RECUEIL DES SUJETS DU BAC IVOIRIEN DE 2010 à 2019: SERIE C

YAO YAO JUNIOR, diplômé de l'ENS d'Abidjan
PROFESSEUR DES LYCEES ET COLLEGES |
PAYS : CÔTE D'IVOIRE
CONTACT : (+225)09.31.01.01

BAC 2019 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que $AB = 3$.

On note E le milieu du segment $[BC]$ et G le barycentre des points pondérés $(A, 4), (B, -1) et\ (D, -1)$.

1. **a) Démontre que A est le milieu du segment $[KG]$**

   b) Justifie que : $GB^2 = \frac{45}{2}$

   c) Justifie que :$GB = GD$

   d) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

   $$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9$$

2. **a) Justifie que : $AE = \frac{3\sqrt{5}}{2}$**

   b) Démontre que pour tout point M du plan :

   $$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AE}$$

   c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

   $$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63$$

EXERCICE 2

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$.

(on rappelle que $m = 10^2a + 10b + c$)

Partie A

1. **Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1; b = 2\ et\ c = 1$.**
2. **On suppose que : $m \equiv 0[27]$.**
   i. **Démontre que : $m = 10^2a + 10\overline{bc} \equiv 0[27]$**
   ii. **Déduis-en que : $10\overline{bc} + a \equiv 0[27]$**
   iii. **Justifie que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.**

Partie B

Dans cette partie on suppose que $a > c$.

On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a\ et\ d = m - p$.

1. **Justifie que : $d = 99u$**
2. **Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.**
3. **On suppose que : $b = a + c$**
   i. **Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$**
   ii. **Justifie que : $m = 110b + 101c$.**
   iii. **Démontre que les entiers naturels m qui ne sont pas premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$; $c \neq 0$, $b + c$ n'est pas divisible par 3; $b\ et\ c$ sont premiers entre eux.**
   iv. **Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d.**

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions $f_n\ et\ F_n$ continues sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}}$ et $F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$

On note ($\mathcal{C}_n$) la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère (O,I,J).

On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe ($\mathcal{C}_n$).

Partie A.

On considère de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2}\ )$.

On désigne par la courbe ($\mathcal{C}$) de la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère (O,I,J).

1. **Démontre que f est une fonction impaire**
2. **a) Calcule la limite $f(x)$ puis $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.**

   b) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.
3. **On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.**

   a) Justifie que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) Détermine le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.

4. Détermine une équation de la tangente (Δ) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5. On note g la fonction dérivable $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = -x + \ ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)$.

a) Détermine le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b) Détermine les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Δ). (On pourra calculer $g(0)$.)

6. Construis la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (Δ) dans le plan muni d'un repère (O,I,J).
7. On note A l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0 \ et \ x = 1$.

Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie B

1. a) Justifie que F_n est définie sur $\mathbb{R}$

b) Démontre que F_n est une fonction impaire.

c) Étudie le sens de variation de F_n sur $[0;+\infty[$.

2. Soit (I_n) la suite numérique définie par :

$$I_0 = ln\left(1+\sqrt{2}\right) \ et \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

a) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$

b) Démontre que la suite (I_n) est décroissante.

c) Démontre que la suite (I_n) est convergente. *(On ne demande pas de calculer la limite de (I_n)).*

d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a : $t^{2n}\sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$

e) A l'aide d'une intégration par paries, justifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2} I_n.$$

$$\left(\textit{On remarquera que pour tout nombre réel } t, \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

On admet que : $I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} I_0$

f) Calcule $I_1 \ et \ I_2$

3. a) Démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, F_n(x) = I_n + \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} dt$

b) Démontre que :

$\forall\, t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ \ et\ \forall\, x \geq 1, \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}(x^{2n} - 1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} dt$

c) Déduis-en la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n, $(\mathcal{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.

e) Construis la courbe $(\mathcal{C}_2)$ dans le plan muni du repère (O,I,J).

BAC 2018 RCI – SERIE C

Exercice 1

L'unité graphique est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un losange OABC tel que :

$$OA = 7 \ \ et\ Mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{3}.$$

E est le point du segment $[OB]$ tel que : $OE = OA$.

F est le point de la demi-droite $[OC)$ tel que : $CF = EB\ et\ C\epsilon[OF]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectif des côtés $[OA], [AB], [BC]\ et\ [OC]$.

On désigne par (Δ) la médiatrice du segment $[OA]$ et par (Δ') celle de $[BC]$.

1. **Fais une figure.**
2. **a) Justifie que les droites $(\Delta) et\ (\Delta')$ sont parallèles.**

   b) Justifie que le triangle AOC est équilatéral.

   c) Justifie que : $OB = OF$.
3. **Soit R_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.**

   On pose : $f = R_1 o\ R_2$

   a) Détermine $f(O) et\ f(A)$

   b) Démontre que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   c) Déduis de ce qui précède que $(EF) \perp (OA) et EF = OA$.

   d) Construis le centre Ω de f.
4. **a) Justifie qu'il existe une isométrie g et une seule telle que : $g(O) = A, g(A) = C$ et $g(C) = B$.**

   b) Justifie que g est un antidéplacement

   c) Démontre que g est une symétrie glissée.
5. **Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g.**

   Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et S la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

   a) Démontre que : $g = RoS$

b) Détermine l'axe de la symétrie orthogonale S_1 telle que $R = S_{(AB)} o S_1$.

