Terminale S **Exercices suites numériques** **2011-2012**

Exercice 1 :

Dire en justifiant si les suites (u_n) définies ci-dessous sont arithmétiques, géométriques ou ni l'un ni l'autre. Dans le cas où elles sont arithmétiques ou géométriques, préciser le premier terme et la raison.

1) $u_{n+1} = u_n + 1$ et $u_0 = -5$
2) $u_n = n - 5$
3) $u_n = \frac{1}{3^n}$
4) $u_n = 2 \times \frac{5^{2n+1}}{7^{3(n+1)}}$

Exercice 2 : étude d'une suite du type $u_{n+1} = a \times u_n + b$

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n + \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).

1) Déterminer α pour que (v_n) soit une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Ecrire v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3

Préciser, si possible, les variations et la limite des suites (v_n) suivantes :

1) $v_n = (-1)^n + 1$
2) $v_n = -3 \times 2^n$
3) $v_n = 3 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^n + 5$
4) $v_n = \left(\frac{-5}{3}\right)^{n+1}$

Exercice 4

Démontrer par récurrence la formule :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Exercice 5

Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6.

Exercice 6

Soit x un nombre réel positif.

1) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout n entier naturel, $1 + nx \leq (1 + x)^n$
2) Proposer une autre démonstration de ce résultat.

Exercice 8

On considère la suite u définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1) Démontrer que la suite u est décroissante.
2) Démontrer que la suite u est minorée par 0.
3) Déterminer la limite de la suite u.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 3$.

1) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
   a) (u_n) est –elle strictement croissante; strictement décroissante ? Justifier.
   b) (u_n) est-elle minorée; majorée ?Si oui, donner un minorant (resp. un majorant) le plus précis possible.
2) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = 1$.
   a) Cette suite semble-t-elle majorée; minorée; monotone ?
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 1$.
   c) Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 10

Démontrer que ces suites sont adjacentes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Vérifier avec un tableur que leur limite commune semble être $\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 11 : suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 8}.$$

1) On pose $v_n = u_n^2 - 16$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa limite ?
2) Démontrer que, pour tout entier n, $|u_n - 4| \leqslant \frac{|v_n|}{4}$.

   En déduire la limite de u_n.

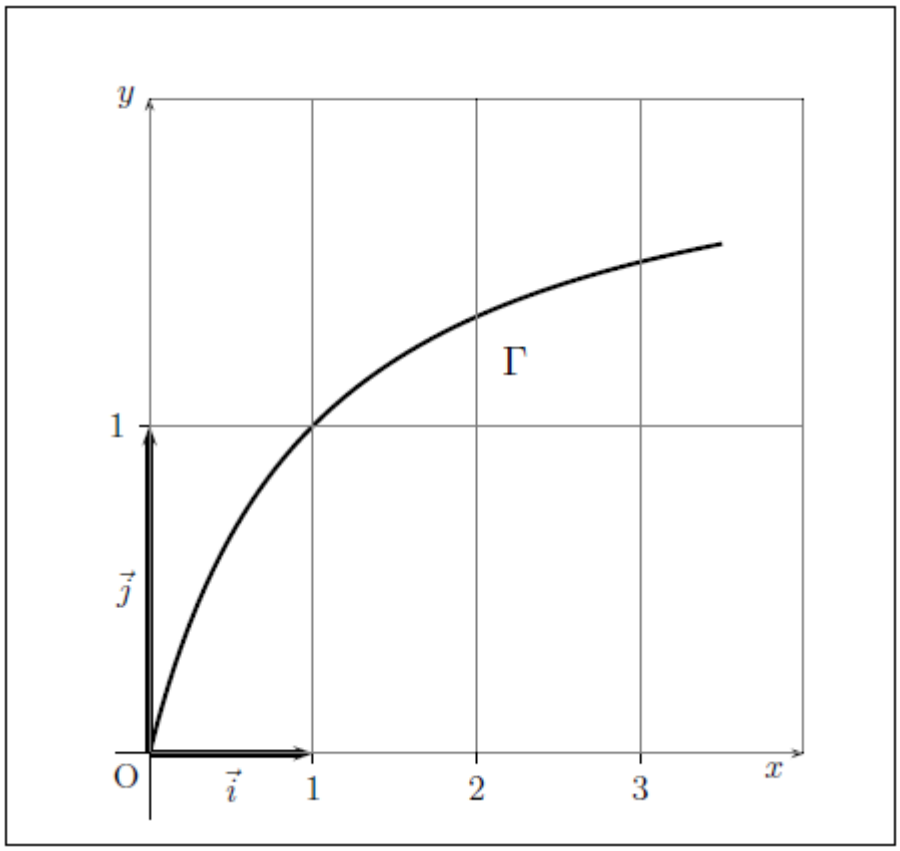
Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} \end{cases}$$

