tangente à (Γ) au point d'abscisse 2.
- 4) Déterminer les coordonnées du vecteur accélérateur et vérifier que le mouvement est accéléré.

EXERCICE 2 : (BAC S1 2003)

Dans le plan orienté, (C) est le cercle trigonométrique. A tout point m de (C), on associe le point M symétrique du point A d'abscisse 1 par rapport à la tangente en m au cercle (C). On cherche à construire l'ensemble (Γ) des points M lorsque m décrit (C).

- 1) Montrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de (Γ) .
- 2) Pour un point m de (C), soit t une mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{Om}) . Montrer que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de M sont telles que :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (1)$$
- 3) On doit construire la courbe paramétrée (Γ) dont (1) est un système d'équations paramétriques le réel t parcourant \mathbb{R} .
 - a) Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$

- b) Montrer que pour tout t non nul, un vecteur directeur de la tangente en M à (Γ) est $\vec{u}(\cos \frac{3t}{2}, \sin \frac{3t}{2})$.
- 4) Soit M un point de (Γ) de paramètre t , $a(t)$ le coefficient directeur de la droite (AM) . Déterminer la limite a_0 de $a(t)$ lorsque t tend vers 0. (On admet que a_0 est la pente de la tangente en A à (Γ)).
- 5) Déterminer tous les points où la tangente est parallèle à un des axes du repère.
- 6) Tracer la courbe (Γ) .

EXERCICE 3 : (BAC S1 2005)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) (Unité graphique 2 cm).

- 1) Etude d'une courbe paramétrée. On considère la courbe (C) définie paramétriquement par :
- $$\begin{cases} x = f(t) = -\frac{t^2}{2} + t \\ y = g(t) = \frac{t^2}{2} + t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
- a) Etudier conjointement les variations sur \mathbb{R} de f et g .
- b) Préciser les points de (C) où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.
- c) Préciser les points d'intersection de (C) avec chacun des axes et donner un vecteur directeur de la tangente en ces points.
- 2) Nature de la courbe
- a) Soit s l'application du plan complexe qui au point m d'affixe z associe le point M' d'affixe Z telle que $Z = (1 + i)z$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S .
- b) Déterminer l'affixe Z de M' sous la forme $Z = X + iY$ lorsque M est un point de (C) .
- c) Soit (L) l'image de (C) par s . Déterminer une équation cartésienne de (L) .
- d) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de (L) . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C) . Construire géométriquement (C) . On marquera les points identifiés dans les questions 1-b) et 1-c).

EXERCICE 5 : (BAC S1 2006)

- 1) On considère l'équation différentielle suivante : $y' + y = \frac{e^{-x} \cos x}{2 + \sin x}$ (E). f étant une fonction numérique dérivable sur \mathbb{R} , on pose $g(x) = e^x f(x)$
- a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$.
- b) Déterminer la solution générale de (E), en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques :
- $$\begin{cases} x(t) = \ln(2 + \sin t) \\ y(t) = \ln(2 + \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
- a) Compare $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M(-t + \frac{\pi}{2})$.
- b) En déduire que la symétrique orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ) , il suffit d'étudier x et y dans $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$.

- c) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y dans $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$ et tracer la courbe (Γ).

EXERCICE 6 : (Extrait concours CREES S1 édition 2022)

On considère les équations différentielles suivantes : $(E_1): y'' + 4y = 0$ et $(E_2): y'' + y = 0$.

- 1) Donner la solution de (E_1) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) passe par le point $A(0; -2)$ et admet en ce point une tangente horizontale .
- 2) Donner la solution g de l'équation (E_2) vérifiant $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = -1$.
- 3) Soit (C) la courbe définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = -2 \cos t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$
 - a) Déterminer la période commune des fonctions x et y ; compare la position des points $M(t)$ et $M(t + \pi)$, puis en déduire un élément de symétrie de (C) . Justifier le choix de l'intervalle $[[0; \pi[$ comme intervalle d'étude .
 - b) Etudie les variations de x et y sur $[0; \pi]$ et dresser le tableau de variations conjoint.
 - c) Représenter la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm). On précisera les tangentes particulières ainsi que la tangente au point O .