c) Déduis de ce qui précède que : $g = S_{(AB)} o t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur que l'on caractérisera.

d) En utilisant la relation $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB}$, détermine les éléments caractéristiques de g.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. **Démontre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.**
2. **On pose : $A = n + 3, B = 2n + 1$ et $d = PGCD(A; B)$.**
   a) Calcule $2A - B$ et déduis-en les valeurs possibles de d.
   b) Démontre que A et B sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
   c) Soient $S = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $P = 2n^2 - n - 1$.
   Justifie que S et P sont divisibles par $n - 1$.
3. **On pose : $\delta = PGCD(n(n + 3); 2n + 1)$**
   a) Démontre que d divise δ
   b) Démontre que δ et n sont premiers entre eux.
   c) Déduis des questions 3-a) et 3-b) que δ est égal à d.
   d) Détermine le $PGCD(S; P)$ en fonction de n.
4. **Détermine $PGCD(S; P)$ pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.**

Problème

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g_n(t) = (-\frac{2}{t} + lnt)^n$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction g_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J). Unités graphiques : $OI = 2cm$ et $OJ = 0,5cm$.

Partie A

1. **a) Calcule la limite de g_1 en 0.**
   b) Interprète graphiquement ce résultat.
2. **a) Calcule la limite de g_1 en $+\infty$.**

b) Justifie que (C_1) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

3. On suppose que g_1 est dérivable sur]0 ;+∞[.

   a) Démontre que g_1 est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   On admet que l'équation $t \in]0;+\infty[, g_1(t) = 0$ admet une solution unique α telle que : $2,3 < \alpha < 2,4$.

   b) Justifie que l'équation $t \in]0;+\infty[, g_1(t) = 1$ admet une solution unique β telle que : $4,3 < \beta < 4,4$.

4. Soit t un nombre réel strictement positif.

   Démontre que :

   a) $g_1(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0;\alpha[$;

   $b)$ $g_1(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

1. a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g_n(t)$.

   b) Démontre que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(t)}{t} = 0$ (On pourra poser : $x = t^{\frac{1}{n}}$).

   c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. On suppose que n est pair.

   a) Calcule $\lim_{x\to 0} g_n(t)$.

   b) Interprète graphiquement ce résultat.

3. On suppose que n est impair.

   a) Calcule $\lim_{x\to 0} g_n(t)$.

   b) Soit t un nombre réel strictement positif.

   Justifie que :

   i) $g_n(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0;\alpha[$;

   $ii)$ $g_n(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha;+\infty[$.

   $(On\ pourra\ utiliser\ la\ question\ 4\ de\ la\ partie\ A)$.

4. On suppose que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, g_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on désigne par g'_n sa fonction dérivée.

a) Démontre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout nombre réel strictement positif t, $g'_n(t) = ng'_1(t) \times g_{(n-1)}(t)$.

b) étudie suivant la parité de n, le signe de g'_n sur $]0; +\infty[$.

c) Dresse suivant la parité de n, le tableau de variation de g_n.

Partie C

Soient n et p deux entiers naturels et t un nombre réel strictement positif.

1. a) Exprime $g_{(n+p)}(t)$ en fonction de $g_n(t)$ et $g_p(t)$

   b) Déduis de ce qui précède que : $g_{(n+p)}(t) - g_n(t) = (g_p(t) - 1) \times g_n(t)$

   Dans toute la suite du problème, on suppose que n est pair

2. justifie que :

   a) (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) sur $]0; \beta[$;

   b) (C_n) est au-dessous de (C_{n+1}) sur $]\beta; +\infty[$

   (On pourra utiliser la question 3 de la partie A).

3. Construis (C_2) et (C_3) dans le même repère (O,I,J).

   On prendra : $\alpha = 2,35$ *et* $\beta = 4,35$.

4. Soit A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limité par (C_n), (C_{n+1}) et les droites d'équation $x = 1$ *et* $x = 2$.

   a) Justifie que, pour tout entier naturel n pair et non nul,

   $A_n = \int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t)dt$

   b) A l'aide d'une intégration par partie, calcule $\int_1^2 \big(1 - g_1(t)\big)dt$.

   c) Démontre que pour tout entier naturel n pair et non nul,

   $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$

   d) Déduis de ce qui précède que pour tout entier naturel n pair et non nul,

$$2(1 - ln2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$$

BAC 2017 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- **Y prend les valeurs $1, -1$ *et* 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b *et* e^c où a, b *et* c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.**
- **L'espérance mathématique $E(Y)$ de Y est égale à 1.**

1. a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = ln\,(\frac{1}{7})$ et $c = ln\,(\frac{4}{7})$.

2. Justifie que la variance $V(Y)$ de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives $1\ ;\ -1$ et 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 2)$ et $(C, 4)$.

On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.

b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.

c) Détermine l'ensemble (Γ).

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : OI = OJ et $Mes(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

On pose : F = rot et G = tor.

1. Fais une figure. (*On prendra : OI = 8 cm*).

2. a) Détermine F(C) et G(B).

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3. On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation GoF^{-1}.

b) Détermine (GoF^{-1})(O), puis caractérise la transformation GoF^{-1}.

c) Détermine (GoF)(I) puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GOF.

4. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2. On pose : $S = hor$.

a) Écris l'affixe de chacun des points A , B et C.

b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r.

c) Soit g l'application complexe associée à S.