1/ a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Le graphique ci-dessous représente sur [0 ;+∞[et dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{2x}{x+1}$.



Placer sur le graphique les points de coordonnées (k, u_k) pour k = 0, 1, 2 et 3.

2/ Déduire de la question précédente une conjecture de l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.

Exercice 13 :

Soit x un nombre réel positif.

1) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout n entier naturel $1 + nx \leqslant (1 + x)^n$

2) Proposer une autre démonstration de ce résultat.

CORRECTION

Exercice 1 :

1) $u_0 = -5$; $u_1 = u_0 + 1 = -5 + 1 = -4$ et $u_2 = u_1 + 2 = -4 + 2 = -2$
$u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 2$
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$: donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{5}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$
$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$: donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2) $u_{n+1} - u_n = (n + 1) - 5 - n + 5 = 1$
Donc (u_n) est la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = -5$.

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$
Donc (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

4) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{2(n+1)+1}}{7^{3(n+2)}}}{\frac{5^{2n+1}}{7^{3(n+1)}}} = \frac{5^{2n+3}}{7^{3n+6}} \times \frac{7^{3n+3}}{5^{2n+1}} = \frac{5^2}{7^3} = \frac{25}{343}$

Donc (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{25}{343}$ et de premier terme $u_0 = \frac{2\times5}{7^3} = \frac{10}{343}$.

Exercice 2 : étude d'une suite du type $u_{n+1} = a\times u_n + b$

1) Soit $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = 3u_n - 2 + \alpha = 3(v_n - \alpha) - 2 + \alpha = 3v_n - 2 - 2\alpha$
Pour que (v_n) soit une suite géométrique il suffit que $-2 - 2\alpha = 0$
Soit $\alpha = -1$.
La raison de la suite géométrique (v_n) est alors 3.
$v_1 = u_1 + \alpha = 2 - 1 = 1$.
2) On alors $v_n = 3^{n-1}$ et $u_n = 3^{n-1} + 1$

Exercice 3

1) $v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^n (-1 - 1) = (-1)^n\times(-2) = 2\times(-1)^{n+1}$
$v_{n+1} - v_n$ n'est pas de signe constant.
Donc (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante
$v_0 = 2$ $v_1 = 0$ $v_2 = 2$
On peut montrer facilement que $v_{2k} = 2$ et $v_{2k+1} = 0$ avec $k \in \mathbb{N}$.
Donc la suite (v_n) n'a pas de limite.

2) (v_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme -3.

CORRECTION

Donc (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

A la « main » : $v_{n+1} - v_n = -3\times2^{n+1} + 3\times2^n = 3\times2^n(-3+1) = -6\times2^n < 0$

Donc la suite (v_n) et décroissante.

Comme $2 > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

3) $v_{n+1} - v_n = 3\times\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 5 - 3\times\left(\frac{-2}{3}\right)^n - 5 = 3\times\left(\frac{-2}{3}\right)^n \times\left(\frac{-2}{3} - 1\right) = -3\times\frac{5}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)^n < 0$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < -\frac{2}{3} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$

4) (v_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{5}{3}$ et de premier terme $-\frac{5}{3}$.