EXERCICE 7 :

- 1) Etudier la courbe (C) dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin t \end{cases}$
- 2) Exprimer x en fonction de y . Déduisez –en une équation cartésienne de (C) . En prenant y comme paramètre, trouver un vecteur directeur de la tangente au point $A(-1; 1)$ obtenu pour $t = \frac{\pi}{2}$.
- 3) Tracer la courbe (C) .

EXERCICE 8 :

Soit (C) la courbe dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3}, t \in [0; +\infty[\end{cases}$

- 1) Pour quelle valeur de t peut-on obtenir $M(t)$ à l'origine ?
- 2) On suppose t non nul. Compare $(x(\frac{1}{t}), y(\frac{1}{t}))$ à $(x(t), y(t))$. Que pouvez en déduire pour $M(\frac{1}{t})$ et $M(t)$? Montrez qu'il suffit alors d'étudier (C) pour t élément de $[0; 1]$.
- 3) Etudiez les variations de x et y sur $[0; 1]$. Précisez la tangente au point O . Tracer la courbe (H) .

Série 13 : Transformations élémentaires de l'espace

EXERCICE 1 :

Soient (P) et (P') d'équations respectives : $2x + 3y + z + 2 = 0$ et $2x + 3y + z - 2 = 0$.

- 1) Vérifier que ces deux plans sont parallèles.
- 2) En déduire qu'il existe une translation dont on déterminera le vecteur qui, transforme

(P) en (P').

EXERCICE 2 :

- 1) Soit ABCDEFGH un cube. On désigne par I le milieu de [BC] et J le centre de la face BCGF. Déterminer les coordonnées des sommets du cube par la translation de vecteur \vec{IJ} dans le repère (A, B, D, E).
- 2) Soit ABCDEFGH un cube et f l'application qui à tout point M de de l'espace associe le point M' de ε tel que : $\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MH} - \vec{MB} - \vec{ME}$. Démontrer que f est une translation.

EXERCICE 3 :

Soient les points $A(1; -2; 1), B(-1; 0; 2), A'(0; 1; 1), B'(4; -3; -1)$.

- 1) Démontrer qu'il existe une homothétie h, dont on précisera le centre et le rapport telle que $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$.
- 2) Déterminer l'image du point O par h.

EXERCICE 4 :

Soit ABCDEFGH un cube. Le plan est muni du repère (A, $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}$). Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression analytique des réflexions de plans (P).

- a) (P) = (EFG) b) (P) = (CDE) c) (P) = (BCH) d) (P) = (BDF)

EXERCICE 5:

ABCD est un tétraèdre régulier. On désigne par : I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AD], [DC], [CB], [BA], [AC] et [BD].

- 1) Démontrer que IJKL est un carré et que la droite (MN) est orthogonale au plan (IJK).
- 2) Soit (d_1) et (d_1) les demi - tours d'axes respectifs (IK) et (JL), s la réflexion de plan (IJK). On pose $d = d_2 \circ d_1$.
 - a) Déterminer deux réflexions s_1 et s_2 telles que : $d_1 = s \circ s_1$ et $d_2 = s_2 \circ s$.
 - b) En déduire que d est un demi- tour dont on précisera l'axe.

EXERCICE 6 :

ABCDEFGH est un cube de centre O, I le centre de gravité du triangle BCG. On se propose de déterminer et de construire les points d'intersection de la droite (OI) avec les plans du cube.

- 1) Démontrer que le point d'intersection de la droite (OI) avec le plan (ADH) est le centre de gravité j du triangle AEH. Placer J.
- 2) a-) Démontrer que : $\vec{DJ} = 2\vec{CI}$.
b-) En déduire que les droites (Cd) et (IJ) sont sécantes en un point K que l'on précisera. Placer K.
c-) Démontrer de même que les droites (EF) et (IJ) sont sécantes en un point L que l'on précisera. Placer L.