Démontre que : $\forall\, z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.

d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S.

PROBLÈME

On considère la suite (tn) définie sur ℕ* par : $t_n = n - (n + \frac{1}{2})ln(n) + ln\,(n!)$.

***Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite* (tn) *et de démontrer que* :**

$\lim\limits_{x \to +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$

Partie I : Étude de la convergence de la suite (t_n)

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n\,;+\infty[$ par : $\psi(t) = ln(1 + \frac{t}{n}) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]-n\,;+\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1. a) Justifie que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[, \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1+\frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (*On ne calculera pas les limites*).

d) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, t \in]-n\,;+\infty[, ln\,(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$.

2. a) En utilisant la question 1. d) et en effectuant un changement de variable, démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ lnx \leq x - 1$.

b) Démontre que : $\forall\, k \in \mathbb{N}*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) dx = 0$

c) Déduis des questions 2. a) et 2. b) que : $\forall\, k \in \mathbb{N}*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$

d) Justifie alors que : $\forall\, k \in \mathbb{N}*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \boldsymbol{ln(x)dx} \leq \ln(\boldsymbol{k})$

e)En utilisant la relation de Chasles, démontre que : $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{ln(x)dx} \leq \ln(\boldsymbol{n}!)$

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}*, \boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n} + \frac{1}{2})\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{n} + \frac{1}{2}) + \boldsymbol{ln}\ (\boldsymbol{n}!) \geq \boldsymbol{ln}\ (\sqrt{2}).$$

***b*) Démontre que :** $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}*, \boldsymbol{t_n} \geq \boldsymbol{ln}\ (\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction *f* sur l'intervalle $]\,\boldsymbol{0}\ ;\ \boldsymbol{1}[\ \boldsymbol{par}:\ \boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{2x}\ \boldsymbol{ln}\ (\frac{1+x}{1-x})$.

On admet que : $\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0}\ ;\ \boldsymbol{1}[\ , \boldsymbol{f(x)} \geq \boldsymbol{1}\ \boldsymbol{et}\ \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}*, \boldsymbol{t_{n+1}} - \boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{f}(\frac{1}{2n+1})$.

a) Détermine le sens de variation de la suite $(\boldsymbol{t_n})$.

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite $(\boldsymbol{t_n})$.

Partie II : Calcul de la limite de la suite $(\boldsymbol{t_n})$

On définit la suite $(\boldsymbol{w_n})$ **par :** $\boldsymbol{w_n} = \frac{\pi}{2}\ \boldsymbol{et}\ \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{w_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{sin^n(t)\,dt}$.

1. a) Calcule $\boldsymbol{w_1}$.

b) Démontre que la suite $(\boldsymbol{w_n})$ **est décroissante et positive. On admettra que la suite** $(\boldsymbol{w_n})$ **est à termes strictement positifs.**

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{w_{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\boldsymbol{w_n}$.

On remarquera que : $\boldsymbol{sin}^{\,n+2}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{sin}^{n+1}(\boldsymbol{t})$.

d) En utilisant les questions 1. b) et 1. c) de la partie II, justifie que :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \quad \frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{2}} \leq \frac{\boldsymbol{w_{n+1}}}{\boldsymbol{w_n}} \leq \boldsymbol{1}.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$

2. On pose : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{y_n} = (\boldsymbol{n} + \boldsymbol{1})\boldsymbol{w_{n+1}} \times \boldsymbol{w_n}$.

a) Démontre que la suite $(\boldsymbol{y_n})$ **est constante.**

b) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{y_n} = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{w_n})^2$.

(On remarquera que :$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{w_n})^2 = \frac{n}{n+1} \times \boldsymbol{y_n} \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$**)**

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{w_n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite (a_n) converge vers l, alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers l.

a) Déduis de la question $2.c)$ de la partie II la limite de la suite (nw_{2n}^2)

(*On remarquera que* : $nw_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2nw_{2n}^2)$.

b) En utilisant la question $1.c)$ de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n!)}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

c) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ e^{t_n} = n!\ (\frac{e}{n})^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall\, n \in \mathbb{N}*, e^{t_{2n}-2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{2nw_{2n}^2}$ **, détermine la limite de la suite (t_n).**

BAC 2016 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{ln(n+1)+ln(n+2)+\cdots+ln(n+n)-nln(n)}{n}$

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n}\left[ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

2- *a)* Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{1}{n}ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} ln(x)dx \leq ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

(*On pourra utiliser un encadrement de $ln(x)$ sur l'intervalle* $\left[1+\frac{k}{n} ; 1+\frac{k+1}{n}\right]$).

***b)* En déduire que pour tout entier naturel *n* non nul : $u_n - \frac{1}{n}ln2 \leq \int_1^2 lnxdx \leq u_n$**

3- Sachant que $\int_1^2 lnxdx = 2ln(2)-1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1- On note (C) l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) tels que $14z\bar{z} + 16i(z-\bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$

Démontrer que M appartient à (C) si et seulement si :$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$.

2- *a)* Justifier que (C) est une ellipse. On note *Ω* son centre.

***b)* Préciser les coordonnées de *Ω*.**

***c)* Déterminer une équation de l'axe focal de (C).**

***d)* On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives**

$\frac{-2\sqrt{3}}{3}+i$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}+i$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}+i$

Justifier que A et A' sont les sommets de (C) situés sur son axe focal.

