EXERCICE 1

1. Considérons, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation suivante : (E) : $45x - 16y = 2$.
   a) À l'aide de l'algorithme d'*EUCLIDE*, déterminer le *PGCD* de 45 et 16.
   b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).
   c) Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E).
2. Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement au port d'Abidjan pour y décharger et charger des marchandises.
   Le navire A accoste tous les 90 jours et le navire B, tous les 32 jours. Le Samedi 09 *janvier* 2021, le navire A accoste au port d'Abidjan et 4 jours plus tard, le navire B accoste à son tour au port d'Abidjan.
   On note J la date de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port d'Abidjan.
   a) Déterminer le nombre de jours séparant la date du 9 *Janvier* 2021 de la date J.
   b) En déduire la date J.
   c) Déterminer, à l'aide d'un tableau de congruence, le jour de la semaine correspondant à la date J.

EXERCICE 2

Intéressons nous aux **Triplets Pythagoriciens**(TP), d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 = z^2$.

1. a) Justifier que le triplet $(3; 4; 5)$ est un TP.
   b) Soit p un entier naturel non nul. Démontrer que si $(x; y; z)$ est un TP alors $(px; py; pz)$ est aussi un TP.
   c) Justifier qu'un triplet constitué de nombre impairs ne peut être un TP.
2. On admet que tout entier naturel non nul n peut de décomposer de façon unique comme $n = 2^{\alpha}k$ où α est un entier naturel et k un entier naturel impair.
   a) Déterminer les décompositions respectives de 9 ; 120 et 192.
   b) Soit x et z deux entiers naturels non nuls dont les décompositions sont $x = 2^{\alpha}k$ et $z = 2^{\beta}m$.
   En déduire les décompositions respectives de $2x^2$ et de z^2.
   c) Justifier que l'équation $2x^2 = z^2$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   d) En déduire que, si $(x; y; z)$ est un TP, alors on a $x \neq z$.
3. a) Déduire des questions 1.a) et 1.b) tous les TP de la forme $(x; y; 2015)$.
   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $(2n+1; 2n^2+2n; 2n^2+2n+1)$ est un TP.
   En déduire tous les TP de la forme $(2015; y; z)$.
   c) Sachant que $403^2 = 169 \times 961$, résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation : $z^2 - x^2 = 403^2$. en déduire

TP de la forme $(x, 2015, z)$

EXERCICE 3

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $4x \equiv 4 \quad [8]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, le système :
$$\begin{cases} 5x + 6y \equiv 3 & [8] \\ 3x + y \equiv 5 & [8] \end{cases}$$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $n \times 7^{3n} + 4n - 1 \equiv 0 \quad [8]$.