EXERCICE 7 :

Soit (Π) le plan d'équation $2x + y - z = 3$ et (Δ) la droite orthogonale à (Π) passant par O .

- 1) Déterminer l'expression analytique des transformations suivantes :
 - a-) réflexion s_{Π} ;
 - b-) demi-tour s_{Δ} ;
 - c-) $s_{\Delta} \circ s_{\Pi}$
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s_{\Delta} \circ s_{\Pi}$.

EXERCICE 8 :

- 1) Démontrer que toute symétrie centrale de ε est la composée de trois réflexions.
- 2) Soit ABCDEFGH un cube de centre O . On désigne par s_O la symétrie centrale de centre o , $s_{(AOC)}$ la réflexion de plan (AOC) et $s_{(AG)}$ le demi-tour d'axe (AG) .
Déterminer les transformations suivantes :
 - a-) $s_O \circ s_{(AOC)}$ et $s_{(AOC)} \circ s_O$.
 - b-) $s_O \circ s_{(AG)}$ et $s_{(AG)} \circ s_O$

EXERCICE 9:

On considère le tétraèdre ABCD tel que $AB = BC = CD = BD$ et (AB) est orthogonale au plan (BCD) noté (P) .

- 1) Prouver qu'il existe une rotation r telle que $r(A) = A, r(B) = B$ et $r(C) = D$.
 - a) Préciser son axe et son angle (au signe près).
 - b) Construire un point I du plan (BCD) tel que $r = S_{(ABI)} \circ S_{(ABC)}$.
- 2) Montrer qu'il existe une rotation R d'axe (BD) transformant A en C et tel que $r(C) = S_{(P)}(A)$. Préciser quelle est la transformation $R \circ R$.
- 3) Préciser les transformations suivantes définies à partir du cube ABCDEFGH :
 $S_{(ABE)} \circ S_{(ABC)}, S_{(AEF)} \circ S_{(EGC)}, S_{(AE\Box)} \circ S_{(BDF)}, S_{(P)} \circ S_{(AEG)}$ où (P) est le plan médiateur de $[AB]$.

EXERCICE 10 :

Dans le l'espace orienté, on considère deux points A et D et le plan (P) orthogonal en A à la droite (AD) . On convient d'orienter (P) en choisissant pour vecteur normal \overrightarrow{AD} . Dans le plan (P) , on considère deux points B et C tels que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct. On pose $AB = BC = CA = a$. On note I le milieu du segment $[BC]$.

- 1) a) Placer les éléments précédents sur la figure (on représentera \overrightarrow{AD} ascendant).
b) Montrer que le plan (IDA) est le plan médiateur du segment $[BC]$.
- 2) Soit S_1 la réflexion par rapport au plan (ABC) et S_2 la réflexion par rapport au plan (DBC) . On note $r = S_1 \circ S_2$.
 - a-) Indiquer l'image de D par r et déterminer l'axe et l'angle de la rotation r . (Le plan (AID) sera orienté de telle sorte que $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$).
 - b-) Déterminer en fonction de a la distance AD pour l'angle de r admette pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 11 : (BAC S1 1999)

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application v de (E) dans (E) qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x'; y'; z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z + 1 \\ z' = y + 1 \end{cases}$$

1-a) Soit $A(1; 0; 0)$, h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2. Soit $f = h_1 \circ v$. Démontrer que f admet un unique point invariant B.

b-) Soit $r = h_2 \circ f$ ou h_2 est l'homothétie de centre B et rapport $\frac{1}{2}$. Démontrer que r est un demi-tour dont on précisera l'axe (D).

2-) En déduire que v est la composée du demi-tour r et d'une translation dont le vecteur à préciser est un vecteur directeur de (D).

EXERCICE 12 : (BAC S1 2000)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

- 1) Déterminer les coordonnées de G.
- 2) Démontrer que la droite (OG) est orthogonale au plan (ABC).
- 3) Déterminer les coordonnées de l'image de O par la réflexion $S_{(ABC)}$.
- 4) Déterminer les coordonnées des images de O, A, B et C par le demi-tour $S_{(OG)}$.