Justifier que F et F' sont les foyers de (C).

3- Construire l'ellipse $(\boldsymbol{C})$.

4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.

***a)* Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(\boldsymbol{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est : $3x^2 - y^2 = 1$**

***b)* Tracer les asymptotes de (H).**

***c)* Construire (H).**

PROBLEME

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} ln|x|$.

1- *a)* Calculer la limite de f en 0.

***b)* Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.**

***c)* Démontrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ et $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}; 0\right[$. .**

***d)* Dresser le tableau de variations de *f*.**

2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $3 < \alpha < 4$.

3- Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[\ f(x) < 0$;

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[\ f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction *h* dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \dfrac{31}{16}x^2 - \dfrac{1}{8}x^2 ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- *a)* Démontrer que *h* est dérivable en 0.

***b)* Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf(\frac{1}{x})$.**

***c)* Démontrer en utilisant A-3) que : $\forall\, x \in]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[\ h'(x) > 0$;**

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[\ h'(x) < 0$.

2- On $note$ (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $[-1\,;\,\frac{3}{2}]$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

***a)* Tracer la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0.**

***b)* Construire la courbe (Γ). (*On prendra :* $\alpha = 3,6$).**

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1[.

***a)* En utilisant une intégration par parties, démontrer que : $\int_{\lambda}^{1} x^2 ln(x)dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 ln(\lambda)$.**

***b)* On note $A\ (\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les droites d'équations $x = \lambda\ et\ x = 1$.**

Déduire de la question précédente que :

$A\ (\lambda) = (\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 ln(\lambda))\ cm^2$.

***c)* Calculer la limite de $A\ (\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.**

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à $0,01$ près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4} ln(x)$.

***a)* Étudier les variations de g.**

***b)* Démontrer que l'image de l'intervalle [3 ; 4] par g est contenue dans l'intervalle $[3\,;\,4]$.**

***c)* Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0\,;\,+\infty[, g(x) = x$.**

2- On considère la suite (*un*) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

***a)* Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, 3 \leq u_n \leq 4$.**

***b)* Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)\ et\ (u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.**

***c)* Démontrer que, pour tout *x* élément de $[3\,;\,4]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$**

En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$ puis que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}$

***d)* Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$**

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

BAC 2015 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaires d'une ville, la Mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5.000 F.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles

Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants.

Chaque automobiliste qui désire se gare dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- **Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.**
- **Si un seul numéro des deux tickets est gagnant alors le client stationne à 1 000 F.**
- **Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2 000 F.**

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1. **Calculer la probabilité de stationner gratuitement**
2. **Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est égale à $\frac{8}{25}$**
3. **Calculer la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement**

Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à $\frac{4}{5}$.

Un automobiliste se gare n fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1 a) **Calculer la probabilité q_n de payer l'amende au plus une fois**

b) Démontrer que la probabilité P_n qu'il paye au moins une fois l'amende est $P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$

c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $P_n \geq 0,99$

2 Monsieur Riko, exerçant dans ce quartier, paye en moyenne 4800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

a) Détermine la loi de probabilité de X

b) Monsieur Riko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ?

Justifie ta réponse.

EXERCICE 2

Partie I

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

On note A,B et C les points d'affixes respectives $2i$; $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} + 2i$

1. **a) Calculer le module et l'argument principal de $\frac{z_A}{z_B}$ où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.**

   b) En déduire que le triangle OAB est équilatéral

2. **On note P et Q les milieux respectifs des segments $[OB]$ et $[AB]$.**

r est la rotation de centre J d'affixe i et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

On pose : $f = t \circ r$

a) Détermine l'image par f du point O.

b) Démontrer que f est une rotation dont on donnera l'angle.

c) Construire le centre K de f

Partie II

1. **Soit M un point du plan d'affixe z. On pose $z = x + iy$, où x et y des nombres réels. On note H le point d'affixe $x + 3i$.**

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :$2|z| = |y - 3|$.

a) Démontrer que : $M\epsilon\ (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$.

b) Justifier que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice (D) associée

c) Démontrer que $M\epsilon\ (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

d) Préciser les coordonnées du centre Ω de (Γ) et les coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

e) Tracer (Γ).

2. **Soit (Γ') est l'image de (Γ) par f.**

   a) Démontrer que (Γ') est une ellipse d'excentricité $\frac{1}{2}$

   b) Préciser un foyer et la directrice associée.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 10 cm.

On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(e^{-x^2} - 1\right)lnx\ \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan du repère (O,I,J).

On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de $\int_0^1 f(x)dx$.

Partie A

O considère les fonctions h et g dérivables et définies sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = lnx + e^x + 1\ et\ g(x) = xlnx + e^x - 1$.

On admet qu'il existe un nombre réel $\alpha\ \epsilon\ ]0; 1[$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\ x\ \epsilon\ ]0; \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall\ x\ \epsilon\ ]\alpha, +\infty[, h(x) > 0 \\ h(\alpha) = 0 \end{cases}$$

1. **Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$**
2. **Justifier que : $\forall\ x\ \epsilon\ ]\alpha, +\infty[, g'(x) = h(x)$.**
3. **a) Etudier les variations de g sur l'intervalles $]0, +\infty[$.**

   b) Dresser le tableau de variation de g.