Donc (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $-1 < -\frac{5}{3} < 1$

Exercice 4

Soit P_n la propriété « $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ »

Initialisation : $1 + 2\times1 - 1 = 1 = 1^2$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n fixé.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + [2(n+1) - 1] = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier supérieur ou égal à 1.

CORRECTION

Exercice 5

Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6.

Soit P_n la propriété « le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple de 6»
Initialisation : P_0 est vraie car $3\times0^2 + 3\times0 + 6 = 1\times6$ est bien un multiple de 6.
Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier naturel n fixé.
$3(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 6 = 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 6 = 3n^2 + 3n + 6 + 6(n + 1)$
Or $3n^2 + 3n + 6$ est un multiple d'après l'hypothèse de récurrence et $6(n + 1)$ est un multiple de 6.
Donc $3n^2 + 3n + 6 + 6(n + 1)$ est aussi un multiple de 6.
Donc P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel.

Exercice 6

1) Soit P_n la propriété « $1 + nx \leq (1 + x)^n$ ».
Initialisation : $1 + 0\times x = 1 \leq 1 = (1 + x)^0$: donc P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier naturel n fixé.
$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n$
Or d'après l'hypothèse de récurrence, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
Donc : $(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)$
Soit $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$
Soit $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$ car $nx^2 \geq 0$
Donc $1 + (n + 1)x \leq (1 + x)^{n+1}$
Donc P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel.

Exercice 8

1) Démontrons par récurrence que la proposition P_n « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ » est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation :
$u_1 - u_0 = \frac{1}{2}\times10 + 1 - 10 = -4 \leq 0$
Donc P_0 est vraie.
Hérédité :
Démontrons que si P_n est vraie pour un entier naturel n fixé est vraie alors P_{n+1} est vraie.
$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 1 - \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \leq 0$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.
Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion : la proposition P_n est vraie au rang 0 et héréditaire, donc est vraie pour tout entier naturel n.

CORRECTION

Ainsi la suite u est bien décroissante.

2) Démontrons par récurrence que la proposition P_n « $u_n \geq 0$ » est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation :

$u_0 \geq 0$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité :

Démontrons que si P_n est vraie pour un entier naturel n fixé est vraie alors P_{n+1} est vraie.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geq 0$ car $u_n \geq 0$ par hypothèse de récurrence.

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la proposition P_n est vraie au rang 0 et héréditaire, donc est vraie pour tout entier naturel n.

Ainsi la suite u est bien décroissante.

CORRECTION

3) La suite u est décroissante et minorée : elle est donc convergente.
Soit l sa limite.
l vérifie l'équation $l = \frac{1}{2} \times l + 1$
Donc l = 2

Exercice 9

1) a) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) > 0$ car $n + 1 > n$.
Donc la suite (u_n) est strictement croissante.
b) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors (u_n) n'est pas majorée.
$u_0 = -3$ et u_n est croissante donc -3 est un minorant de (u_n).

2) a) $v_0 = 1$; $v_1 = 1 + 1 - 3 = -2$
L'utilisation d'un tableur ou de la calculatrice permet d'obtenir le tableau suivant :

n	v(n)
0	1
1	-1
2	-5
3	-133
4	-2352773
5	-1,3024E+19

La suite (v_n) semble être strictement décroissante et majorée par 1.
b) Démontrons ce résultat par récurrence.
Soit P_n la proposition "$v_n \leqslant 1$ pour tout entier naturel n".
$v_0 = 1 \leqslant 1$ donc P_0 est vraie.
Supposons P_n vraie pour un entier n fixé.
On alors $v_n \leqslant 1$.
Alors : $f(v_n) \leqslant f(1)$ car la fonction f étant croissante, elle conserve l'ordre.
Soit $v_{n+1} \leqslant -1 \leqslant 1$
Donc P_{n+1} est vraie.
Donc d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.
c) Montrons par récurrence que la suite (v_n) est strictement décroissante.
Soit P_n la proposition "$v_{n+1} < v_n$ pour tout entier naturel n".
$v_1 < v_0$ car $-1 < 1$.
Supposons P_n vraie pour un entier n fixé.
On a donc $v_{n+1} < v_n$
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors :
$f(v_{n+1}) < f(v_n)$