4. a) Démontrer que l'équation : $x \epsilon\,]0,+\infty[, g(x) = 0$ admet une solution de β.

   b) Justifier que : $\beta \epsilon\,]0,3; 0,4[$.

   c) Démontrer que : $\forall\, x \epsilon\,]0; \beta[, g(x) < 0;\ \ \forall\, x \epsilon\,]\beta, +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Justifier que f est dérivables en 0.
3. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

   c) Donner une interpretation graphique des résultats des limites des questions $a)$ et $b)$
4. on admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$

   a) Démontrer que : $\forall\, x \epsilon\,]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$.

   b) Déterminer lez variations de f sur $[0; +\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
5. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

   b) Tracer (C) et (T) dans le plan muni repère (O,I,J).

   On prendra $\beta = 0,31$.

Partie C

1. Sachant que : $\forall\, x \epsilon\, \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

   a) Démontrer que : $\forall\, x \epsilon\,]0; +\infty[, -1 \leq -e^{-x} \leq -1 + x$

   b) Démontrer que : $\forall\, x \epsilon\,]0; +\infty[, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$
2. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.

On pose : $\forall\, n \epsilon\, \mathbb{N}^*, I_n(t) = \int_t^1 x^n lnx dx$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n(t)$.

   b) Démontre que : $\forall\, t \epsilon\,]0; 1], -I_2(t) + \frac{1}{2} I_4(t) \leq \int_t^1 f(x)dx \leq -I_2(t)$.

3. On pose : $S = \int_0^1 f(x)dx$.

   a) Donner une interpretation géométrique de S.

   b) On admet que : $\lim\limits_{t \to 0} \int_t^1 f(x)dx = S$

Déterminer un encadrement de S.

BAC 2014 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

I-

1. **Démontrer qu'il existe un couple $(a;b)$ d'entiers relatifs tel que $45a-16b=1$**
2. **Soit l'équation (E) : $45x-16y=2$ où $x\ et\ y$ sont des entiers relatifs.**

   a) Justifier que le couple $(10;28)$ est une solution particulière de (E).

   b) Résoudre (E)

II- Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.

Les navires A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours.

Le navire A accoste un jour J_0 au port quatre jours plus tard, B accoste à son tour.

On note J_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

1. **Soient $u\ et\ v$ le nombre d'entrées au port effectuées régulièrement par A et entre J_0 et J_1 (J_0 non compris)**

   Démontrer que le couple $(u;v)$ est une solution de (E).
2. **Déterminer le couple $(U;v)$**
3. **Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).**

EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{\pi}{2}$ **et** $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)=-\frac{\pi}{6}$

I-

1. **On considère la similitude directe S qui transforme A en B et C en A.**

   a) Faire une figure en prenant $AC=7$ *(On complètera la figure au fur à mesure)*

   b) Justifier que S n'est pas une translation

   c) Justifier que l'angle de la similitude directe de S est $-\frac{\pi}{2}$.

d) Détermine le rapport de S

2. **On note W le centre de S**

   a) Démontrer que W appartient aux cercles (C') et (C) de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$

   b) Justifier que W est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC)

3. **Soit (D) une droite passant par A et ne passant pas par W.**

   (D') est la perpendiculaire à (D) passant par C. On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (D).

   a) Déterminer les images respectives de (D) et (D') par S.

   b) En déduire l'image du point C' par S

   c) Déduire de ce qui précède que le cercle de diamètre $[B'C']$ passe par un point fixe lorsque la droite (D) varie. Préciser ce point fixe.

II-

1. **Placer le point I de la demi-droite $[AC)$ tel que : $AB = AI$**
2. **Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$.**

   a) Démontrer que l'affixe du point C est $\sqrt{3}$

   b) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z', image de M par S.

   Justifier que : $z' = -i\frac{\sqrt{3}}{3}z + i$.

   c) Déterminer l'affixe du centre W de S.

3. **a) Déterminer l'ensemble (G) des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$**

   b) Tracer (G)

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est égale à 2cm.

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(1-2lnx), \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni du repère (O,I,J).

1. **démontrer que f est continue en 0.**

2. **Justifier que le courbe (C_f) admet en sont point d'abscisse 0, une tangente horizontale.**
3. **a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$**

   b) Interpréter graphiquement les résultats de la question 3-a).
4. **a) Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $]0; +\infty[, f(x) = -4xlnx$.**

   b) Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

   c) Calculer $f(\sqrt{e})$ et justifier que : $\begin{cases} \forall\, x \,\epsilon\,]0; \sqrt{e}[, 0 \leq \mathrm{f(x)} \leq 1 \\ \forall\, x \,\epsilon\,]\sqrt{e}; +\infty[, \mathrm{f(x)} < 0 \end{cases}$
5. **a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) en son point d'abscisse $\sqrt{e}$.**

   b) Tracer $(T) et\ (C_f)$.

Partie B

a est un élément de $]0; \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$ est x est un nombre réel strictement positif.

On pose : $S = \int_a^x f(t)dt$.