CORRECTION

Soit $v_{n+2} < v_{n+1}$
Donc P_{n+1} est vraie.
Donc d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n.
Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Exercice 10

Démontrer que ces suites sont adjacentes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{(n+1)^2 n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)^2 n} = -\frac{1}{(n+1)^2 n} < 0$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

$$u_n - v_n = -\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

La suite (u_n) est convergente, la suite (v_n) est divergente et la milite de leur différence est égale à 0.
Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Avec un tableur :

n	u(n)	PI²/6 - u(n)
1	1	0,64493407
2	1,25	0,39493407
3	1,36111111	0,28382296
4	1,42361111	0,22132296
5	1,46361111	0,18132296
6	1,49138889	0,15354518
7	1,51179705	0,13313701
8	1,52742205	0,11751201
9	1,53976773	0,10516634
10	1,54976773	0,09516634
11	1,55803219	0,08690187
12	1,56497664	0,07995743
13	1,5708938	0,07404027

CORRECTION

14	1,57599584	0,06893823
15	1,58044028	0,06449378
16	1,58434653	0,06058753
17	1,58780674	0,05712733
18	1,59089316	0,05404091
19	1,59366324	0,05127082
20	1,59616324	0,04877082
21	1,59843082	0,04650325
22	1,60049693	0,04443713
23	1,60238729	0,04254677
24	1,6041234	0,04081066
25	1,6057234	0,03921066
26	1,60720269	0,03773137
27	1,60857444	0,03635963
28	1,60984995	0,03508412

La convergence vers $\frac{\pi^2}{6}$ est lente.

Exercice 11 : suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1) $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 16 = \frac{1}{2}u_n^2 + 8 - 16 = \frac{1}{2}u_n^2 - 8 = \frac{1}{2}(u_n^2 - 16) = \frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2) $v_n = (u_n - 4)(u_n + 4)$

Donc $u_n - 4 = \frac{v_n}{u_n + 4}$ $(u_n + 4 \neq 0$ car $u_n \geq 0)$

Donc $|u_n - 4| \leqslant \frac{|v_n|}{4}$ car $u_n + 4 \geq 4$ et donc $\frac{1}{u_n + 4} \leqslant \frac{1}{4}$

Or comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, alors la suite géométrique (v_n) converge vers 0.

En admettant que la suite (u_n) est convergente, on a :- $\frac{|v_n|}{4} \leqslant u_n - 4 \leqslant \frac{|v_n|}{4}$

Par passage, à la limite on obtient et en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Justification de la convergence de (u_n) :

On a $v_n = \frac{v_0}{2^n} = \frac{u_0^2 - 16}{2^n}$ et $u_n = \sqrt{16 + \frac{u_0^2 - 16}{2^n}}$

Donc si $u_0 > 4$ alors (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
Et si $u_0 < 4$ alors (u_n) est croissante et majorée par 4 donc convergente.
Et si $u_0 = 4$ alors (u_n) est constante.
Donc quel que soit $u_0 \geq 0$, la suite (u_n) est convergente.