1. **A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que : $S = \frac{x^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2lnx\right) - \frac{a^3}{3}\left(\frac{5}{3} - 2lna\right)$**
2. **On note $A(\alpha)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations $y = 0, x = \alpha\ \ et\ x = \sqrt{e}$**

   a) Démontrer que : $A(\alpha) = (4 \int_\alpha^{\sqrt{e}} f(t)dt)cm^2$

   (On distinguera les cas $\alpha > \sqrt{e}$ et $\alpha < \sqrt{e}$)

   b) On suppose dans cette question que $\alpha < \sqrt{e}$.
   Calculer la limite de $A(a)$ lorsque a tend vers 0. (On admettra que cette limite est l'aire en cm² de la partie de plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0; x = \sqrt{e}\ et\ y = 0$)

   c) On suppose dans cette question que $a > \sqrt{e}$.
   Déterminer la valeur de α pour laquelle $A(a) = (\frac{8}{9}e\sqrt{e})cm^2$.
3. **Déduire de ce qui précède que l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C_f), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0\ et\ x = e^{\frac{5}{6}}$ est égale à : $\frac{16}{9}e\sqrt{e}$.**

Partie C

n est un entier naturel.

Soit f_n la fonction dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2(n - 2\ln x)e^{\frac{1-n}{2}} \; si \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On donne (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan muni du repère (O,I,J).

1. **Démontrer que (C_n) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $e^{\frac{n-1}{2}}$**
   On remarquera que $(C_1) = (C_f)$
2. **a) Construire la courbe (C_2) et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et e.**
   b) Déterminer en cm², l'aire de la partie du plan limitées par la courbe (C_2), les droites (OI) , (OJ) et les droites d'équation : $x = e$.
3. **Déterminer l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C_2), la droite (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = e$.**

BAC 2013 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$

On admettra que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. **On suppose que : $0 < a < 1$.**

   a) Démontrer par récurrence que :

   i) Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$;

   ii) La suite (u_n) est croissante.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis détermine sa limite.

2. **On suppose que : $a > 1$.**

Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = a^n$

c) On pose : $S_0 = 1$ *et* $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifier que : $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$

d) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{S_n}$.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, d'unité 1 cm, on considère les points $A(-1; 0)$ *et* $I(4; 0)$.

On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est le point O.

1. **a) Démontrer les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.**

b) Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.

c) Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

2. a) Démontrer qu'une équation de (E) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est: $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

   b) Construire (E).

3. on considère l'équation :

$$(E_\alpha): z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 - 2(4 + 5cos\alpha)z + (4cos\alpha + 5)^2 = 0 \ avec \ \alpha \in [0; \pi].$$

   a) Justifier que le discriminant de (E_α) est $\Delta = (6isin\alpha)^2$

   b) Résoudre l'équation (E_α).

   On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.

   c) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

   Démontrer que M_1 et M_2 appartiennent à (E) lorsque α décrit l'intervalle $[0; \pi]$.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J). Unités : OI=2cm et OJ=4cm

I- Soit la fonction u dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par : $u(x) = 1 + x^2 - 2x^2 lnx$.

1. Calculer $\lim_{x \to 0} u(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} u(x)$
2. a) Etudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

   b) Démontrer que l'équation : (E) : $x \in]0; +\infty[, u(x) = 0$ admet une solution unique α.

   c) Démontrer que : $1,89 < \alpha < 1,9$

   d) Justifier que : $\begin{cases} si \ x \in]0; \alpha[, alors \ u(x) > 0 \\ si \ x \in]\alpha; +\infty[, alors \ u(x) \leq 0 \end{cases}$

II-

1. **calculer** $\lim_{x \to 0} f(x)$ **et** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
2. **a) Démontrer que pour tout** x **élément de** $]0;+\infty[$, $f'(-x) = \frac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$

   b) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

   c) Etudier les variations de f **sur** $]0;+\infty[$ **puis dresser le tableau de variation de** f**.**
3. **a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et (OI).**

   b) Déterminer suivant les valeurs de x**, le signe de** $f(x)$ **pour tout** x **élément de** $]0;+\infty[$**.**
4. **Tracer (C) dans le plan muni du repère (O,I,J).**

Partie B

On donne F la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ **et définie par :** $F(x) = \int_1^x \frac{lnt}{1+t^2} dt$

1. **a)Déterminer le signe de F sur** $]0;+\infty[$**.**

   b) Calculer F'(x) pour tout nombre réel x **élément de** $]0;+\infty[$**.**
2. **On note** φ **la bijection réciproque de la fonction tangente sur** $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$**.**

   a) Démontrer qque pour tout x **élément de** $]0;+\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

   b) Soit h **la fonction définie par :** $\begin{cases} \forall\, x \in]0;+\infty[, \mathrm{h(x)} = \frac{\varphi(x)}{x} \\ h(0) = 1 \end{cases}$

   Démontrer que h **est continue en 0.**
3. **a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :**

   $\forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = \varphi(x)lnx - \int_1^x h(t)dt$

   b) En utilisant la question 2-b) de la partie B, démontrer que $\lim_{x \to 0} \varphi(x)lnx = 0$
4. **on admettra que F est prolongeable par continuité en 0 et que :**

   $\forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$**. Soit G le prolongement par continuité de F en 0. On pose** $G(0) = l$ $(l \in \mathbb{R})$**.**

   G est définie par : $\begin{cases} \forall\, x \in]0;+\infty[, G(x) = F(x) \\ G(0) = l \end{cases}$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

a) Démontrer que : $\lim_{x \to +\infty} G(x) = l$

b) Étudier les variations de G sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation

5. **On pose :**

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

On admet que $|l - v_n| < \frac{1}{(2n+3)^2}$

a) Justifier que : $v_2 = \frac{209}{225}$

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(2n+3)^2} < 25.10^{-3}$

c) En déduire une valeur approchée de l à 25.10^{-3} près.

d) Donner l'allure de (Γ) dans le plan muni du repère (O,I,J).

BAC 2012 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 FCFA pour les hommes et 700F CFA pour les femmes.

Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de l'ARETI s'élèvent à 20 000F CFA.

L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

1. **On considère l'équation (E) :** $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 1$.
   a) soit (x, y) **un couple d'entiers relatifs solution de** (E).
   Démontrer que $2x \equiv 1[7]$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$**, l'équation** $2x \equiv 1[7]$.
   c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{4 + 7k; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **Résoudre l'équation** $(E'): (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 9x + 7y = 200$.
3. **En déduire le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.**

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ **tel que** $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 2cm$.
K est le pont de coodronnées $(-1; 0)$.

Soit (Γ) **l'ensemble des points M du plan de coordonnées** (x, y) **vérifiant :** $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$.

1. **Justifie que** (Γ) **est une ellipse**
2. **On note :**
   - **F' et F les foyers de** (Γ);
   - **A' et A les sommets de** (Γ) **situés sur l'axe focal. L'abscisse de A' est négative. B' et B sont des deux sommets de l'ellipse**

   a) Justifier que les coordonnées respectives F et F' dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ **sont** $(0; 0)$ **et** $(-2; 0)$

b) Déterminer les coordonnées de A', A, B' et B dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

c) Construire (Γ) dans le plan muni du repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

3. Soit M un point quelconque de (Γ).

a) Construire le point N tel que KMN soit un triangle rectangle isocèle en N de sens indirect puis, construire le point P symétrique de K par rapport à N.

b) Justifier que P est l'image de M par une similitude directe s de centre K dont on précisera le rapport et l'angle.

c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature

Déterminer et construire l'ensemble (C) des points P lorsque M décrit (Γ).

4. a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude directe S est $z' = (1 - i)z - i$. Z étant l'affixe d'un point M quelconque du plan et z' l'affixe du point M', l'image de M par s.

b) On note G' et G les images respectives par s des foyers F' et F de (Γ).

Déterminer les coordonnées des points G' et G dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

c) Démontrer qu'une équation cartésienne de (C) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est :

$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$

PROBLEME

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n nonnul, par : $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ *et* définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - lnx$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

Unité graphique : 2cm

1. a) Démontrer que la droite (OJ) est une asymptote à la courbe (C).

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *puis* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpreter graphiquement ces résultats.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

b) En déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3. Construirs (C) dans le plan muni du repère (O,I,J).

Partie B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. **A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} lntdt$**

2. **On pose $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$.**

   a) Interpreter graphiquement A_n.

   b) Vérifier que $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{ln(n)}{n}$

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} A_n$.

3. **a) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$**

   Démontrer que : $\forall\, t \in \left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$, on a : $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$

   b) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f(\frac{n}{n})\right] \leq A_n \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f(\frac{n-1}{n})\right]$$

4. **on pose : $S_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f(\frac{n}{n})\right]$**

   a) Démontrer que $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$

   b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Partie C

1. **Démonter par récurrence que pour tout entier naturel non nul, $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.**

2. **a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n,**

   $ln\left(\frac{1}{n}\right)+ln\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+ln\left(\frac{n}{n}\right) = ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

   ***b*) En déduire que pour tout entier naturel n Supérieur ou égal à 2,**

   $S_n = \frac{1}{12n^4}[n(n+1)]^2 - \frac{1}{n}ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}$

   ***c*) En déduire que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\, ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$**

3. **a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $ln(u_n) = \frac{1}{n}ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$**

   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

BAC 2011 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1. **calculer les coordonnées (x', y') du point M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ du point M.**
2. **Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur est une hyperbole.**
   Préciser dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H).
3. **Construire (H)**
4. **Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$**

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère OMM'P soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Un livreur de pain fait son service à moto, dont servir tous les jours un client à 20 heures précise. La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un à l'autre.

Habituellement, le livreur met 10 minutes de la boulangerie à domicile de ce client ; mais la mairie a fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisé et indépendants.

- **S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart**
- **S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart**

Pour chaque feu :

- **La probabilité d'être vert à l'arrivée est $\frac{1}{2}$**
- **La probabilité d'être orange à l'arrivée est $\frac{1}{4}$**

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.

1. **a) Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{10; 10,5; 11; 11,5; 12\}$**

   b) Justifier que $P(x = 11) = \frac{5}{16}$

   c) Déterminer la loi de probabilité de X.
2. **Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat**
3. **Le livreur part à 19h49min de la boulangerie**

   a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 20heures précise chez le client.

   b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.
4. **Pour cette question on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat**

   a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine

   b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2cm.

Soit $k$un nombre réel non nul.

On considère la fonction f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f_k(x) = (2x + 2k)e^{-\frac{x}{2k}} - x$

On note (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k.

Le but du problème est d'étudier les fonctions f_k, de construire la courbe (C_1) et de donner un programme de construction de (C_k) pour k différent de 1.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$

1. **Étudier le sens de variation de h**
2. **Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$**

   a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $-0,71 < \alpha < -0,70$

   b) En déduire que :

   $\forall\, x \in\,]-\infty; \alpha[,\ h(x) < 0$ et $\forall\, x \in\,]\alpha; +\infty[,\ h(x) > 0$

Partie B : Étude de la fonction f_1

Pour tout nombre réel $x, f_1(x) = (2x+4)e^{-\frac{x}{2}} - x$

1. **a) Démontrer que $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$**

   b) En déduire un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude $0,1$.