CORRECTION

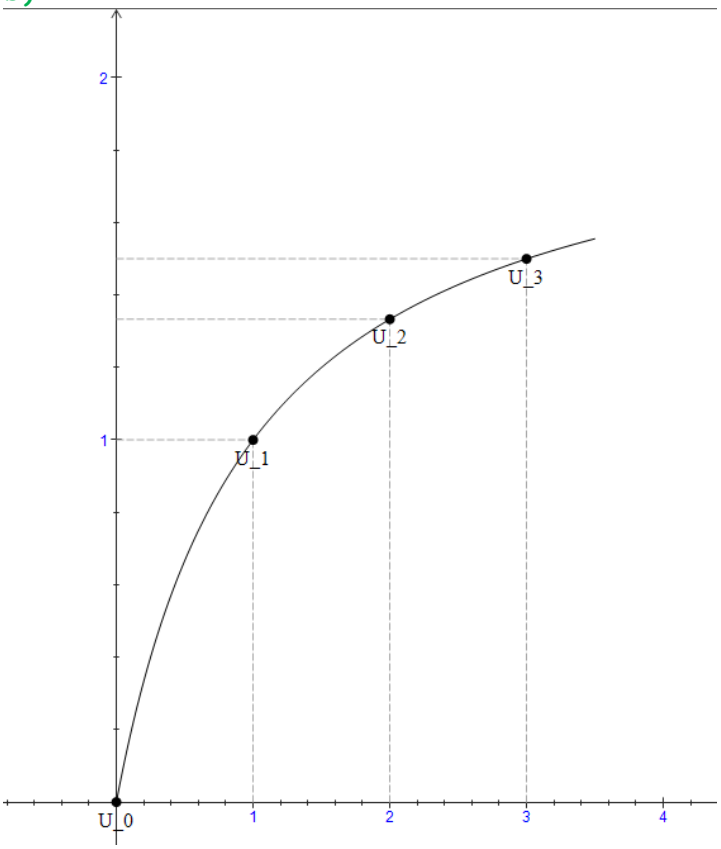
Remarques :

- L'expression $u_n = \sqrt{16 + \frac{{u_0}^2 - 16}{2^n}}$ permet de retrouver directement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$
- 4 vérifie l'équation : $l = \sqrt{\frac{1}{2}l^2 + 8}$

Exercice 12 :

1) $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{4}{4 - 1} = \frac{4}{3}$; $u_3 = \frac{4}{4 - \frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$; $u_4 = \frac{4}{4 - \frac{3}{2}} = \frac{8}{5}$

b)



2) Il semble que $u_n = \frac{2n}{n + 1}$

Montrons le par récurrence.

Soit P_n la proposition : "Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n}{n + 1}$".

$\frac{2 \times 0}{0 + 1} = 0 = u_0$: donc u_0 est vraie.

Supposons P_n vraie.

CORRECTION

$u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} = \dfrac{4}{4 - \dfrac{2n}{n+1}}$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Soit $u_{n+1} = \dfrac{2}{2 - \dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{2(n+1)}{2(n+1) - n} = \dfrac{2(n+1)}{(n+1)+1}$

Donc P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n.

Donc $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$

Exercice 13 :

1) Soit P_n la proposition "$1 + nx \leqslant (1 + x)^n$ pour tout entier naturel n"
   Initialisation : $1 + 0 \times x \leqslant (1 + x)^0$ (car $1 \leqslant 1$) : donc P_0 est vraie
   Hérédité : Supposons P_n vraie pour un entier n fixé.
   Alors $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \times (1 + x)$
   Or $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ car P_n est supposée vraie (hypothèse de récurrence).
   Donc $(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x)$
   Soit $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$ car $nx^2 \geq 0$
   Donc P_{n+1} est vraie.
   D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx)$ pour $n \geq 1$
   Etudions le sens de variation de f.
   $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n = n[(1 + x)^{n-1} - 1]$
   Or $x \geq 0$ donc $1 + x \geq 1$ et $(1 + x)^{n-1} \geq 1$
   D'où : $(1 + x)^{n-1} - 1 \geq 0$
   Soit $f'(x) \geq 0$
   Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
   $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$
   On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour tout x réel positif.
   Donc $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour tout x réel positif.