2. **a) Pour tout réel x, calculer $f'_1(x)$ et démontrer que $f'_1(x) = -h(x)e^{-\frac{x}{2}}$**

   b) En déduire les variations de f_1.

3. **a) Calculer la limite quand x terd vers $-\infty\infty$ de $f_1(x)$ puis la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\frac{f_1(x)}{x}$**

   Interpréter graphiquement ces résultats

   b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.

   c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C_1) en $+\infty$.

4. **a) Dresser le tableau de f_1.**

   b) Construire la droite (D) et la courbe (C_1) dans le plan muni du repère (O,I,J)

5. **a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x :**

   $I(x) = \int_0^x (2t+4)e^{-\frac{t}{2}}\,dt$

   b) En déduire en cm² l'aire de A_1 de la partie du plan délimité par la courbe (C_1);la droite (D) ; la droite (OJ) et la droite d'équation $x = 2$.

Partie C : Étude de la fonction f_k

1. **a) Démontrer que pour tout nombre réel x : $f'_k(x) = -h(\frac{1}{k}x)e^{-\frac{x}{2k}}$**

   b) En utilisant la partie A, étudier les variations de f_k suivant le signe de k.

   c) Vérifier que $f_k(ka) = kf_1(\alpha)$

   d) Dresser le tableau de variation de f_k suivant le signe de k. *(On ne demandera pas de calculer les limites de f_k).*

2. **a) Démontrer que (C_k) est l'image de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport k.**

   b) En déduire la construction de $(C_{\frac{-1}{2}})$ dans le même repère que (C_1).

3. **On note A_k, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_k) ; la droite (D), la droite (OJ) et la droite $x = 2k$.**

Déterminer en cm², A_k en fonction de k.

BAC 2010 RCI – SERIE C

EXERCICE 1

On se propose d'étudier la suite (U_n) de nombres réels, définie par : $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1} = (1 + \frac{1}{e^{n+1}})U_n$.

Dans cet exercice, on admettra que pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$ **(1)**

Soit f la fonction numérique dérivable sur R et définie par : $f(x) = ln(1 + e^{-x})$

1- En utilisant l'inégalité (1), justifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$

2- Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissance.

3- Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, ln(U_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.

4- On pose : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ et $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} \ldots + \frac{1}{e^{2n}}$

a) A l'aide des questions 1) et 3), démontrer que : $a_n - \frac{1}{2}b_n < ln(U_n) < a_n$

b) Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

c) Démontrer que la suite $n\ U$ est majorée.

En déduire que la suite est convergente.

d) On note l la limite de la suite (U_n)

Démontrer que : $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq lnl \leq \frac{1}{e-1}$ puis en déduire une valeur approché de l à 0.1 près

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on observe successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1. **démontrer que la probabilité d'obtenir 3 identiques est $\frac{1}{36}$**
2. **Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.**

3. **Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$**
4. **Le droit de participation au jeu est de 3.000 francs.**
   - **Si le joueur obtient 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;**
   - **S'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 francs ;**
   - **S'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.**

   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie. On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise :

   a) Déterminer les valeurs prises par X

   b) Déterminer la loi de probabilité de X

   c) Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable ?

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soient f et g les fonctions numériques dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}\right) \; et \; g(x) = \frac{1}{3}\left(-5x - 4\sqrt{x^2 + 15}\right)$$

On note (C) et (C') les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. **a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $en + \infty$**

   b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

   c) Justifier que la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ).

   Dans la suite du problème, on admettra que la droite (Δ') d'équation $y = -3x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et que la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ').
2. **a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x**

   b) Déterminer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation.
3. **Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les droites $(oI)et$ (OJ).**

4. **a)Construire $(\Delta), (\Delta')$ et la courbe $(\boldsymbol{C})$ dans le plan muni du repère $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$.**

   b) Démonter que la courbe $(\boldsymbol{C'})$ dans le même repère que $(\boldsymbol{C})$.

Partie B

Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole $(\boldsymbol{H})$ de foyers F et F' de sommet A et A' une similitude s, est une hyperbole $(\boldsymbol{H'})$ de foyer $\boldsymbol{s(F)et\ s(F')}$ de sommets $\boldsymbol{s(A)et\ s(A')}$.

On note $(\boldsymbol{H})$ la courbe d'équation : $\boldsymbol{3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0}$

1. **Démontrer que $(\boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{C'})$**
2. **Soit s la similitude directe de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$**

Soit $\boldsymbol{x, x', y\ et\ y'}$ des nombres réels. Pour tout point M du plan d'affixe $\boldsymbol{z = x + iy}$ on note M' le point d'affixe $\boldsymbol{z' = x' + iy'}$ tel que $\boldsymbol{M' = s(M)}$

   a) Déterminer l'écriture complexe de s

   b) Justifier que $\boldsymbol{x' = \frac{1}{2}(x + y)}$ et $\boldsymbol{y' = \frac{1}{2}(-x + y)}$

   c) En déduire que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation $\boldsymbol{4x'^2 - y'^2 = 20}$

3. **a) Justifie que (Γ) et une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets**

   b) Déterminer l'excentricité de (Γ)

   c) Construire (Γ) et ses asymptotes dans le même repère que (H). (On utilisera deux couleurs différentes (H) et (Γ)

4. **Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et le sommet.**